Lista de Exercício III

1. Suponha que uma teoria de campo, descrita por uma densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}$, é invariante por rotações espaciais. Calcule a corrente de Noether correspondente, que denominamos de tensor momento angular.

2. Considere uma teoria de campos clássica com 3 campos escalares ϕ_a, $a = 1, 2, 3$, descita pela densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^{3} \partial_\mu \phi_a \, \partial^\mu \phi_a - V\left(\mid \phi \mid\right)$$

onde $\mid \phi \mid = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2$.

   (a) Calcule as equações de movimento.

   (b) Mostre que a teoria é invariante pelo grupo de Poincaré.

   (c) Mostre que $\mathcal{L}$ é invariante pelas transformações globais

$$\phi_a \to \sum_{b=1}^{3} O_a^b \, \phi_b$$

   onde O é uma matriz ortogonal $O\,O^T = \mathbb{1}$.

   (d) Calcule as correntes de Noether associadas a esta simetria.

   (e) Calcule o parênteses de Poisson entre as cargas de Noether.

   (f) Calcule o Hamiltoniano do sistema.

3. Seja $F_{\mu\nu}$ o tensor de campos de uma teoria de gauge de um dado grupo G, e considere o dual de Hodge do tensor dos campos $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\rho\sigma}$. Mostre que (espaço Euclideano)

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(\widetilde{F}_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu}\right) = \partial_\mu\,\eta_\mu$$

onde

$$\eta_\mu = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left(F_{\nu\rho}\,A_\sigma - \frac{2}{3}\,i\,e\,A_\nu\,A_\rho\,A_\sigma\right)$$

Sob uma transformação de gauge infinitesimal ($g = e^{i\,\varepsilon} \sim 1 + i\,\varepsilon$) temos que

$$\delta A_\mu = i\,[\,\varepsilon\,,\,A_\mu\,] - \frac{1}{e}\partial_\mu\varepsilon \qquad\qquad \delta F_{\mu\nu} = i\,[\,\varepsilon\,,\,F_{\mu\nu}\,]$$

Mostre que η_μ não é invariante de gauge, mas se transforma como

$$\delta\eta_\mu = -\frac{1}{2\,e}\,\partial_\sigma t_{\mu\sigma} \qquad\qquad t_{\mu\sigma} = \varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\nu A_\rho\,\varepsilon\right)$$

Mostre no entanto que $\partial_\mu\,\eta_\mu$ é invariante de gauge.

4. A carga topológica dos instantons (número de Pontryagin) é dada por

$$Q = \frac{1}{4} \int d^4x \, \text{Tr} \left(\widetilde{F}_{\mu\nu} \, F_{\mu\nu} \right) = \int d^4x \, \partial_\mu \, \eta_\mu = \int_{S^3} ds^\mu \, \eta_\mu$$

onde S^3 é a esfera tridimensional no infinito de $\mathbb{R}^4$. Para que a solução tenha ação Euclideana finita é preciso que o tensor dos campos vá a zero no infinito mais rápido que $1/R^2$, com $R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, e portanto os campos de gauge são puro gauge

$$A_\mu \to \frac{i}{e} \, \partial_\mu g \, g^{-1}$$

Mostre que

$$\eta_\mu \to \frac{1}{6\,e^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, \text{Tr} \left(g^{-1} \partial_\nu g \; g^{-1} \partial_\rho g \; g^{-1} \partial_\sigma g \right)$$

e que portanto Q rotula as classes de homotopia do mapeamento $S^3 \to G$, ou seja o grupo de homotopia $\Pi_3 \,(G)$.

5. Considere uma teoria com 8 campos escalares reais, ϕ_a, $a = 1, 2 \ldots 8$, transformando pela representação adjunta de $SU(3)$, e cuja Lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \, (D_\mu \phi)^T \cdot D^\mu \phi - V \qquad\qquad V = \frac{\lambda}{4} \left(\text{Tr} \left(\phi^2 \right) - a^2 \right)^2$$

e

$$\phi = \phi_a \, T_a \qquad\qquad \phi \to g \, \phi \, g^{-1} \qquad\qquad \text{Tr} \, (T_a \, T_b) = \delta_{ab}$$

   (a) Determine os padrões de quebra espontânea de simetria quando os vácuos são

   $$\phi_0^{(1)} = \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   e

   $$\phi_0^{(2)} = \frac{a}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   (b) Quantos bosons de Goldstone temos em cada caso?

6. Considere a teoria acima acoplada minimalmente a campos de gauge de $SU(3)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \, \text{Tr} \, (F_{\mu\nu} \, F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \, (D_\mu \phi)^T \cdot D^\mu \phi - V \qquad\qquad V = \frac{\lambda}{4} \left(\text{Tr} \left(\phi^2 \right) - a^2 \right)^2$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i \, e \, [\, A_\mu \, , \, A_\nu \,] \qquad\qquad A_\mu = A_\mu^a \, T_a$$

   (a) Calcule as massas dos 8 campos de gauge após a quebra espontânea de simetria nos dois casos de vácuo de Higgs dados acima.

   (b) Quantos campos de Higgs sobram após a quebra espontânea de simetria naqueles mesmos dois casos. Quais as suas massas?