ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME Departamento de Engenharia Mecânica

PME3100 Mecânica I

Notas de aula

Cinemática do Sólido – Parte 1

Ronaldo de Breyne Salvagni

Agosto de 2021

PME3100 Mecânica I

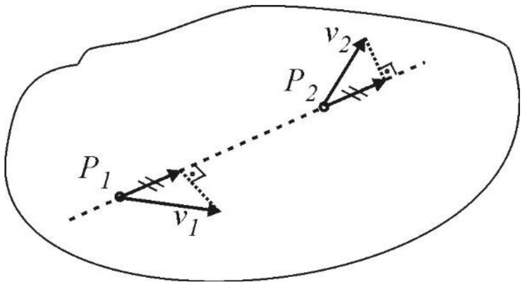
CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

1 – Conceito de corpo rígido

Um corpo rígido, ou um sólido (indeformável), é um sistema material em que as distâncias entre pontos e ângulos entre retas desse corpo permanecem constantes.

Propriedade fundamental **(importante)**

As projeções dos vetores velocidade de dois pontos de um sólido na direção da reta que os une são iguais.



$$\vec{v}_1 \cdot (P_1 - P_2) = \vec{v}_2 \cdot (P_1 - P_2)$$

ou

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot (P_1 - P_2) = 0$$

De fato, para um sólido, pela definição:

$$(P_1 - P_2) \cdot (P_1 - P_2) = (P_1 - P_2)^2 = |P_1 - P_2|^2 = cte \Rightarrow \frac{d}{dt}(P_1 - P_2)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(P_1 - P_2) \cdot \frac{d}{dt}(P_1 - P_2) = 0 \Rightarrow (P_1 - P_2) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0$$

Exemplo 1:

Dados $P_1 - O = 2t\vec{\imath}$ e $P_2 - O = 2\sqrt{1-t^2}\vec{\jmath}$, esses pontos podem pertencer a um mesmo corpo rígido?

Temos:

$\vec{v}_1 = 2\vec{\imath}$ e $\vec{v}_2 = \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}\vec{\jmath}$

$$(P_1 - P_2) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \left(2t\vec{\imath} - 2\sqrt{1-t^2}\vec{\jmath}\right) \cdot \left(2\vec{\imath} + \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}\vec{\jmath}\right) =$$

$= 4t - 4t = 0 \Rightarrow$ **podem** ser pontos de um mesmo sólido

Nota:

Definição de "deslocamentos rígidos" e "atos de movimento de um sólido"

Um deslocamento rígido é o deslocamento de um sólido entre uma posição inicial (num instante *t*) e outra posição (num instante $t + \Delta t$). Refere-se apenas a estas duas posições (duas "fotografias"), não se levando em conta o que ocorreu nos instantes intermediários.

O estudo geométrico dos deslocamentos rígidos fornece recursos para o estudo dos movimentos propriamente ditos, permitindo determinar a distribuição, num dado instante, das velocidades dos pontos que constituem esse sólido. Esse conjunto de velocidades (ou "campo de velocidades") constitui o chamado "ato de movimento " do sólido.

2 – Tipos de movimento de um sólido

Podemos classificar os movimentos possíveis de um sólido nos seguintes tipos:

1 – Translação

2 – Rotação em torno de um eixo fixo

3 – Movimento roto-translatório

4 – Movimento plano geral

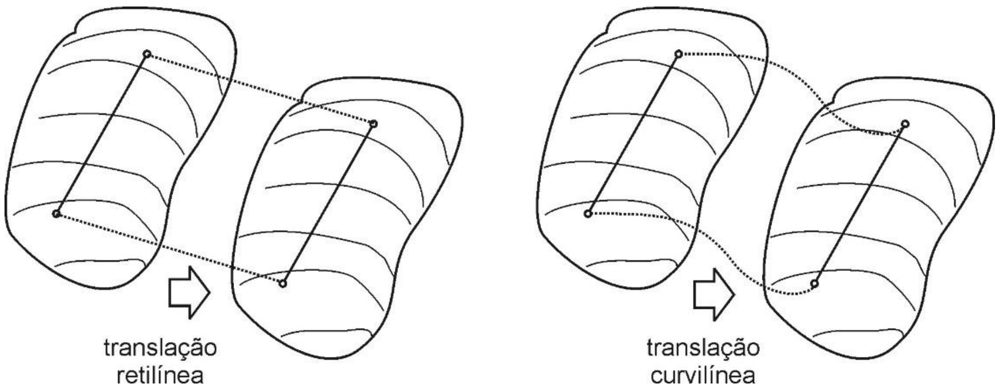
5 – Movimento ao redor de um ponto fixo

6 – Movimento helicoidal

7 – Movimento geral

2.1 – Translação

Qualquer reta do sólido mantém a direção durante o movimento. As trajetórias dos pontos são "paralelas".

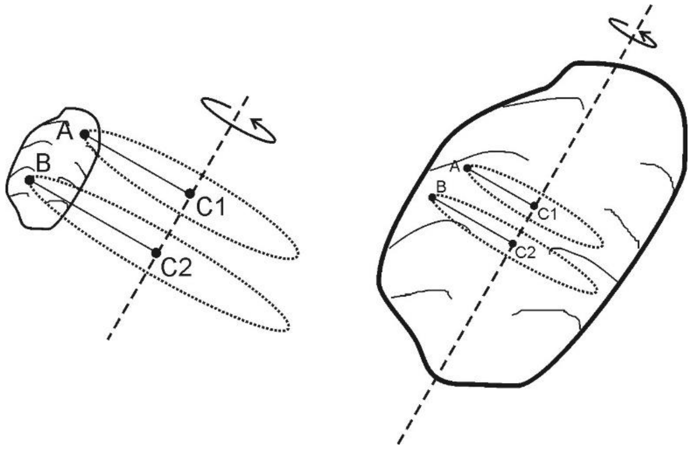


Se as trajetórias são retas: *translação retilínea*

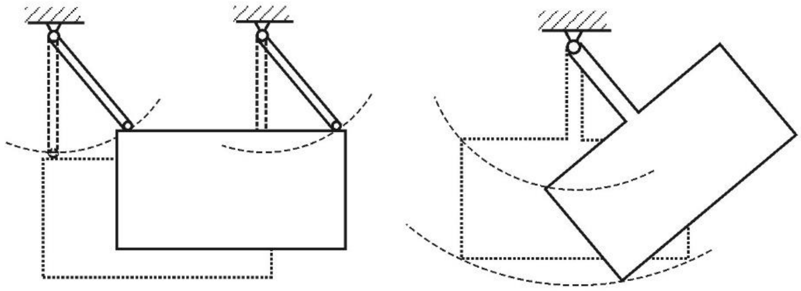
Caso contrário: *translação curvilínea*

2.2 – Rotação em torno de um eixo fixo

Os pontos se deslocam em planos paralelos, descrevendo circunferências cujos centros estão sobre aquele eixo. Se o eixo, chamado de "eixo de rotação", intercepta o sólido, os pontos situados sobre ele têm velocidades e aceleração nulas.



Não confundir rotação com certos tipos de translação curvilínea.



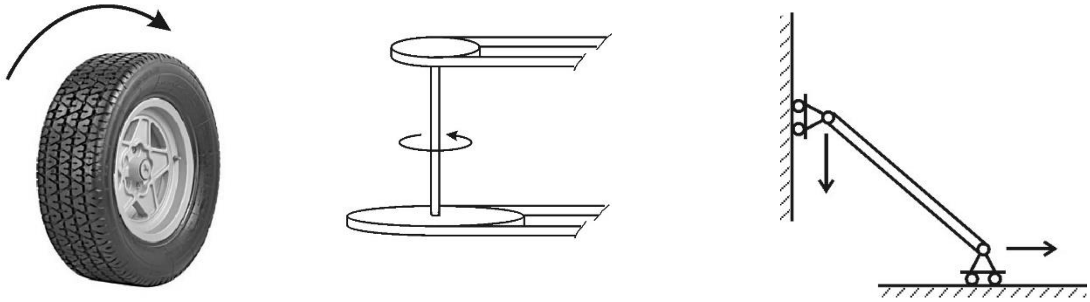
2.3 – Movimento roto-translatório

Preserva (mantém) a direção do eixo de rotação, ou seja, o eixo de rotação tem movimento de translação.

2.4 – Movimento plano geral

É um movimento roto-translatório em que todas as velocidades são ortogonais ao eixo de rotação (ou seja, o eixo de rotação desloca-se apenas transversalmente).

Exemplos:



2.5 – Movimento ao redor de um ponto fixo

Todas as partículas descrevam trajetórias em superfícies esféricas com centro naquele ponto.

Exemplos:

- pião

- aeromodelo
- haste de joystick de videogames

2.6 – Movimento helicoidal

Mantém o eixo de rotação deslocando-se sobre si mesmo (caso particular do movimento roto-translatório; comparar com o movimento plano).

2.7 – Movimento geral

Qualquer movimento de corpo rígido, incluído ou não nos anteriores;

3 – Graus de liberdade e vínculos

Graus de liberdade do movimento de um sólido

Um sólido no espaço tem sua posição definida quando se fixam três de seus pontos (não alinhados):

1º ponto P_1 → 3 parâmetros

2º ponto P_2 → 2 parâmetros (+ a condição $\overline{P_1P_2} = cte$)

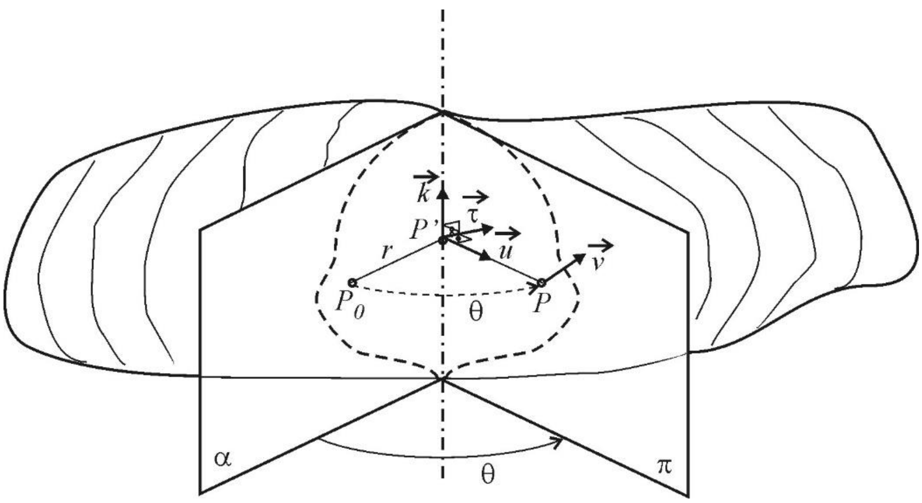
3º ponto P_3 → 1 parâmetro (+ as condições $\overline{P_1P_3} = cte$ e $\overline{P_2P_3} = cte$)

Total: 6 parâmetros → 6 graus de liberdade

Vínculos: são os mesmos já vistos na Estática.

4 – Vetor de rotação e Fórmula de Poisson

4.1 – Rotação em torno de um eixo fixo



No caso de rotação em torno de um eixo fixo, em qualquer instante todos os pontos à mesma distância do eixo têm a mesma velocidade e aceleração (decorre da rigidez do sólido).

Assim, todos os pontos que pertencem a um plano que passa pelo eixo mantêm-se nesse plano, enquanto este gira em torno daquele eixo.

Desta forma, tomando um plano fixo de referência (α), que passa pelo eixo, e um plano (π) do sólido, que no instante inicial coincide com α, a variação do ângulo θ entre os dois planos por unidade de tempo é a *velocidade angular* do sólido.

Definido o versor $\vec{k}$, arbitrariamente, sobre o eixo de rotação, podemos associar o sentido positivo de teta com o sentido de $\vec{k}$, através da “regra da mão direita”.

A velocidade angular será:

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega$$

Ao vetor $\vec{\omega}$ definido por:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \omega\vec{k}$$

dá-se o nome de *vetor de rotação* do sólido.

Qualquer ponto *P* do sólido, fora do eixo de rotação, descreve uma circunferência em torno desse eixo. Os pontos *P’* do eixo estão parados. Assim, o vetor de posição de *P* pode ser escrito como:

$$P - P' = \vec{r} = r\vec{u}$$

A velocidade será:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(P - P') = r\dot{\vec{u}}$$

pois *r* (distância de *P* a *P’*) é constante.

Os versores $\vec{u}$ e $\vec{\tau}$ formam um sistema de coordenadas polares e, assim: $\dot{\vec{u}} = \dot{\theta}\vec{\tau} = \omega\vec{\tau}$ e $\dot{\vec{\tau}} = -\dot{\theta}\vec{u} = \omega\vec{u}$.

Além disso, como $\vec{\tau} = \vec{k} \wedge \vec{u}$, podemos escrever:

$$\vec{v} = r\dot{\vec{u}} = \omega r\vec{\tau} = \omega r(\vec{k} \wedge \vec{u}) = (\omega\vec{k}) \wedge (r\vec{u}) = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

O escalar $v = \omega r$ é a chamada *velocidade escalar* de P.

Mais adiante, veremos que a relação $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ é de fundamental importância na cinemática dos sólidos.

A *aceleração angular* é definida por:

$$\dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

E o *vetor aceleração angular* é, por definição:

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\theta}\vec{k}$$

sendo $\vec{k}$ um versor fixo.

A aceleração do ponto *P* pode ser obtida derivando-se sua velocidade em relação ao tempo:

$$\vec{v} = \omega r\vec{\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\omega}r\vec{\tau} + \omega r\dot{\vec{\tau}} = \dot{\omega}r\vec{\tau} - \omega^2 r\vec{u}$$

O termo $(\omega^2 r)$ é a chamada <u>*aceleração normal*</u>, e $(\dot{\omega} r)$ a <u>*aceleração tangencial*</u>.

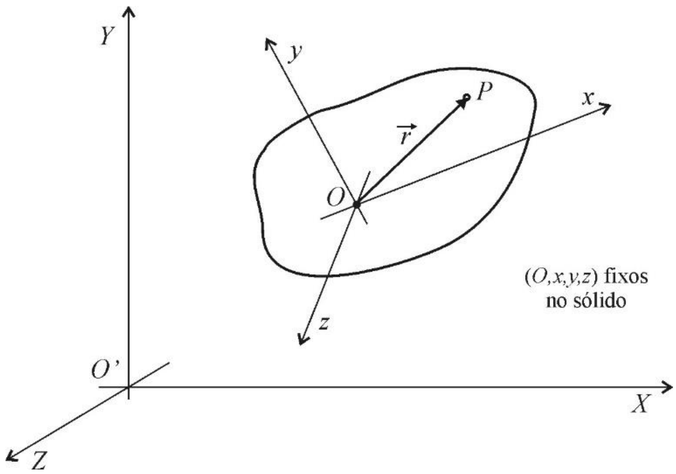
Um resultado equivalente pode ser obtido em forma vetorial:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} =$$

$$= \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

<u>*4.2 – Movimento qualquer*</u>



Tomemos um ponto *O* qualquer do sólido como referência, e seja *P* um ponto genérico desse sólido.

O vetor $P - O = \vec{r}$ tem módulo constante e, assim:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

Suponhamos que $\dot{\vec{r}} \neq \vec{0}$ (movimento não translatório). Então, existem vetores $\vec{\omega}$ tais que:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Vamos mostrar que existe um vetor $\vec{\omega}$ que não depende do ponto *P* (ou vetor $\vec{r}$) considerado, mas apenas do movimento do sólido.

Consideremos o sistema de coordenadas (*O, x, y, z*) fixo ao sólido. Podemos escrever:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = x\dot{\vec{\imath}} + y\dot{\vec{\jmath}} + z\dot{\vec{k}}$$

Como $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, temos, para quaisquer *x*, *y* e *z*:

$$x\dot{\vec{\imath}} + y\dot{\vec{\jmath}} + z\dot{\vec{k}} = x\vec{\omega} \wedge \vec{\imath} + y\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath} + z\vec{\omega} \wedge \vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{\imath}} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath} \\ \dot{\vec{\jmath}} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath} \\ \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \wedge \vec{k} \end{cases}$$

Escrevendo $\vec{\omega}$ em termos de suas componentes:

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k}$$

chegamos a:

$$\dot{\vec{\jmath}} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath} = \left(\omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k}\right) \wedge \vec{\jmath} = \omega_x\vec{k} - \omega_z\vec{\imath}$$

$$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \wedge \vec{k} = \left(\omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k}\right) \wedge \vec{k} = -\omega_x\vec{\jmath} + \omega_y\vec{\imath}$$

$$\dot{\vec{\imath}} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath} = \left(\omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k}\right) \wedge \vec{\imath} = -\omega_y\vec{k} + \omega_z\vec{\jmath}$$

de onde obtemos:

$$\omega_x = \dot{\vec{\jmath}} \cdot \vec{k}$$
$$\omega_y = \dot{\vec{k}} \cdot \vec{\imath}$$
$$\omega_z = \dot{\vec{\imath}} \cdot \vec{\jmath}$$

Os membros à direita <u>dependem apenas do movimento do sólido</u>, e não de um seu ponto particular.

Além disso, <u>esse $\vec{\omega}$ é único</u>, pois, se tivéssemos outro valor $\vec{\omega}'$, poderíamos escrever:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega}' \wedge \vec{r} \Rightarrow (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \wedge \vec{r} = \vec{0}$$

Como $\vec{r}$ é arbitrário, então necessariamente $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$.

Finalmente, sendo $\vec{r} = P - O$, temos:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{P} - \dot{O} = \vec{v}_P - \vec{v}_O = \vec{\omega} \wedge (P - O) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\vec{v}_P} = \boldsymbol{\vec{v}_O} + \boldsymbol{\vec{\omega}} \wedge (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O})$$

que é a Fórmula de Poisson, a qual descreve o campo de velocidades do sólido.

O vetor $\boldsymbol{\vec{\omega}}$ é chamado vetor de rotação (instantâneo) do sólido e, em geral, varia em módulo, direção e sentido, de instante para instante.

Note-se que o movimento geral pode ser considerado como uma rotação mais uma translação instantânea (movimento helicoidal).

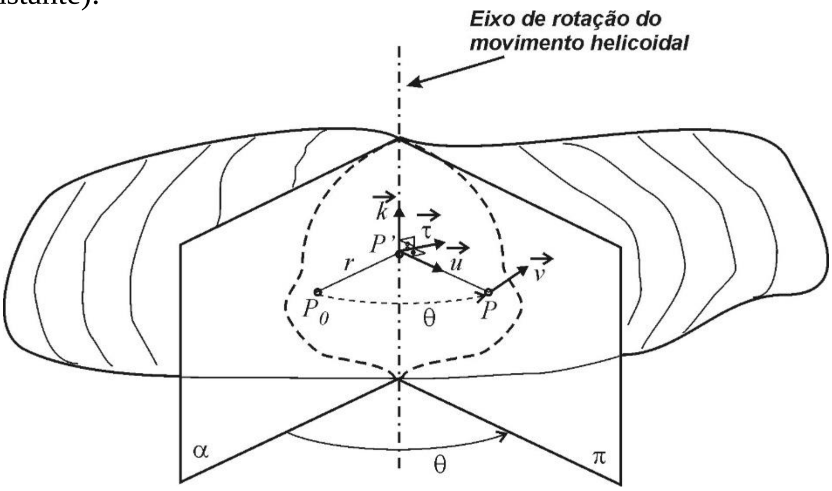
A aceleração pode ser obtida através de derivação direta da fórmula acima:

$$\boldsymbol{\vec{a}_P} = \dot{\vec{v}}_P = \boldsymbol{\vec{a}_O} + \dot{\boldsymbol{\vec{\omega}}} \wedge (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}) + \boldsymbol{\vec{\omega}} \wedge [\boldsymbol{\vec{\omega}} \wedge (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O})]$$

(campo de acelerações)

Caso particular:

Vamos retomar o caso de rotação em torno de um eixo fixo, visto anteriormente, mas agora pressupondo que o sólido tenha um movimento roto-translatório, com o versor $\vec{k}$ paralelo ao eixo de rotação ($\vec{k}$ constante).



Seja um ponto *P* qualquer do sólido e *P'* definido como a projeção ortogonal de *P* sobre o eixo de rotação (não depende do tempo). Temos, usando os versores mostrados na figura:

$$P - P' = \vec{r} = r\vec{u}$$

A velocidade será:

$$\vec{v}_P - \vec{v}_{P'} = \frac{d}{dt}(P - P') = r\dot{\vec{u}}$$

pois *r* (distância de *P* a *P'*) é constante.

Os versores $\vec{u}$ e $\vec{\tau}$ formam um sistema de coordenadas polares e, desde que $\vec{k}$ é constante, temos: $\dot{\vec{u}} = \dot{\theta}\vec{\tau}$ e $\dot{\vec{\tau}} = -\dot{\theta}\vec{u}$.

Além disso, como $\vec{\tau} = \vec{k} \wedge \vec{u}$, podemos escrever:

$$\vec{v}_P - \vec{v}_{P'} = r\dot{\vec{u}} = r\dot{\theta}\vec{\tau} = \dot{\theta}r\left(\vec{k} \wedge \vec{u}\right) = \left(\dot{\theta}\vec{k}\right) \wedge (r\vec{u}) = \left(\dot{\theta}\vec{k}\right) \wedge \vec{r}$$

Poisson:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P'} + \vec{\omega} \wedge (P - P') \Rightarrow \vec{v}_P - \vec{v}_{P'} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Como *P* é qualquer:

$$\boldsymbol{\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}}$$

Assim, vemos que, no caso particular de um movimento roto-translatório (que inclui movimento helicoidal e movimento plano), a magnitude do vetor rotação é igual à velocidade angular do sólido, em torno do eixo de rotação.

Exemplo: Mostre que se dois pontos P e Q de um mesmo corpo rígido têm, em um dado instante, a mesma velocidade, então:

i) $(P - Q)$ é paralelo ao vetor de rotação $\vec{\omega}$, ou

ii) O corpo realiza, neste instante, um ato de movimento translatório puro.

Resolução:
P e Q do mesmo corpo rígido: Fórmula de Poisson:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (P - Q) \Rightarrow \vec{v}_P - \vec{v}_Q = \vec{\omega} \wedge (P - Q) \Rightarrow \vec{\omega} \wedge (P - Q) = \vec{0}$$

Se P e Q são dois pontos distintos, então ou $(P - Q) \parallel \vec{\omega}$, ou $\vec{\omega} = \vec{0}$ (movimento de translação).