

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – PIRASSUNUNGA

**ZEB1058 PESQUISA
OPERACIONAL E OTIMIZAÇÃO
DE SISTEMAS AGROPECUÁRIOS**



PROF. DR. FERNANDO L. CANEPPELE

PROF. DR. JOSÉ A. RABI

DEPTO. ENGENHARIA DE BIODISSISTEMAS

SIMPLEX – NÃO PADRÃO: MÉTODO DE DUAS FASES



- FASE 1 → FUNÇÃO-OBJETIVO ARTIFICIAL
- FASE 2 → FUNÇÃO-OBJETIVO ORIGINAL
- RESTRIÇÕES TIPO “PISO” (INEQUAÇÕES C/ “ \geq ”)

Método de 2 fases: restrições tipo “ \geq ”

- Fase 1: problema modificado \rightarrow outra função-objetivo
 - Zerar todas as variáveis artificiais \rightarrow função-objetivo artificial

$$\text{Min } w = \sum_i A_i \quad \Leftrightarrow \quad \text{Max } (-w) = -\sum_i A_i$$

- Exemplo: uma única variável artificial $A_1 \rightarrow \text{Max } (-w) = -A_1$

$$\left. \begin{array}{l} Z - 3x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 + A_1 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1 \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (-w) + A_1 = 0 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 + A_1 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1 \geq 0 \end{array} \right.$$



Fase 1: função-objetivo artificial

- Fase 1: solução do problema modificado

– Aplicação do Método Simplex

$$(-w) + A_1 = 0$$



$$x_1 + x_3 = 4$$

Por exemplo: na forma tabular



$$2x_2 + x_4 = 12$$

Quadro Simplex inicial:

$$3x_1 + 2x_2 - x_5 + A_1 = 18$$

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		$(-w)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$(-w)$	0	1	0	0	0	0	0	1	0
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	3	2	0	0	-1	1	18



Fase 1: função-objetivo artificial

- Inconsistência no Quadro Simplex inicial



Valor “1” aparece 2 vezes na coluna A_1 (variável básica)



Correção → substituição de A_1 da Eq. 3 na Eq. 0:

[nova linha 0] = [antiga linha 0] – [coef.col. A_1 linha 0] × [linha 3]

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		$(-w)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$(-w)$	0	1	0	0	0	0	0	1	0
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	3	2	0	0	-1	1	18



Fase 1: função-objetivo artificial

- Correção do problema modificado

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		$(-w)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$(-w)$	0	1	0	0	0	0	0	1	0
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	3	2	0	0	-1	1	18

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		$(-w)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$(-w)$	0	1	-3	-2	0	0	1	0	-18
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	3	2	0	0	-1	1	18



Fase 1: função-objetivo artificial

- Solução do problema modificado → iteração #1
 - Entra x_1 → coeficiente mais negativo na equação 0
 - Sai x_3 → menor termo independente ÷ coeficiente (> 0) de x_1

$$[\text{nova linha pivô}] = [\text{antiga linha pivô}] \div [\text{número pivô}]$$

$$[\text{nova linha } i] = [\text{antiga linha } i] - [\text{coef. col. pivô}] \times [\text{nova linha pivô}]$$

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		$(-w)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$(-w)$	0	1	-3	-2	0	0	1	0	-18
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	3	2	0	0	-1	1	18



Fase 1: função-objetivo artificial

- Solução do problema modificado → iteração #1

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		$(-w)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$(-w)$	0	1	-3	-2	0	0	1	0	-18
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	3	2	0	0	-1	1	18

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		$(-w)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$(-w)$	0	1	0	-2	3	0	1	0	-6
x_1	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	0	2	-3	0	-1	1	6



Fase 1: função-objetivo artificial

- Solução do problema modificado → iteração #2
 - Entra x_2 → único coeficiente negativo na equação 0
 - Sai A_1 → menor termo independente ÷ coeficiente (> 0) de x_2
- [nova linha pivô] = [antiga linha pivô] ÷ [número pivô]

$$[\text{nova linha } i] = [\text{antiga linha } i] - [\text{coef. col. pivô}] \times [\text{nova linha pivô}]$$

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		$(-w)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$(-w)$	0	1	0	-2	3	0	1	0	-6
x_1	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	0	2	-3	0	-1	1	6



Fase 1: função-objetivo artificial

- Solução do problema modificado → iteração #2 (fim)

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		$(-w)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$(-w)$	0	1	0	-2	3	0	1	0	-6
x_1	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	0	2	-3	0	-1	1	6

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		$(-w)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$(-w)$	0	1	0	0	0	0	0	1	0
x_1	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	0	3	1	1	-1	6
x_2	3	0	0	1	-3/2	0	-1/2	1/2	3



Fase 2: função-objetivo original

- Solução do problema original → quadro atualizado



variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		$(-w)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$(-w)$	0	1	0	0	0	0	0	1	0
x_1	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	0	3	1	1	-1	6
x_2	3	0	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$	$1/2$	3

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	0	1	-3	5	0	0	0		0
x_1	1	0	1	0	1	0	0		4
x_4	2	0	0	0	3	1	1		6
x_2	3	0	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$		3

Fase 2: função-objetivo original

- Inconsistências no quadro original atualizado



Eq. 0 com valores $\neq 0$ (ou 1) nas colunas x_1 e x_2 (básicas)

$$[\text{nova linha 0}] = [\text{antiga linha 0}] - [\text{coef.col. } x_1 \text{ linha 0}] \times [\text{linha 1}] - [\text{coef.col. } x_2 \text{ linha 0}] \times [\text{linha 3}]$$

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	0	1	-3	5	0	0	0		0
x_1	1	0	1	0	1	0	0		4
x_4	2	0	0	0	3	1	1		6
x_2	3	0	0	1	-3/2	0	-1/2		3



Fase 2: função-objetivo original

- Correção do problema original atualizado

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	0	1	-3	5	0	0	0		0
x_1	1	0	1	0	1	0	0		4
x_4	2	0	0	0	3	1	1		6
x_2	3	0	0	1	-3/2	0	-1/2		3

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	0	1	0	0	21/2	0	5/2		-3
x_1	1	0	1	0	1	0	0		4
x_4	2	0	0	0	3	1	1		6
x_2	3	0	0	1	-3/2	0	-1/2		3



Fase 2: função-objetivo original

- Problema original atualizado e corrigido → solução final
 - Inexistência de coeficientes negativos na equação (linha) 0



Solução viável inicial (quadro corrigido) é (por acaso) ótima:

$$x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 6, x_5 = 0 \Rightarrow Z = -3$$

variável básica	índice da eq.	coeficiente da variável:							termo indep.
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	0	1	0	0	21/2	0	5/2		-3
x_1	1	0	1	0	1	0	0		4
x_4	2	0	0	0	3	1	1		6
x_2	3	0	0	1	-3/2	0	-1/2		3

