



PME3100 Mecânica I



Notas de aula

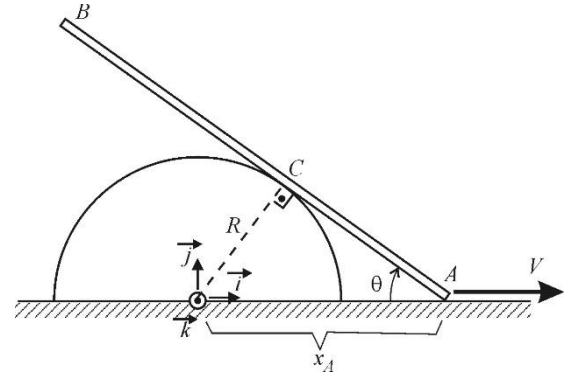
Cinemática do Sólido – Parte 3

Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

Exemplo 2: A extremidade A da barra AB, sempre em contato com o plano horizontal, tem velocidade V constante. Sabendo-se que a barra move-se no plano do papel, mantendo contato com o semi-círculo de raio R, determine, em função de θ :

- a) a velocidade angular vetorial da barra AB;
- b) a velocidade vetorial do ponto C da barra em contato com o semi-círculo;
- c) a aceleração vetorial do mesmo ponto C.



Resolução:

a) $\vec{\omega}$ da barra AB:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = (-\dot{\theta}) \vec{k}$$

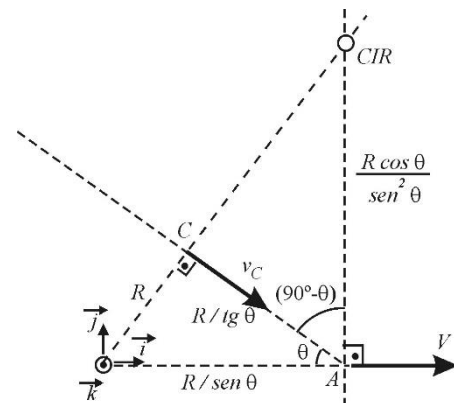
$\dot{\theta}$ pode ser determinado geometricamente:

$$\begin{cases} V = \frac{dx_A}{dt} \\ x_A = \frac{R}{\sin \theta} \end{cases} \Rightarrow V = \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{\sin \theta} \right) = -\frac{R}{\sin^2 \theta} \cos \theta \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{V \sin^2 \theta}{R \cos \theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{V \sin^2 \theta}{R \cos \theta} \vec{k}$$

Alternativamente, usando o CIR

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (A - CIR) \Rightarrow \\ \Rightarrow V \vec{i} &= \vec{0} + \omega \vec{k} \wedge \left(-\frac{R \cos \theta}{\sin^2 \theta} \vec{j} \right) = \\ &= \frac{\omega R \cos \theta}{\sin^2 \theta} \vec{i} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega &= \frac{V \sin^2 \theta}{R \cos \theta} \text{ ou } \vec{\omega} = \frac{V \sin^2 \theta}{R \cos \theta} \vec{k} \end{aligned}$$

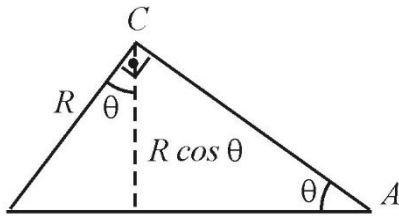


b) \vec{v}_C (ponto C da barra em contato com o semi-círculo):

Fórmula de Poisson:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (C - A)$$

(C - A):



$$(C - A) = R \cos \theta \vec{j} - \frac{R \cos^2 \theta}{\sin \theta} \vec{i}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= V\vec{i} + \frac{V \sin^2 \theta}{R \cos \theta} \vec{k} \wedge \left(R \cos \theta \vec{j} - \frac{R \cos^2 \theta}{\sin \theta} \vec{i} \right) = \\ &= V\vec{i} - V \sin^2 \theta \vec{i} - V \sin \theta \cos \theta \vec{j} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_C = V(\cos^2 \theta \vec{i} - \sin \theta \cos \theta \vec{j})$$

c) aceleração do mesmo ponto C:

O \vec{v}_C calculado é a velocidade vetorial de um ponto da barra, no instante em que este está em contato com a circunferência (e não em qualquer instante). Assim, a aceleração do ponto **não pode** ser calculada pela derivação da expressão acima. É necessário usar a expressão geral da aceleração:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - A)]$$

(lembrar que a aceleração do CIR é $\neq \vec{0}$)

$$\vec{a}_A: \quad \vec{a}_A = \vec{0} \quad (V \text{ é constante})$$

$$\dot{\vec{\omega}}: \quad \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega} \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{V \sin^2 \theta}{R \cos \theta} \right) = \frac{V}{R} \left(\frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta \dot{\theta} + \sin^3 \theta \dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \right) = \\ &= \frac{V \dot{\theta} \sin \theta}{R} \left(\frac{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) = \frac{V \dot{\theta} \sin \theta}{R} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Como } \dot{\theta} = -\omega \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{V \omega \sin \theta}{R} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right)$$

$$\dot{\vec{\omega}} \wedge (C - A):$$

$$\dot{\vec{\omega}} \wedge (C - A) = \dot{\omega} \vec{k} \wedge \left(R \cos \theta \vec{j} - \frac{R \cos^2 \theta}{\sin \theta} \vec{i} \right) = -\dot{\omega} R \cos \theta \vec{i} - \frac{\dot{\omega} R \cos^2 \theta}{\sin \theta} \vec{j}$$

$$\vec{\omega} \wedge (C - A):$$

$$\vec{\omega} \wedge (C - A) = -\omega R \cos \theta \vec{i} - \frac{\omega R \cos^2 \theta}{\sin \theta} \vec{j}$$

$$\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - A)]:$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - A)] &= \omega \vec{k} \wedge \left(-\omega R \cos \theta \vec{i} - \frac{\omega R \cos^2 \theta}{\sin \theta} \vec{j} \right) = \\ &= -\omega^2 R \cos \theta \vec{j} + \frac{\omega^2 R \cos^2 \theta}{\sin \theta} \vec{i} \end{aligned}$$

Portanto:

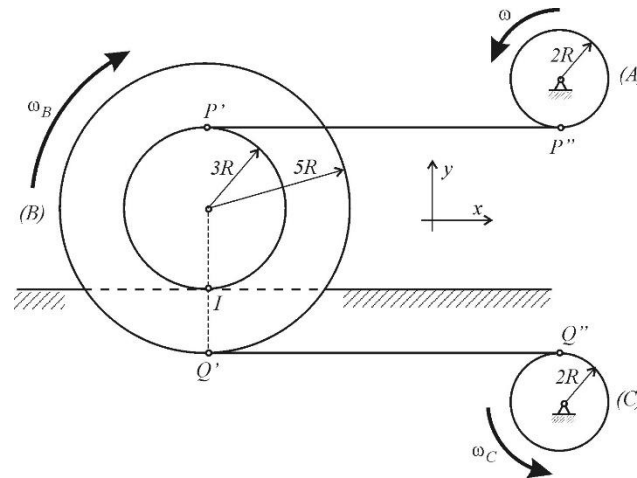
$$\begin{aligned} \vec{a}_C &= -\dot{\omega} R \cos \theta \vec{i} - \frac{\dot{\omega} R \cos^2 \theta}{\sin \theta} \vec{j} - \omega^2 R \cos \theta \vec{j} + \frac{\omega^2 R \cos^2 \theta}{\sin \theta} \vec{i} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{a}_C &= \frac{V^2 \sin^3 \theta}{R \cos^2 \theta} (1 + 2 \cos^2 \theta) \vec{i} + \frac{2V^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{R} \vec{j} \end{aligned}$$

Comparando com a derivada da expressão de \vec{v}_C obtida anteriormente:

$$\frac{d}{dt} [V(\cos^2 \theta \vec{i} - \sin \theta \cos \theta \vec{j})] = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{R \cos \theta} [2 \sin \theta \cos \theta \vec{i} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \vec{j}]$$

Esta derivada é a variação de velocidade dos sucessivos pontos C da barra que estão em contato com o semi-círculo naquele instante.

Exemplo 3: No sistema indicado na figura, determine a velocidade angular da polia C. A polia B rola sem escorregar e o fio é perfeitamente flexível e inextensível. Não há escorregamento do fio em relação às polias. A velocidade angular de A é ω .



Resolução:

Fio flexível e inextensível: $\vec{v}_{P'} = \vec{v}_{P''} = 2\omega R\vec{i}$

Disco B, usando I (CIR; rola sem escorregar):

$$\vec{v}_{P'} = \vec{v}_I + \vec{\omega}_B \wedge (P' - I) = -\omega_B \vec{k} \wedge (6R\vec{j}) = 6R\omega_B \vec{i}$$

Igualando: $2\omega R = 6R\omega_B \Rightarrow \omega_B = \frac{\omega}{3}$

Também: $\vec{v}_{Q'} = \vec{v}_{Q''}$ (fio flexível e inextensível)

$$\text{Disco B: } \vec{v}_{Q'} = \vec{v}_I + \vec{\omega}_B \wedge (Q' - I) = -\left(\frac{\omega}{3}\right) \vec{k} \wedge (-2R\vec{j}) = -\frac{2R\omega}{3} \vec{i} = \vec{v}_{Q''}$$

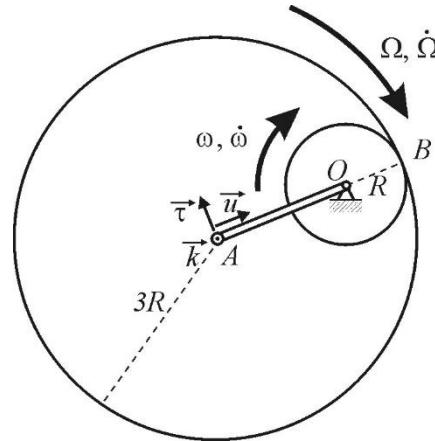
$$\text{Disco C: } \vec{v}_{Q''} = -2\omega_C R \vec{i}$$

Assim: $-\frac{2R\omega}{3} = -2\omega_C R \Rightarrow \omega_C = \frac{\omega}{3}$

Exemplo 4: O centro O do disco é fixo, o disco tem raio R e gira com velocidade angular ω e aceleração angular $\dot{\omega}$. O disco de centro A e raio $3R$ gira com velocidade angular Ω e aceleração angular $\dot{\Omega}$, mantendo sempre um ponto de contato (onde não há escorregamento) com o disco de centro O . Nessas condições, determine:

- a velocidade e a aceleração do ponto A
- a velocidade e a aceleração angulares da barra AO
- a velocidade e a aceleração do ponto B do disco de centro A em contato com o disco de centro O .

(Obs.: como esses discos se movem? (“bambolê”))



Resolução:

a) \vec{v}_A e \vec{a}_A

A e B são pontos do disco de centro A e raio $3R$:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \wedge (A - B) = \vec{v}_B + \Omega \vec{k} \wedge (-3R\vec{u}) = \vec{v}_B + 3R\Omega\vec{\tau} \quad (1)$$

Para o disco de centro O e raio R :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (B - O) = (-\omega\vec{k}) \wedge (R\vec{u}) = -\omega R\vec{\tau} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$\vec{v}_A = -\omega R\vec{\tau} + 3R\Omega\vec{\tau} \Rightarrow \vec{v}_A = -R(\omega + 3\Omega)\vec{\tau}$$

Como esta expressão vale para qualquer instante, a aceleração é a derivada:

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{v}}_A = -R(\dot{\omega} + 3\dot{\Omega})\vec{\tau} - R(\omega + 3\Omega)\dot{\vec{\tau}}$$

Não temos $\dot{\vec{\tau}}$; então, vamos usar a expressão geral da aceleração aplicada à barra AO :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\omega}_{AO} \wedge (A - O) + \vec{\omega}_{AO} \wedge [\vec{\omega}_{AO} \wedge (A - O)]$$

$$\vec{\omega}_{AO}: \vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{AO} \wedge (A - O) \Rightarrow -R(\omega + 3\Omega)\vec{\tau} = \vec{0} + \omega_{AO}\vec{k} \wedge (-2R\vec{u}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{AO} = \frac{(\omega - 3\Omega)}{2} \Rightarrow \vec{\omega}_{AO} = \frac{(\omega - 3\Omega)}{2}\vec{k}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_{AO}: \dot{\vec{\omega}}_{AO} = \frac{(\dot{\omega} - 3\dot{\Omega})}{2}\vec{k}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\vec{a}_A &= \vec{0} + \left(\frac{\dot{\omega} - 3\dot{\Omega}}{2}\right) \vec{k} \wedge (-2R\vec{u}) + \left(\frac{\omega - 3\Omega}{2}\right)^2 \vec{k} \wedge [\vec{k} \wedge (-2R\vec{u})] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{a}_A = -(\dot{\omega} - 3\dot{\Omega})R\vec{\tau} + \frac{(\omega - 3\Omega)^2}{2} R\vec{u}\end{aligned}$$

b) $\vec{\omega}_{AO}$ e $\dot{\vec{\omega}}_{AO}$

Já obtidos acima:

$$\vec{\omega}_{AO} = \frac{(\omega - 3\Omega)}{2} \vec{k}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_{AO} = \frac{(\dot{\omega} - 3\dot{\Omega})}{2} \vec{k}$$

c) \vec{v}_B e \vec{a}_B de B do disco de centro A e raio $3R$

Condição de contato sem escorregamento:

$$\vec{v}_{B(A,3R)} = \vec{v}_{B(O,R)}$$

$$\text{De (1): } \vec{v}_{B(O,R)} = -\omega R\vec{\tau} \Rightarrow \vec{v}_{B(A,3R)} = \vec{v}_B = -\omega R\vec{\tau}$$

Os dois pontos, do disco $(A, 3R)$ e do disco (O, R) , que estão em contato na posição B num determinado instante, têm a mesma velocidade nesse instante (não há escorregamento), mas não têm a mesma aceleração (são pontos distintos, com trajetórias distintas).

A aceleração NÃO É a derivada da expressão acima:

- derivada: $\dot{\vec{v}}_B = -\dot{\omega}R\vec{\tau} - \omega R\dot{\vec{\tau}} = -\dot{\omega}R\vec{\tau} - \omega R(\vec{\omega}_{AO} \wedge \vec{\tau}) = -\dot{\omega}R\vec{\tau} - \frac{\omega(\omega-3\Omega)R}{2}\vec{u}$
é a variação de velocidade dos sucessivos pontos que ocupam a posição B .
- $\vec{a}_{B(O,R)} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - O)] = -\dot{\omega}R\vec{\tau} - \omega^2 R\vec{u}$
é a aceleração do ponto do disco (O, R) no instante em que ele está na posição B .
- $\vec{a}_{B(A,3R)} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (B - A) + \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge (B - A)] = -\dot{\omega}R\vec{\tau} + \left[\frac{(\omega-3\Omega)^2}{2} - 3\Omega^2\right] R\vec{u}$
é a aceleração do ponto do disco $(A, 3R)$ no instante em que ele está na posição B .

Resposta:

$$\vec{a}_{B(A,3R)} = -\dot{\omega}R\vec{\tau} + \left[\frac{(\omega - 3\Omega)^2}{2} - 3\Omega^2\right] R\vec{u}$$