4320196 – Física para Engenharia II - Prova de Recuperação - 2012

Observações:

• Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
• A prova tem duração de 2 horas.
• Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
• Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
• Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
• Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
• **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
• Caso apareça alguma raiz que não seja um quadrado perfeito, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
• Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$$c = 3\times 10^8 \text{ m/s} \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Transf. de Lorentz:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \gamma(v)\,(x-vt) \\ y' &=& y \\ z' &=& z \\ t' &=& \gamma(v)\left(t-\frac{v.x}{c^2}\right)\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} u'_x &=& \frac{u_x-v}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \\ u'_{y,z} &=& \frac{u_{y,z}}{\gamma(v)\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\end{array}\right.$$

TL inversa:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \gamma(v)\,(x'+vt') \\ y &=& y' \\ z &=& z' \\ t &=& \gamma(v)\left(t'+\frac{v.x'}{c^2}\right)\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} u_x &=& \frac{u'_x+v}{\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)} \\ u_{y,z} &=& \frac{u'_{y,z}}{\gamma(v)\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)}\end{array}\right.$$

$$\vec{p} = \gamma(u) m_0 \vec{u} \qquad E = \gamma(u) m_0 c^2$$

$$E = K + m_0 c^2 \qquad E^2 = (pc)^2 + \left(m_0 c^2\right)^2$$

$$\gamma^2_{(u)} u^2 = \left(\gamma^2_{(u)} - 1\right) c^2 \qquad m(u) = \gamma(u) m_0$$

Formulário (cont.):

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};\ \ k = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0};\ \ \gamma = \frac{\rho}{m}$$

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi);\ \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right); \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi(\Omega));$$

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2}}; \tan\varphi(\Omega) = -\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$$

$$Q = \frac{A(\omega_0)}{A(0)}; Q = \frac{\omega_0}{\gamma}; \tau_d = \gamma^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

$$y(x,t) = A\ \cos(kx \mp \omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{\omega}{k};\ \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f};\ k = \frac{2\pi}{\lambda}; v = \lambda.f$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}};\ I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2;\ k_n = n\frac{\pi}{L};\ k_n = (2n+1)\frac{\pi}{2L}$$

$$\cos(kx \pm \omega t) = \cos(kx)\cos(\omega t) \mp \text{sen}(kx)\text{sen}(\omega t)$$

$$\text{sen}(kx \pm \omega t) = \text{sen}(kx)\cos(\omega t) \pm \text{sen}(\omega t)\cos(kx)$$

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right).\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

$$f = f_0\frac{\left(1\pm\frac{u}{v_s}\right)}{\left(1\mp\frac{V}{v_s}\right)} \quad \left\{\begin{array}{l} u \rightarrow \text{observador} \\ V \rightarrow \text{fonte}\end{array}\right.$$

$$f = f_0\frac{\sqrt{1\mp\frac{v}{c}}}{\sqrt{1\pm\frac{v}{c}}}\ ;\ \text{sen}\,\alpha = \frac{v_s}{V}$$

Q1 - Considere que a suspensão de um carro de massa $M = 800$ kg é composta por quatro molas ideais (uma em cada roda), cada uma de constante elástica k. Deseja-se projetar o carro de forma que a variação de altura do carro em relação ao solo, com carga máxima e sem carga, seja de 10 cm. Considere que a previsão de carga máxima é de 5 passageiros de 80 kg cada.

(a) [0,75] Calcule o valor de k para satisfazer as exigências do projeto.

(b) [0,5] Nesse caso, qual a frequência de ressonância da suspensão para o carro vazio?

(c) [0,5] Calcule a frequência de ressonância da suspensão para o carro com carga máxima.

(d) [0,75] Calcule o valor da constante de amortecimento necessária por mola para que o sistema apresente amortecimento *supercrítico* para qualquer valor de carga entre vazio e carga máxima.

Solução Q1:

a) Sendo o carro suspenso por quatro molas em paralelo, a constante de mola equivalente será $K = 4k$. Se as molas são comprimidas por $\Delta x = 0,1$ m quando a massa passa de M para $M + \Delta m$ onde $\Delta m = 5.80 = 400$ kg, temos:

$$K.\Delta x = \Delta m.g \Rightarrow K = \frac{400.10}{0,1} = 40000 \text{ N/m}$$

Logo $\boxed{k = K/4 = 10000 \text{ N/m}}$

b) Para o carro vazio, temos $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{40000}{800}} = 5\sqrt{2}$ rad/s. Ou seja, $f_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2\pi}$ Hz.

c) Para o carro cheio, temos $\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M+\Delta m}} = \sqrt{\frac{40000}{1200}} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ rad/s. Ou seja, $f_2 = \frac{5\sqrt{3}}{3\pi}$ Hz.

d) Amortecimento supercrítico: $\gamma > 2\omega_0$ onde $\gamma = \rho/M$.

Variando a massa, γ e ω_0 mudam. Para o caso vazio, temos $\gamma_1 > 2\omega_1 = 10\sqrt{2}$ s^{-1}.

Para cada mola: $\rho_1 > \frac{800}{4}10\sqrt{2} = 2000\sqrt{2}$ kg/s (por mola).

Para o caso cheio, temos $\gamma_2 > 2\omega_2 = \frac{20}{3}\sqrt{3}$ s^{-1}.

Para cada mola: $\rho_2 > \frac{1200}{4}\frac{20}{3}\sqrt{3} = 2000\sqrt{3}$ kg/s (por mola).

Logo, precisamos tomar o maior valor entre ρ_1 e ρ_2, ou seja, $\boxed{\rho = 2000\sqrt{3} \text{ kg/s (por mola)}}$

Q2 - Uma corda presa em ambas as extremidades oscila de acordo com a equação:

$$y(x,t) = 3\ \mathrm{sen}(\pi x)\cos(4\pi t)$$

onde x e y estão expressos em metros e t em segundos.

(a) [0,5] Determine o comprimento de onda, frequência e velocidade da onda na corda.

(b) [0,5] Determine a distância entre dois ventres consecutivos da onda.

(c) [0,5] Se $y_1(x,t)$ descreve uma onda que se propaga na corda para a *direita* (sentido x positivo) e $y_2(x,t)$ é uma onda que se propaga para a *esquerda* com mesma amplitude, encontre as expressões para $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ de modo que $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$.

Se a corda oscila no 3o harmônico e tem massa $m = 300$ g:

(d) [0,5] Calcule o comprimento L da corda.

(e) [0,5] Calcule a tensão na corda.

Solução Q2:

a) Escrevendo $y(x,t) = (2A)\ \mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$, temos $k = \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2$ m. $\omega = 4\pi = 2\pi f \Rightarrow f = 2$ Hz.

Como $v = \lambda.f$, temos $v = 4$ m/s

b) A distância entre ventres consecutivos é igual à distância entre dois nós, que será igual a meio comprimento de onda. Logo $d = \lambda/2 = 1$ m.

c) A forma geral para as ondas é $y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi_1)$ e $y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \phi_2)$. Para se obter $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = (2A)\ \mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$, é necessário que $\phi_1 = \phi_2 = -\pi/2$ de modo que.

$$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t - \pi/2) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) = A\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t) - A\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(kx)$$

$$y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t - \pi/2) = A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t) = A\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t) + A\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(kx)$$

Logo: $\boxed{y_1(x,t) = 1,5\,\mathrm{sen}(\pi x - 4\pi t) \text{ e } y_2(x,t) = 1,5\,\mathrm{sen}(\pi x + 4\pi t)}$

d) $k_n = \frac{n\pi}{L}$. Sendo $n = 3$ e $k = \pi$, temos $\boxed{L = 3 \text{ m}}$.

e) Sendo $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \frac{m.v^2}{L} = \frac{(0,3).16}{3} = 1,6$ N. $\boxed{T = 1,6 \text{ N}}$

Q3 - Um morcego se move com velocidade de magnitude 4 m/s e emite sons ("gritos") de frequência 42 kHz. Esses sons atingem obstáculos no ambiente (paredes, insetos, etc.) e voltam na forma de ecos, funcionando como um "sonar". Assuma que a velocidade do som no ar é de 340 m/s.

(a) [0,5] O morcego se aproxima de uma parede onde está preso um microfone. Calcule a frequência do som capturado pelo microfone.

(b) [0,5] O som é refletido pela parede de volta ao morcego. Calcule a frequência desse som refletido capturado pelos ouvidos do morcego.

(c) [0,5] Calcule a frequência do batimento produzido pela interferência entre o som emitido pelo morcego e o som refletido pela parede, medida na posição do morcego.

(d) [1,0] O morcego usa seu sonar para tentar capturar uma mosca. Ele se aproxima da mosca e recebe de volta um eco com 43 kHz. Determine qual a magnitude da velocidade da mosca. (Dica: assuma, inicialmente, que a mosca está se afastando do morcego).

Solução Q3:

a) Fonte (morcego) se aproxima com $V = 4$ m/s, observador parado: Desvio Doppler dado por $f = \frac{f_0}{(1-V/v_s)} = \frac{42.340}{336} = \frac{340}{8} = \frac{85}{2}$ Hz.

Logo, $\boxed{f = 42,5 \text{ kHz}}$.

b) Fonte (parede) parada emite $f = 42,5$ Hz, observador (morcego) se aproxima com $V = 4$ m/s: Desvio Doppler dado por $f_1 = f\,(1 + V/v_s) = (42,5).\frac{344}{340} = \frac{344}{8} = 43$ Hz.

Logo, $\boxed{f_1 = 43 \text{ kHz}}$.

c) Frequência de batimento medida pelo morcego: $\boxed{\Delta f = f_1 - f_0 = 1 \text{ kHz}}$

d) Supondo que a mosca se afasta do morcego com velocidade u e o morcego se aproxima com velocidade V, temos:

Frequência na posição da mosca: $f_m = f_0 \frac{(1-u/v_s)}{(1-V/v_s)}$

Frequência do som refletido, medida na posição do morcego: $f_M = f_m \frac{(1+V/v_s)}{(1+u/v_s)}$

Logo: $f_M = f_0 \frac{(v_s+V)}{(v_s-V)} \frac{(v_s-u)}{(v_s+u)} = \frac{42\times344}{336} \frac{(340-u)}{(340+u)} = 43 \frac{(340-u)}{(340+u)}$

Usando $f_M = 43$ Hz e resolvendo para u, temos $(340 - u) = (340 + u) \Rightarrow \boxed{u = 0}$. Ou seja, a mosca está parada.

Q4 -Um observador na Terra (S) vê duas espaçonaves idênticas A e B que se movem na direção x no sentido positivo.

(a) [0,5] O observador na Terra nota que o piloto da nave A possui um relógio atômico idêntico ao seu. Porém, enquanto que S mede um intervalo de tempo de 5s em seu relógio, no relógio do piloto de A passam-se apenas 4s. Calcule a velocidade v_A de A em relação a S.

(b) [0,5] O piloto da nave A nota que a nave B é idêntica à sua (mesma marca, modelo etc.). Porém, ao medir o comprimento da nave B, ele (A) observa que esse comprimento é de apenas 3/5 do comprimento da sua nave. Qual deve ser, então, a velocidade de B com relação a A?

(c) [0,5] Calcule a velocidade de B em relação ao observador S.

(d) [0,5] Se a massa de repouso das espaçonaves é M_0, calcule o momento e a energia relativística da nave A no referencial do observador S.

(e) [0,5] Em um dado instante, a nave A recolhe um container que flutuava no espaço, em repouso no referencial de S. Após a operação de captura do container, a velocidade da nave A, medida por S,reduz para $v_{AF} = \frac{c}{2}$. Qual a massa de repouso do container?

Solução Q4:

a) Usando dilatação do tempo de A com relação a S, temos que $\Delta t(S) = \gamma(v_A)\Delta t(A)$, com $\Delta t(S) = 5\text{s}$ e $\Delta t(A) = 4\text{s}$. Portanto, $\gamma(v_A) = 5/4$, o que leva a $\boxed{v_A = 3c/5}$.

b) Como o comprimento medido por A é L_A e o comprimento próprio da nave é L', temos $L = \frac{3}{5}L'$. Logo, o fator de Lorentz é $\gamma(u'_B) = 5/3$. Portanto, $\boxed{u'_B = 4c/5}$.

c) Como a velocidade de B em relação a A é $u'_B = 4c/5$, então a velocidade de B em relação a S será dada pela TL inversa:

$$u_B = \frac{u'_B + v_A}{1 + \frac{v_A . u'_B}{c^2}} = \frac{7c}{5} . \frac{25}{37} = \frac{35c}{37}$$

d) Como $\gamma_A = 5/4$, temos:

Energia: $\boxed{E_A = \gamma_A M_0 c^2 = \frac{5}{4} M_0 c^2}$ Momento: $\boxed{p_A = \gamma_A M_0 v_A = \frac{5}{4} M_0 \frac{3c}{5} = \frac{3}{4} M_0 c}$

e) Seja m a massa do container e M_1 a massa do conjunto nave A+container. Aplicando a conservação de momento e energia antes e depois da captura do container:

$\gamma_F M_1 c^2 = \frac{5}{4} M_0 c^2 + mc^2 \Rightarrow \gamma_F M_1 = \frac{5}{4} M_0 + m \quad (1)$

$\gamma_F M_1 \frac{c}{2} = \frac{3}{4} M_0 c \quad (2)$

Substituindo (1) em (2): $m\frac{c}{2} = \frac{3}{4} M_0 c - \frac{5}{8} M_0 c = \frac{1}{8} M_0 c \Rightarrow \boxed{m = \frac{M_0}{4}}$