Lista 12 - Curvas de Nível e gráficos

Dada uma função $z = f(x,y)$, definida num domínio D_f, e um número real c, a curva de nível c da função f é definida como sendo o conjunto

$$\gamma_c = \{(x,y)\in D_f \,:\, f(x,y) = c\}.$$

Observe que γ_c é um subconjunto do domínio de f.

Daí temos que o conjunto imagem da função f é dado por

$$imf = \{c \in \mathbb{R} : \gamma_c \neq \emptyset\}$$

Vejamos o motivo. Dado $c \in \mathbb{R}$, temos que:

$$c \in imf \;\leftrightarrow\; \exists\,(x,y) \in D_f : f(x,y) = c \;\leftrightarrow\; \gamma_c \neq \emptyset$$

(I) Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$
2. $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$
3. $z = 1 - x - y$
4. $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$
5. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
6. $h(x,y) = 2 - x^2$
7. $f(x,y) = arctg(x^2 + y^2)$
8. $z = xy$
9. $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$
10. $z = x$

(II) Seja $z = f(x,y)$, com $(x,y) \in D_f$, e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, com $c_1 \neq c_2$. É possível que as curvas de nível γ_{c_1} e γ_{c_2} tenham ponto em comum ? Justifique sua resposta.

(III) Suponhamos que a função $f(x,y) = x + 2y$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy.

(a) Desenhe a isoterma correspondente às temperaturas de 0 graus centígrados, 1 grau centígrado e -3 graus centígrados.

(b) Determine o ponto de mais baixa temperatura sobre a região definida por $x^2 + y^2 \leq 4$.

(IV) Seja $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$.

(i) Desenhe a curva de nível 0 da função f.

(ii) Desenhe a curva de nível 1 de f.

(iii) Desenhe a curva de nível 1/2 de f.

(iv) Considere $k > 0$ e a função $z(t) = \dfrac{2kt^2}{k^2+t^4}$.

(É a função $f(x,y)$ sobre a reta definida por $x = k$ e $y = t$.) Esboce o gráfico de $z(t)$.

Um esboço do gráfico desta função $f(x,y)$está na figura abaixo, desenhado pelo saudoso professor Trajano Couto Machado, quando ainda não havia tantos recursos tecnológicos.