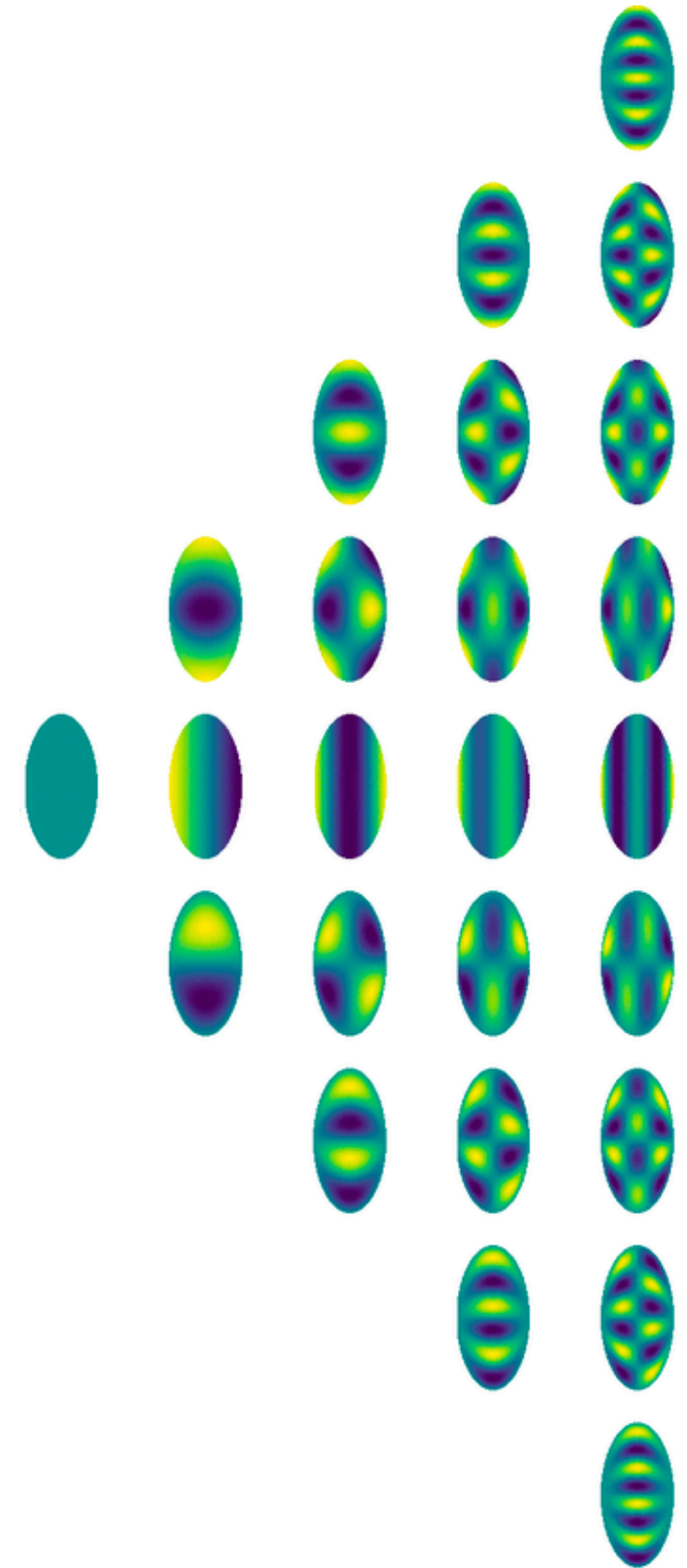

Eletromagnetismo 1

⚡ **Expansão multipolar: exemplos e exercícios**

⚡ **Energia na expansão multipolar**



Expansão Multipolar

- Na aula passada vimos que, em problemas com simetria axial, podemos expandir o potencial em termos dos polinômios de Legendre e suas funções radiais associadas, de forma que:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell} (A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos \theta)$$

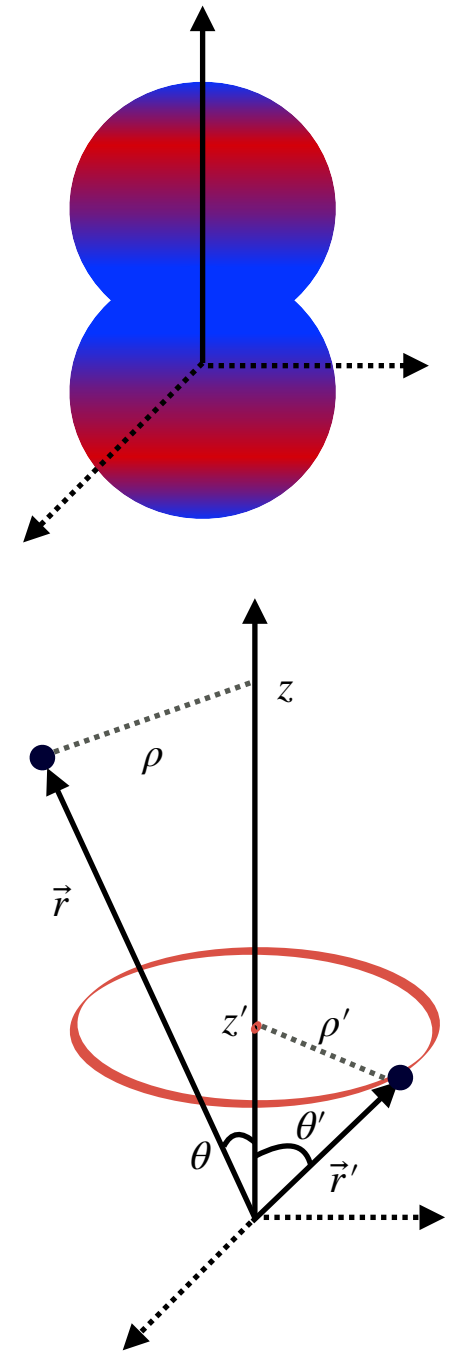
$$(*) \quad = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{r}') \sum_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') P_{\ell}(\cos \theta)$$

- Também mostramos, por um método "indireto", que o potencial elétrico de um anel muito fino, com carga dq , centrado num ponto qualquer z' ao longo do eixo z :

$$(**) \quad d\phi(r, \theta) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{>}} \sum_{\ell} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta') P_{\ell}(\cos \theta)$$

onde $r_{<} = r'$, $r_{>} = r$ se $r' < r$ e $r_{<} = r$, $r_{>} = r'$ se $r < r'$

- Agora vamos resolver alguns exercícios usando essas duas expressões. Mas primeiro, vamos conectá-las por meio de um cálculo direto — ou seja, vamos re-derivar a expressão para o potencial do anel (***) partindo da expressão geral (*).



Expansão Multipolar

- Vamos aplicar a expressão geral:

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{r}') \sum_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') P_{\ell}(\cos \theta)$$

no caso de um anel fino com carga q .

- Vamos assumir que o anel está na posição $z' \rightarrow z_0$, com raio $\rho' \rightarrow \rho_0$, e portanto num ângulo $\theta' \rightarrow \theta_0$ e a uma distância $r' \rightarrow r_0$ da origem. A densidade de carga é então dada por:

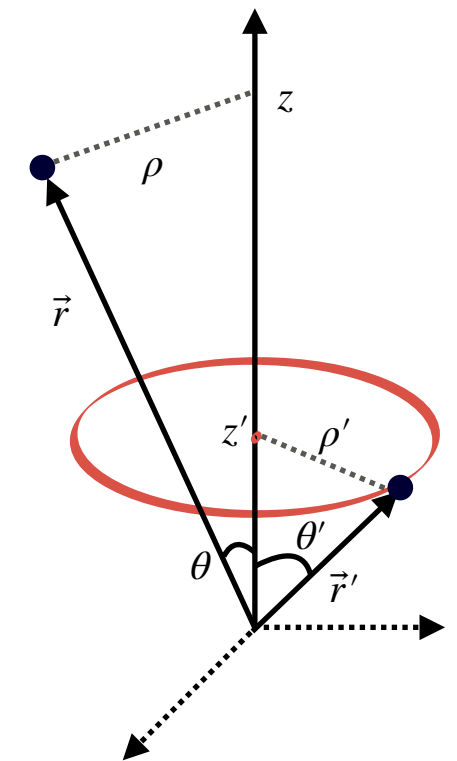
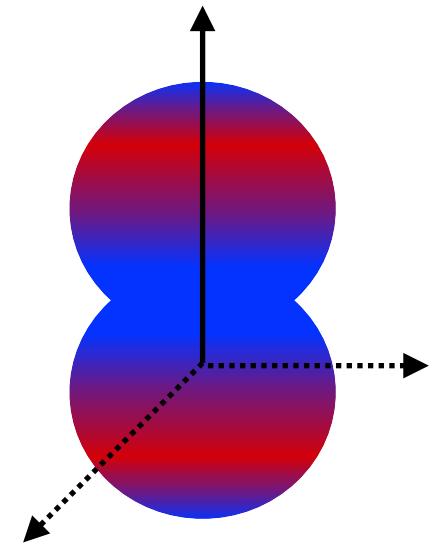
$$\rho(r', \theta') = q \frac{\delta(r' - r_0)}{2\pi r_0^2} \delta(\cos \theta' - \cos \theta_0)$$

Você pode verificar diretamente que a integral no volume dessa densidade de cargas é q :

$$\begin{aligned} \int d^3x' \rho(r', \theta') &= \int_0^{\infty} dr' r'^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \rho(r', \theta') = q \\ &= \int_{r_0-\epsilon_1}^{r_0+\epsilon_1} dr' r'^2 \int_{\cos \theta_0-\epsilon_2}^{\cos \theta_0+\epsilon_2} d(\cos \theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \rho(r', \theta') = q \end{aligned}$$

- Substituindo a expressão para a densidade de carga no potencial acima temos:

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} dr' r'^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \left[q \frac{\delta(r' - r_0)}{2\pi r_0^2} \delta(\cos \theta' - \cos \theta_0) \right] \sum_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') P_{\ell}(\cos \theta)$$



Expansão Multipolar

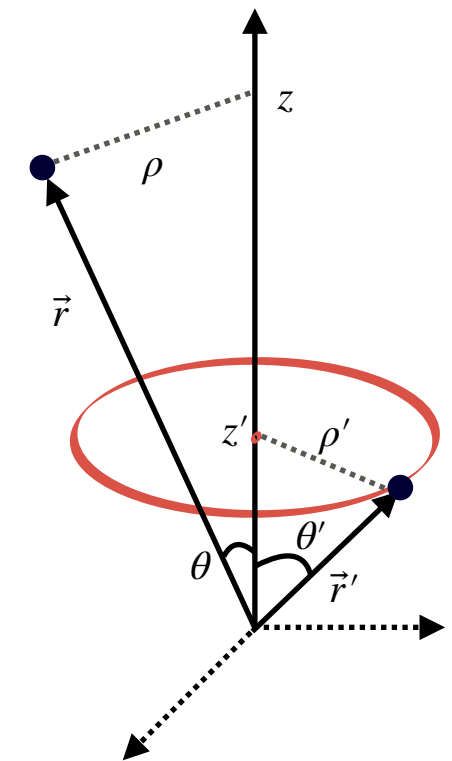
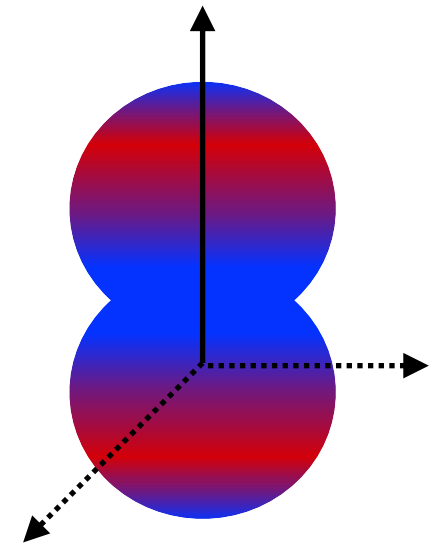
- A expressão é longa, mas cada parte dela é muito simples:

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr' r'^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \left[q \frac{\delta(r' - r_0)}{2\pi r_0^2} \delta(\cos \theta' - \cos \theta_0) \right] \sum_\ell \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta') P_\ell(\cos \theta) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr' r'^2 \frac{\delta(r' - r_0)}{r_0^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 d(\cos \theta') \delta(\cos \theta' - \cos \theta_0) \sum_\ell \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta') P_\ell(\cos \theta) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_\ell \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta_0) P_\ell(\cos \theta) \end{aligned}$$

onde agora, claramente, $r_{<} = r_0$, $r_{>} = r$ se $r_0 < r$ e $r_{<} = r$, $r_{>} = r_0$ se $r > r_0$

- Então, como esperado, recuperamos a expressão original.
- Em alguns problemas vai valer a pena escrever a densidade de cargas em termos de anéis; em outros, será mais interessante usar diretamente a expressão de $\rho(r', \theta')$ e integrar no volume d^3x' .
- E em alguns problemas, de condições de contorno, vamos retornar à expressão para o potencial em termos de:

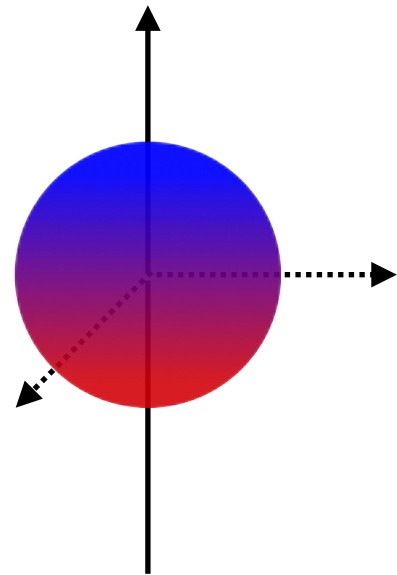
$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-1-\ell}) P_\ell(\cos \theta)$$



Exercício 1: esfera com densidade “dipolar”

- Considere uma esfera sólida de raio R_0 , com densidade de carga $\rho_0 \cos \theta'$. Calcule o potencial e o campo elétrico dentro e fora da esfera.
- Podemos resolver esse problema de dois modos, mas neste caso o mais direto deve ser a integral no volume:

$$\begin{aligned}\phi(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{r}') \sum_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') P_{\ell}(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} dr' r'^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' [\rho_0 \cos \theta'] \sum_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') P_{\ell}(\cos \theta)\end{aligned}$$



- A parte mais relevante dessa integral é a parte angular. Ela nos dá:

$$\int_{-1}^1 d\mu' \mu' P_{\ell}(\mu') = \int_{-1}^1 d\mu' P_1(\mu') P_{\ell}(\mu') = \frac{2}{3} \delta_{\ell 1}, \quad \text{onde usamos } \int_{-1}^1 d\mu P_{\ell}(\mu) P_{\ell'}(\mu) = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell \ell'}$$

- Portanto, na soma sobre todos os ℓ o único termo que sobrevive é o dipolo, $\ell = 1$, e assim:

$$\phi = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cos \theta \int_0^{R_0} dr' r'^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2}$$

Exercício 1: esfera com densidade “dipolar”

- Finalmente, temos agora o potencial em termos de uma integral radial:

$$\phi = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cos \theta \int_0^{R_0} dr' r'^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2}$$

- Devemos prestar atenção na expressão acima, pois temos três situações possíveis:

(1a) Dentro da esfera $r' < r \leq R_0 \Rightarrow r_{<} = r', r_{>} = r$

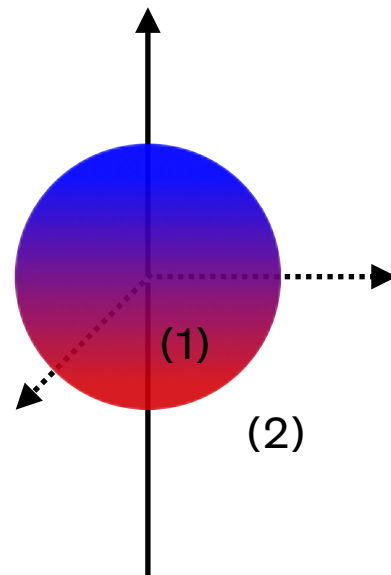
(1b) Dentro da esfera $r < r' \leq R_0 \Rightarrow r_{<} = r, r_{>} = r'$

(2) Fora da esfera $r' \leq R_0 < r \Rightarrow r_{<} = r', r_{>} = r$

- Isso significa que a integral radial deve ser quebrada em duas partes:

$$\phi = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cos \theta \left[\int_0^r dr' r'^2 \frac{r'}{r^2} + \int_r^{R_0} dr' r'^2 \frac{r}{r'^2} \right] \quad \text{se } r < R_0$$

$$\phi = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cos \theta \int_0^{R_0} dr' r'^2 \frac{r'}{r^2} \quad \text{se } r > R_0$$



Exercício 1: esfera com densidade “dipolar”

- No caso em que estamos **dentro** da esfera temos portanto:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cos \theta \left[\int_0^r dr' r'^2 \frac{r'}{r^2} + \int_r^{R_0} dr' r'^2 \frac{r}{r'^2} \right] \\ &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cos \theta \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{4} r'^4 \right)_0^r + r (r')_r^{R_0} \right] = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cos \theta \left[\frac{1}{4} r^2 + r (R_0 - r) \right]\end{aligned}$$

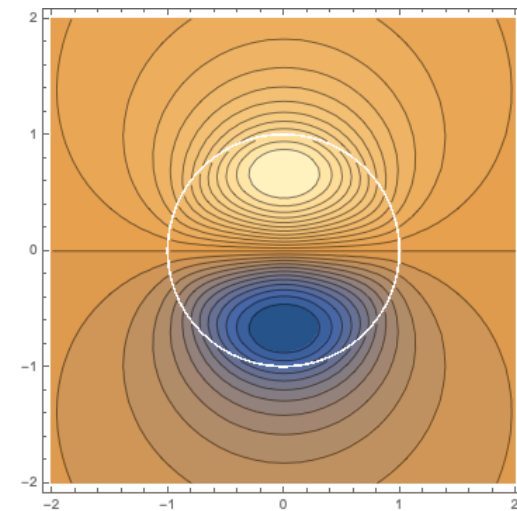
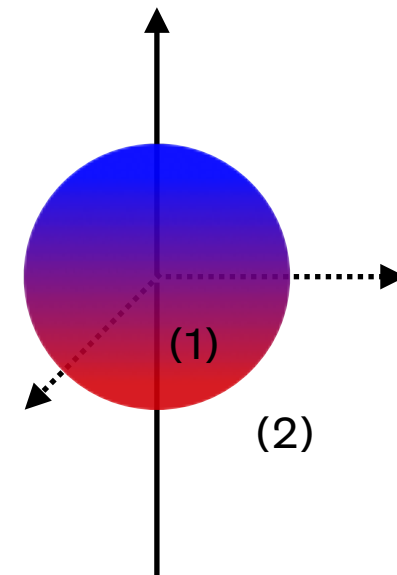
- No caso em que estamos **fora** da esfera temos apenas o primeiro termo, mas nos limites de integração $0 \leq r' \leq R_0$:

$$\phi = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cos \theta \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{4} r'^4 \right)_0^{R_0} \right] = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cos \theta \frac{1}{4} \frac{R_0^4}{r^2}$$

- Note que o **potencial é contínuo** em $r = R_0$. O campo elétrico, por outro lado, é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi = -\hat{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \Rightarrow \vec{E} &= \hat{r} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cos \theta \left[\frac{3}{2} r - R_0 \right] + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \sin \theta \left[\frac{1}{4} r^2 + r (R_0 - r) \right] \quad \text{se } r < R_0 \\ \Rightarrow \vec{E} &= \hat{r} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cos \theta \left[\frac{1}{2} \frac{R_0^4}{r^3} \right] + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \sin \theta \left[\frac{1}{4} \frac{R_0^4}{r^2} \right] \quad \text{se } r > R_0\end{aligned}$$

- Note que o **campo elétrico também é contínuo!** Mas é claro — como não temos cargas de superfície, é necessário que $\Delta E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0 = 0$, e $\Delta \vec{E}_{\parallel} = 0$ como consequência do fato que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, portanto temos que $\Delta \vec{E} = 0$ através da superfície $r = R_0$.
- Note também que o campo elétrico cai como $\sim 1/r^3$ — o que também deveria ser evidente: esse sistema tem **carga líquida nula!** Portanto o primeiro termo não-trivial é o **dipolo**, que, como vimos anteriormente, tem um potencial que vai como $\sim 1/r^2$, e um campo elétrico que decai com $\sim 1/r^3$.



Exercício 2: disco fino

- Considere um disco muito fino, de raio R_0 , com densidade superficial de carga constante σ_0 . Calcule o potencial e o campo elétrico.
- Podemos resolver esse problema de dois modos, mas o mais direto seria uma superposição de anéis — assim como fizemos no caso do cone.
- Um anel de raio r' e espessura dr' tem uma área $dA' = 2\pi r' dr'$, e portanto uma carga $dq = \sigma_0 dA'$.
- Além disso, o disco está num ângulo $\theta' = \pi/2$, e portanto $\cos \theta' = 0$.
- Juntando esses dois fatos, o potencial de um desses anéis é:

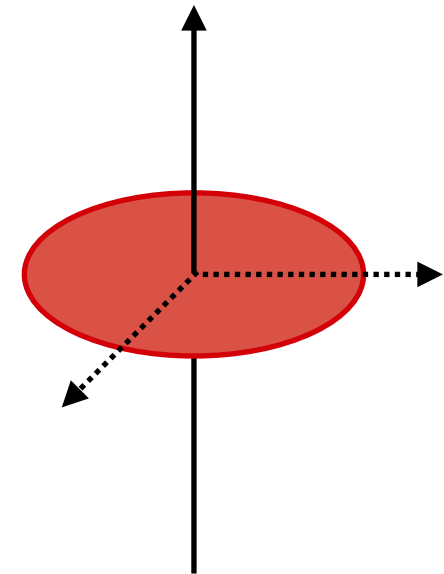
$$\begin{aligned}d\phi(r, \theta) &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') P_{\ell}(\cos \theta) \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} dr' r' \sum_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(0) P_{\ell}(\cos \theta)\end{aligned}$$

- Primeiramente, note uma propriedade importante dos polinômios de Legendre, que está citada na lista de exercícios:

$$P_{\ell}(0) = \frac{(-1)^{\ell/2}}{2^{\ell}} \frac{\ell!}{[(\ell/2)!]^2} \quad \text{para } \ell \text{ pares, e } P_{\ell}(0) = 0 \quad \text{para } \ell \text{ ímpares.}$$

- Agora só temos de integrar isso, desde $r' = 0$ até $r' = R_0$. Temos então:

$$\phi = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \sum_{\ell=0,2,4,\dots} P_{\ell}(0) P_{\ell}(\cos \theta) \int dr' r' \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}}$$



Exercício 2: disco fino

- Vamos re-escrever o nosso resultado anterior aqui:

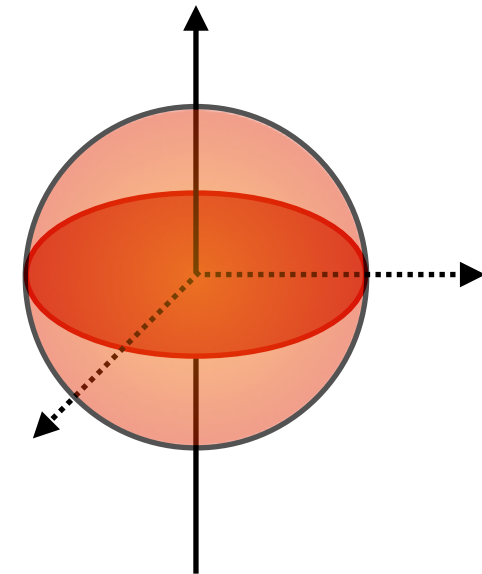
$$\phi = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \sum_{\ell=0,2,4,\dots} P_\ell(0) P_\ell(\cos\theta) \int dr' r' \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}}$$

- Assim como no caso do cone e das calotas, a integral radial precisa ser quebrada em partes: $r < r'$ e $r > r'$. Vamos considerar separadamente os casos $r < R_0$ e $r > R_0$.
- Vamos considerar primeiro o caso $r < R_0$. Temos então:

$$\begin{aligned} \int dr' r' \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} &\rightarrow \int_0^r dr' r' \frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} + \int_r^{R_0} dr' r' \frac{r'^\ell}{r'^{\ell+1}} \\ &= \frac{1}{r^{\ell+1}} \frac{1}{\ell+2} (r'^{\ell+2})_0^r + r^\ell \frac{1}{1-\ell} (r'^{1-\ell})_r^{R_0} \\ &= \frac{r}{\ell+2} + \frac{1}{1-\ell} \left(\frac{r^\ell}{R_0^{\ell-1}} - r \right) = r \frac{2\ell+1}{(\ell+2)(\ell-1)} \left[1 - \frac{\ell+2}{2\ell+1} \frac{r^\ell}{R_0^\ell} \right] \end{aligned}$$

- Agora vamos considerar o caso $r > R_0$. Temos:

$$\int dr' r' \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} \rightarrow \int_0^{R_0} dr' r' \frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} = \frac{1}{r^{\ell+1}} \frac{R_0^{\ell+2}}{\ell+2}$$



Verifique que o potencial é contínuo em $r = R_0$!

Exercício 2: disco fino

- Temos, portanto os resultados:

$$\phi = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \sum_{\ell=0,2,4,\dots} P_\ell(0) P_\ell(\cos \theta) r \frac{2\ell + 1}{(\ell + 2)(\ell - 1)} \left[1 - \frac{\ell + 2}{2\ell + 1} \frac{r^\ell}{R_0^\ell} \right] \quad r \leq R_0 \quad \text{e}$$

$$\phi = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \sum_{\ell=0,2,4,\dots} P_\ell(0) P_\ell(\cos \theta) \frac{1}{\ell + 2} \frac{R_0^{\ell+2}}{r^{\ell+1}} \quad r \geq R_0$$

- Esse potencial está mostrado na figura ao lado — os contornos (“curvas de nível”) são as linhas equipotenciais.
- Um **limite** interessante que deveríamos recuperar é o do **plano infinito**: na região muito próxima ao disco, e em particular perto do centro do disco, devemos obter o potencial de um plano infinito com densidade de carga σ_0 , ou seja, $\vec{E} = \pm \sigma_0 / (2\epsilon_0) \hat{z}$, portanto $\phi = -\sigma_0 / (2\epsilon_0) |z|$.
- De fato, também podemos chegar nesse limite tomando $R_0 \rightarrow \infty$ na expressão acima no caso $r \leq R_0$. Temos então:

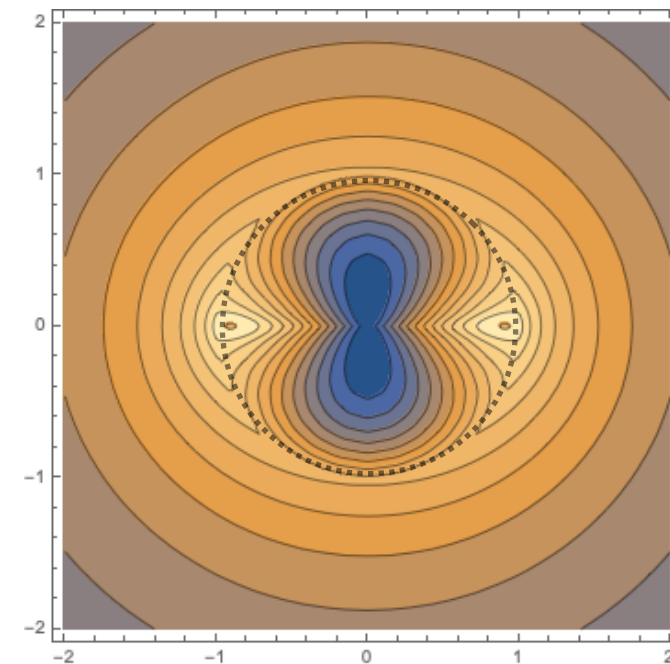
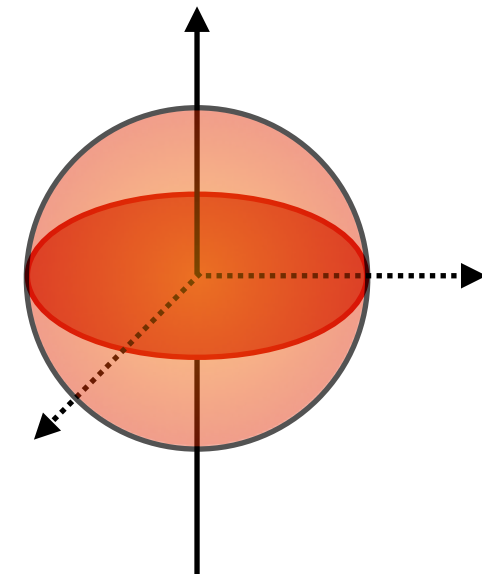
$$\phi(R_0 \rightarrow \infty) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} r \sum_{\ell=0,2,4,\dots} P_\ell(0) P_\ell(\cos \theta) \frac{2\ell + 1}{(\ell + 2)(\ell - 1)}$$

- Mas essa soma é uma expressão análoga a um resultado que obtivemos no caso do cone, de fato:

$$\sum_{\ell=0,2,4,\dots} P_\ell(0) P_\ell(\mu) \frac{2\ell + 1}{(\ell + 2)(\ell - 1)} = -|\mu|$$

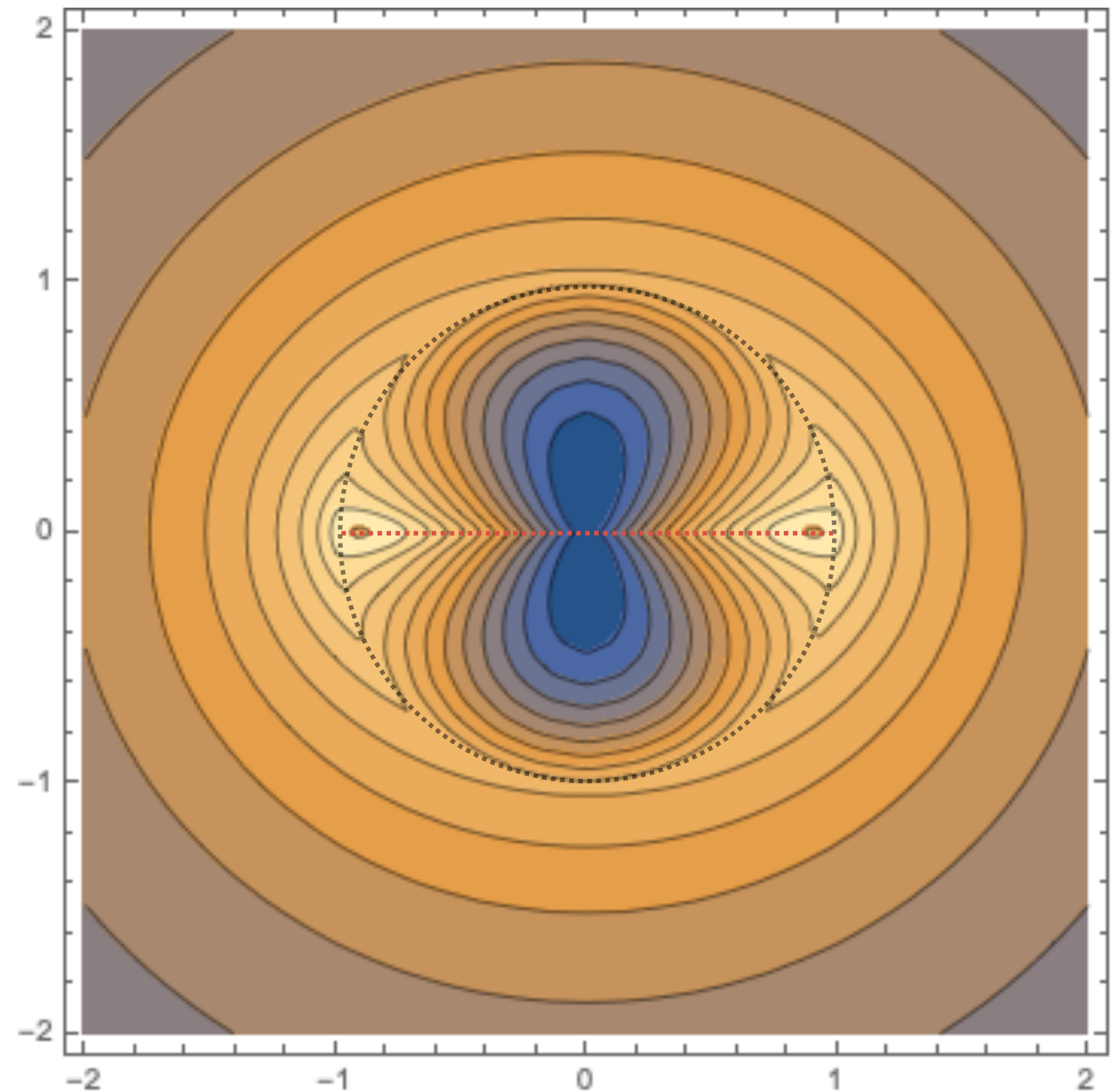
e portanto chegamos em:

$$\phi(R_0 \rightarrow \infty) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} r |\cos \theta| = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} |z| \quad !!!$$



Exercício 2: disco fino

- Vamos ver novamente esse potencial, porque ele é bastante interessante.
- Olhando esse potencial, onde temos as maiores diferenças de potencial — e portanto os campos elétricos mais fortes?
- Procure pelos locais onde as **derivadas** do potencial são mais fortes



Exercício 3: calotas com cargas opostas

- Considere duas calotas semi-esféricas de raio R_0 , com densidades superficiais de carga opostas: $+\sigma_0$ na calota de cima e $-\sigma_0$ na calota de baixo. Calcule o potencial e o campo elétrico dentro e fora dessa casca esférica.
- Podemos resolver esse problema de dois modos, tanto em termos de uma superposição de anéis quanto da integral da densidade de carga.
- No caso, talvez seja mais direto usar a integral. Podemos expressar a densidade de carga dessas duas calotas como:

$$\rho(r', \cos \theta') = \sigma(\cos \theta') \delta(r' - R_0) \quad , \quad \text{com} \quad \sigma(\cos \theta') = \sigma_0 [\theta_H(\cos \theta') - \theta_H(-\cos \theta')]$$

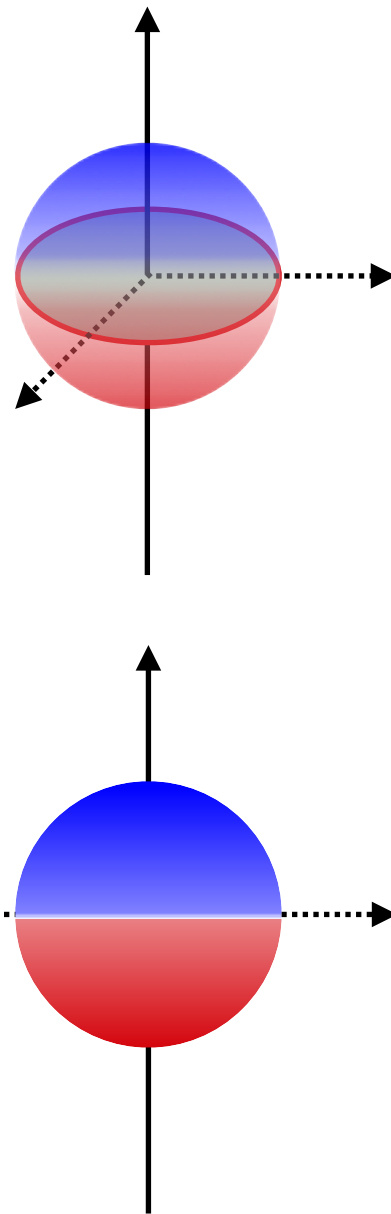
onde a função-degrau θ_H garante que obtemos $+\sigma_0$ quando $\cos \theta' > 0$ e $-\sigma_0$ quando $\cos \theta' < 0$.

- Agora basta substituir a expressão acima na integral:

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{r}') \sum_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') P_{\ell}(\cos \theta)$$

- Evidentemente, a parte radial dessa integral vai levar $r' \rightarrow R_0$, e dentro da esfera temos $r_{<} = r, r_{>} = R_0$, enquanto fora da esfera teremos $r_{<} = R_0, r_{>} = r$.
- Mas a parte mais complicada dessa integral é a parte angular. Temos:

$$\phi(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R_0^2 \sum_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \int_{-1}^1 d(\cos \theta') [\theta_H(\cos \theta') - \theta_H(-\cos \theta')] P_{\ell}(\cos \theta')$$



Exercício 3: calotas com cargas opostas

- Vamos repetir essa última expressão aqui:

$$\phi(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R_0^2 \sum_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \int_{-1}^1 d(\cos \theta') [\theta_H(\cos \theta') - \theta_H(-\cos \theta')] P_{\ell}(\cos \theta')$$

- Vamos nos concentrar nessa integral angular:

$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta') [\theta_H(\cos \theta') - \theta_H(-\cos \theta')] P_{\ell}(\cos \theta') = \int_0^1 d\mu' P_{\ell}(\mu') - \int_{-1}^0 d\mu' P_{\ell}(\mu')$$

- Evidentemente, qualquer polinômio de Legendre que seja uma função par de μ vai anular a integral acima. E de fato, para ℓ par, a função $P_{\ell}(\mu) = P_{\ell}(-\mu)$. De um modo mais geral, temos que:

$$P_{\ell}(-\mu) = (-1)^{\ell} P_{\ell}(\mu)$$

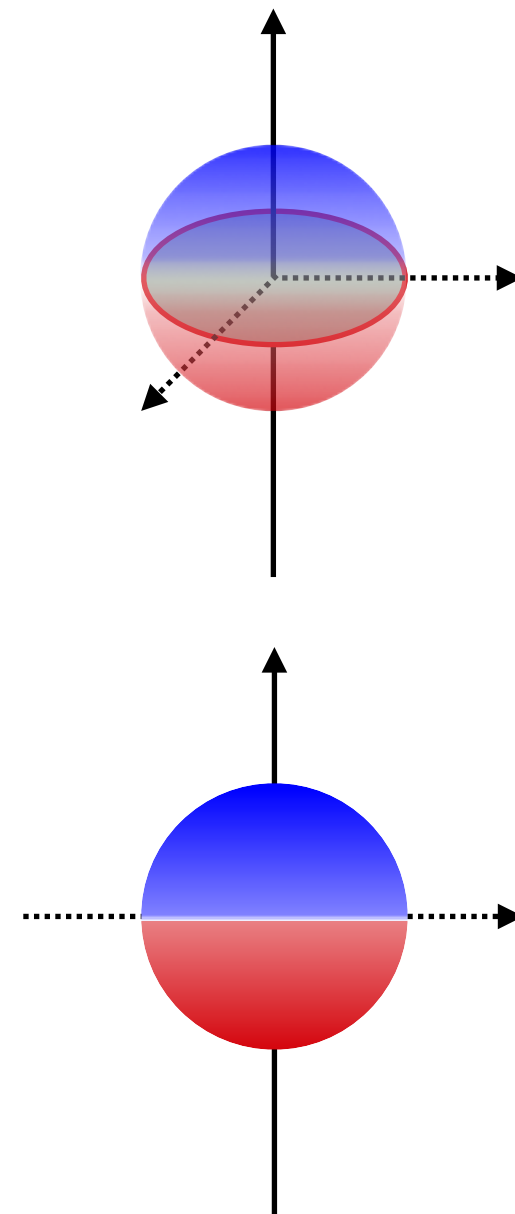
- Portanto, na integral acima só teremos os termos ímpares contribuindo, para os quais:

$$\int_0^1 d\mu' P_{\ell}(\mu') - \int_{-1}^0 d\mu' P_{\ell}(\mu') = \int_0^1 d\mu' P_{\ell}(\mu') - \int_1^0 d(-\mu') P_{\ell}(-\mu') = 2 \int_0^1 d\mu' P_{\ell}(\mu')$$

- Essa integral tem o resultado:

$$\int_0^1 d\mu' P_{\ell}(\mu') = \frac{1}{2\ell + 1} [P_{\ell-1}(0) - P_{\ell+1}(0)] \quad ,$$

onde, como citado acima, $P_{\ell}(0) = \frac{(-1)^{\ell/2} \ell!}{2^{\ell} [(\ell/2)!]^2}$ para valores pares de ℓ .



Exercício 3: calotas com cargas opostas

- Temos, portanto:

$$\phi(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R_0^2 \sum_{\ell=1,3,5,\dots} \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta) 2 \frac{1}{2\ell+1} [P_{\ell-1}(0) - P_{\ell+1}(0)]$$

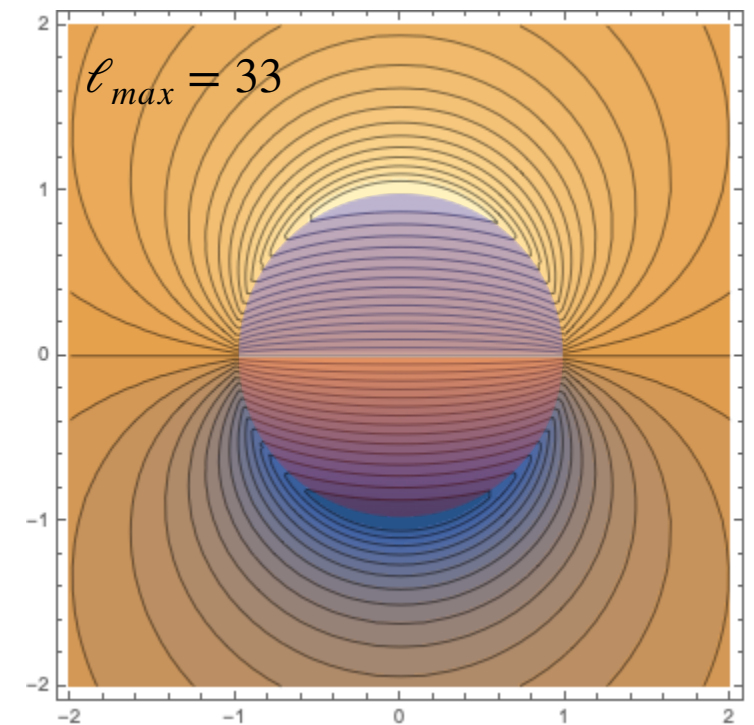
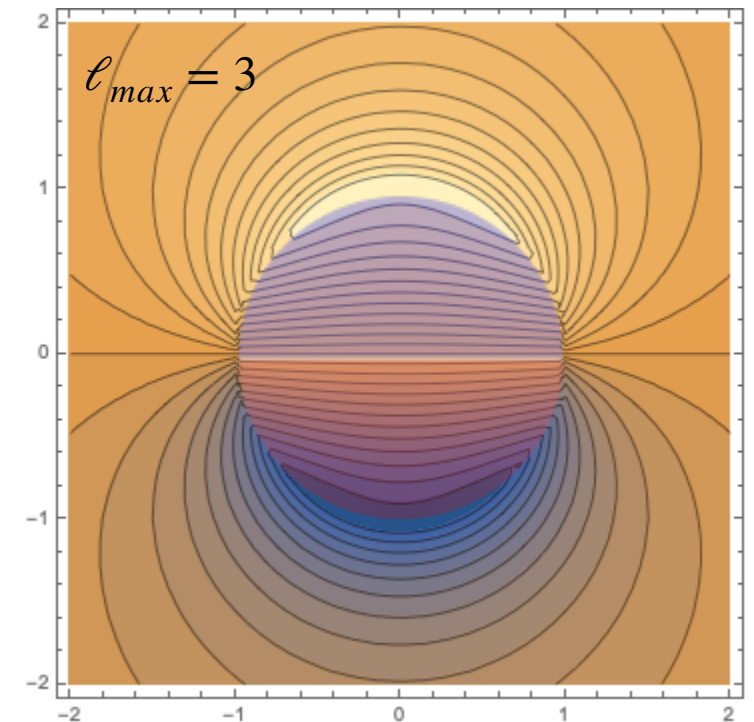
- Vamos escrever os primeiros termos dentro e fora da esfera. Dentro dela temos:

$$\phi(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left[r \cos \theta - \frac{1}{8} \frac{r^3}{R_0^2} P_3(\cos \theta) + \dots \right]$$

- Do lado de fora temos:

$$\phi(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left[\frac{R_0^2}{r} \cos \theta - \frac{1}{8} \frac{R_0^5}{r^3} P_3(\cos \theta) + \dots \right]$$

- Cada termo do potencial é claramente contínuo através de $r = R_0$ — de fato, as diferentes dependências angulares desses termos vinculam que as partes radiais sejam contínuas!
- Na figura ao lado mostramos o resultado quando truncamos a soma em $\ell_{max} = 3$ (acima) e quando vamos até $\ell_{max} = 33$ (abaixo).



Exercício 3: calotas com cargas opostas

- Também poderíamos ter resolvido esse problema em termos de uma superposição de anéis.
- A diferença principal é que desse modo somamos muitos anéis de raios diferentes, com cargas diferentes. A carga de cada anel que está num ângulo θ' é proporcional à área desse anel:

$$dq(\cos \theta') = \sigma(\cos \theta') (2\pi R_0 \sin \theta') \times R_0 d\theta'$$

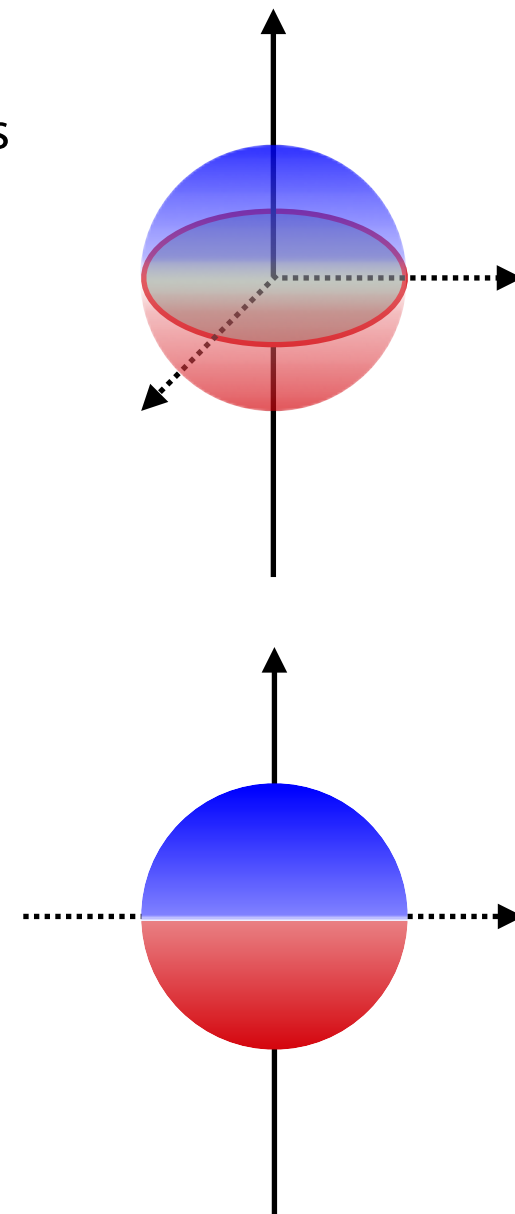
- Ou seja, o potencial de cada anel é:

$$d\phi(r, \theta) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') P_{\ell}(\cos \theta)$$

- Somando sobre todos os anéis (ou seja, integrando) temos:

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} [\sigma(\cos \theta') (2\pi R_0 \sin \theta') \times R_0 d\theta'] \sum_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') P_{\ell}(\cos \theta)$$

- Mas isso nos dá de volta a integral que obtivemos anteriormente, e o resto do cálculo é idêntico. Portanto, desse modo apenas trocamos 6 por meia dúzia, e o resultado é o mesmo.



Exercício 4: energia do campo elétrico

- A densidade de energia do campo elétrico é dada por:

$$\rho_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$$

- Vamos agora calcular a **energia total do campo elétrico**, usando a expansão multipolar. Nosso ponto de partida é a expressão:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell} + \phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-1} \right] P_{\ell}(\cos \theta)$$

- O campo elétrico é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi = \hat{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ &= \hat{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\ell \phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} - (\ell+1) \phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right] P_{\ell}(\cos \theta) + \hat{\theta} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} + \phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right] \frac{d}{d\theta} P_{\ell}(\cos \theta) \end{aligned}$$

- Usando o fato de que $\hat{r} \cdot \hat{r} = \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = 1$ e $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$ temos:

$$\begin{aligned} \vec{E}^2 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \left[\ell \phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} - (\ell+1) \phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right] \left[\ell' \phi_{\ell'}^{(in)} r^{\ell'-1} - (\ell'+1) \phi_{\ell'}^{(out)} r^{-\ell'-2} \right] P_{\ell}(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) \\ &\quad + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \left[\phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} + \phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right] \left[\phi_{\ell'}^{(in)} r^{\ell'-1} + \phi_{\ell'}^{(out)} r^{-\ell'-2} \right] \frac{d}{d\theta} P_{\ell}(\cos \theta) \frac{d}{d\theta} P_{\ell'}(\cos \theta) \end{aligned}$$

- Calma!! Tudo isso vai simplificar mais adiante

Exercício 4: energia do campo elétrico

- A energia do campo elétrico é dada, portanto, pela integral no volume:

$$\mathcal{E}_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3x \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_0}^{\infty} dr r^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \vec{E}^2$$

Substituindo a nossa expressão acima e integrando sobre o ângulo azimutal, $\int d\varphi \rightarrow 2\pi$, temos:

$$\mathcal{E}_E = \pi \epsilon_0 \int dr r^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \left[\ell \phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} - (\ell+1) \phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right] \left[\ell' \phi_{\ell'}^{(in)} r^{\ell'-1} - (\ell'+1) \phi_{\ell'}^{(out)} r^{-\ell'-2} \right] P_{\ell}(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) \right. \\ \left. + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \left[\phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} + \phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right] \left[\phi_{\ell'}^{(in)} r^{\ell'-1} + \phi_{\ell'}^{(out)} r^{-\ell'-2} \right] \frac{d}{d\theta} P_{\ell}(\cos \theta) \frac{d}{d\theta} P_{\ell'}(\cos \theta) \right\}$$

- Vamos começar computando a **integral angular** sobre θ — que também pode ser vista como uma integral em $\mu = \cos \theta$. Temos que:

$$(i) \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_{\ell}(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

$$(ii) \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \frac{d}{d\theta} P_{\ell}(\cos \theta) \frac{d}{d\theta} P_{\ell'}(\cos \theta) = \frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \quad [Demonstre! Dica: use integração por partes e a equação para os $P_{\ell}(\cos \theta)$]$$

- Devido a essas funções delta de Kronecker, $\delta_{\ell\ell'}$, uma das somas sobre ℓ e ℓ' desaparecem, e ficamos com a expressão muito mais simples:

$$\mathcal{E}_E = \pi \epsilon_0 \int dr r^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \left[\ell \phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} - (\ell+1) \phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right]^2 \frac{2}{2\ell+1} + \left[\phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} + \phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right]^2 \frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \right\}$$

Exercício 4: energia do campo elétrico

- Aqui está essa última expressão, novamente:

$$\mathcal{E}_E = \pi\epsilon_0 \int dr r^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \left[\ell \phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} - (\ell+1) \phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right]^2 \frac{2}{2\ell+1} + \left[\phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} + \phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right]^2 \frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \right\}$$

- Note que os **termos cruzados** dessa expressão, que misturam $\phi_{\ell}^{(in)}$ com $\phi_{\ell}^{(out)}$, **cancelam** — **como deveria!!** Temos portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_E &= \pi\epsilon_0 \int dr r^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \left[\left[\ell \phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} \right]^2 + \left[(\ell+1) \phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right]^2 \right] \frac{2}{2\ell+1} + \left[\left[\phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} \right]^2 + \left[\phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right]^2 \right] \frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \right\} \\ &= \pi\epsilon_0 \int dr r^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \left[\phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} \right]^2 \left[\frac{2\ell^2}{2\ell+1} + \frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \right] + \left[\phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right]^2 \left[\frac{2(\ell+1)^2}{2\ell+1} + \frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \right] \right\} \\ &= \pi\epsilon_0 \int dr r^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \left[\phi_{\ell}^{(in)} r^{\ell-1} \right]^2 [2\ell] + \left[\phi_{\ell}^{(out)} r^{-\ell-2} \right]^2 [2(\ell+1)] \right\} \end{aligned}$$

- Agora resta simplesmente fazer as integrais radiais, que são triviais!

Exercício 4: energia do campo elétrico

- Por simplicidade, vamos assumir que temos escalas R_{in} e R_{out} que separam a região "interior" e "exterior", de modo que para $r < R_{in}$ vale a solução apenas com os termos $\phi_\ell^{(in)}$, e para $r > R_{out}$ temos uma solução apenas com $\phi_\ell^{(out)}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_E &= \pi\epsilon_0 \int dr r^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \left[\phi_\ell^{(in)} r^{\ell-1} \right]^2 [2\ell] + \left[\phi_\ell^{(out)} r^{-\ell-2} \right]^2 [2\ell + 1] \right\} \\ &= \pi\epsilon_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ 2\ell \left[\phi_\ell^{(in)} \right]^2 \int_0^{R_{in}} dr r^2 r^{2\ell-2} [2\ell] + 2(\ell + 1) \left[\phi_\ell^{(out)} \right]^2 \int_{R_{out}}^{\infty} dr r^2 r^{-2\ell-4} \right\}\end{aligned}$$

- As integrais radiais nos dão:

$$(i) \int_0^{R_{in}} dr r^2 r^{2\ell-2} = \frac{1}{2\ell + 1} r^{2\ell+1} \Big|_0^{R_{in}} = \frac{1}{2\ell + 1} R_{in}^{2\ell+1}$$

$$(ii) \int_{R_{out}}^{\infty} dr r^2 r^{-2\ell-4} = -\frac{1}{2\ell + 1} r^{-2\ell-1} \Big|_{R_{out}}^{\infty} = \frac{1}{2\ell + 1} R_{out}^{-2\ell-1}$$

- Substituindo essas expressões obtemos finalmente:

$$\mathcal{E}_E = 2\pi\epsilon_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell + 1} \left\{ \ell \left[\phi_\ell^{(in)} \right]^2 R_{in}^{2\ell+1} + (\ell + 1) \left[\phi_\ell^{(out)} \right]^2 R_{out}^{-2\ell-1} \right\} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\mathcal{E}_\ell^{(in)} + \mathcal{E}_\ell^{(out)} \right]$$

- Ou seja, a energia total é a **soma das energias de cada multipolo, e separadamente para as partes de dentro e de fora!** Além disso, como esperado, o termo de monopolo ($\ell = 0$) da parte interna é nulo — afinal, uma densidade de carga homogênea gera um campo elétrico nulo na região interior!

Exercício 4: energia do campo elétrico

- Agora vamos assumir que temos uma única escala R_0 que separa a região "interior" da "exterior". Isso corresponde a uma esfera raio R_0 , na qual colocamos uma densidade de carga arbitrária, ou condições de contorno arbitrárias. Nesse caso, por **continuidade** do potencial, temos $\phi_\ell^{(in)} = \phi_\ell^{(out)} R_0^{-2\ell-1}$.
- Nesse caso, definindo por simplicidade $\phi_\ell^{(out)} = \phi_\ell$ temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_E &= 2\pi\epsilon_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} \left\{ \ell [\phi_\ell]^2 R_0^{-2\ell-1} + (\ell+1) [\phi_\ell]^2 R_0^{-2\ell-1} \right\} \\ &= 2\pi\epsilon_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} [\phi_\ell]^2 R_0^{-2\ell-1}\end{aligned}$$

- Esses resultados são análogos ao caso da expansão em modos de Fourier e do **teorema de Parseval**:

$$\phi(\vec{x}) \leftrightarrow \tilde{\phi}(\vec{k}) \quad \Longleftrightarrow \quad \int d^3x |\phi(\vec{x})|^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\tilde{\phi}(\vec{k})|^2$$

- Usando esse resultado, podemos mostrar também que, no caso de condições de contorno Cartesianas, em que decompos o potencial e o campo elétrico numa série de Fourier. Ao calcular a energia desse campo, em coordenadas Cartesianas, obtemos:

$$\mathcal{E}_E = \sum_{\vec{k}} \mathcal{E}_{\vec{k}} \quad [\text{Exercício: Demonstre esse resultado!}]$$

Próxima aula:

- Materiais dielétricos
- Cargas de polarização
- Meios lineares

- Leitura:

Griffiths, Cap. 4

Jackson, Caps. 2 e 3