Integral

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Def. Seja $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ ltda (ie $\exists M > 0$ tq. $|f(x)| \leq M \;\; \forall x \in [a,b]$).

Sejam $s, t : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ funções escadas tal que

$$s(x) \leq f(x) \leq t(x) \quad \forall x \in [a,b]. \qquad (*)$$

Se $\exists!$ $I \in \mathbb{R}$ tal que $\forall$ s,t satisfazendo $(*)$

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq I \leq \int_a^b t(x)\,dx,$$

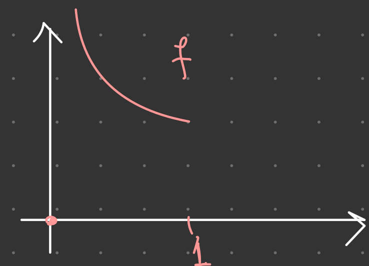
então dizemos que f é integrável em $[a,b]$ e denotamos

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

OBS. Veja que essa definição está associada Axioma 6 de área.

OBS: Se f não é ltda em $[a,b]$, em geral não é possível obter funções escadas satisfazendo (*)

Exemplo: $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



Integrais superiores e inferiores

$f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ ltda

$$S = \left\{ \int_a^b s(x)\,dx \in \mathbb{R} : s(x) \leq f(x) \quad x \in [a,b] \right\}$$

escada

$$T = \left\{ \int_a^b t(x)\,dx \in \mathbb{R} ; t(x) \geq f(x) \quad x \in [a,b] \right\}$$

escada

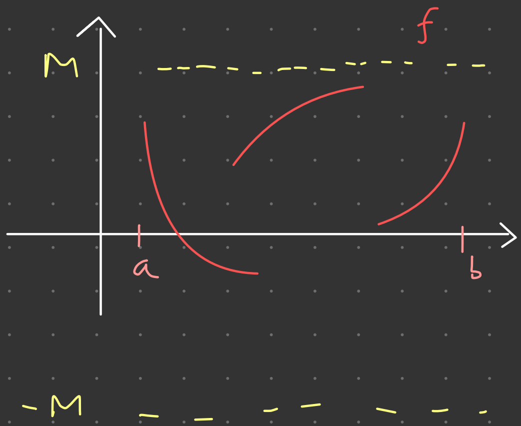
f ltda implica que S e T são não-vazios

f limitada $\Rightarrow \exists M > 0$ t.q. $-M \leq f(x) \leq M$.

$s(x) = -M \leq f(x)$

s é escada em $[a,b]$

$$\int_a^b s(x)\,dx = -M(b-a) \in S$$



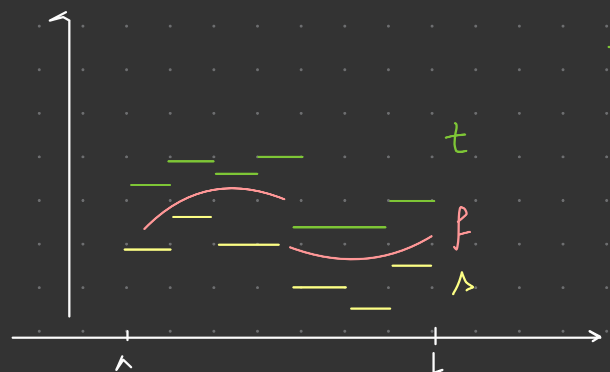
$t(x) = M \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b t(x)\,dx = M(b-a) \in T$$

$$s(x) \leqslant f(x) \leqslant t(x) \rightsquigarrow \int_a^b s(x)\,dx \leqslant \int_a^b t(x)\,dx$$

$$\rightsquigarrow \int_a^b s(x)\,dx \leqslant \underset{\underline{I}(f)}{\sup S} \leqslant \underset{\overline{I}(f)}{\inf T} \leqslant \int_a^b t(x)\,dx \qquad (*)(*)$$

<u>Def</u>: $\sup S$ é chamado integral inferior de f e é denotada por $\underline{I}(f)$
$\inf T$ a integral superior denotada por $\overline{I}(f)$.



<u>Teo</u>. Toda função limitada $f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ possui integrais inferior e superior satisfazendo $(*)(*)$

Além disso, f é integrável se e só se $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

dem. Se f é integrável, temos que $\exists!\ I \in \mathbb{R}$ tal que

$$(*)(*)(*) \quad \int_a^b s(x)\,dx \leq I \leq \int_a^b t(x)\,dx \qquad \forall\ s,t: [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \ \text{ t.q.}$$

$$s(x) \leq f(x) \leq t(x) \quad x \in [a,b].$$

Por outro lado

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \int_a^b t(x)\,dx.$$

Se $\underline{I}(f) < \overline{I}(f)$ temos que todo $I \in \left(\underline{I}(f), \overline{I}(f)\right)$

satisfaz $(*)(*)(*)$.

$$\therefore \quad \underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

Reciprocamente, suponha $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. Como

funções escadas

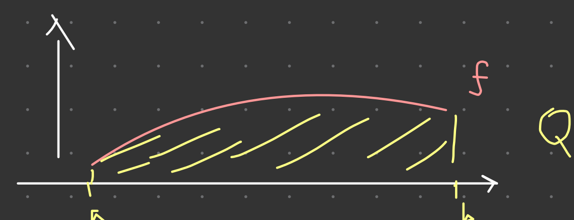
$$\int_a^b s(x)\,dx \le \underline{I}(f) = \overline{I}(f) \le \int_a^b t(x)\,dx \quad \text{sempre que} \quad s(x) \le f(x) \le t(x)$$

$x \in [a,b]$

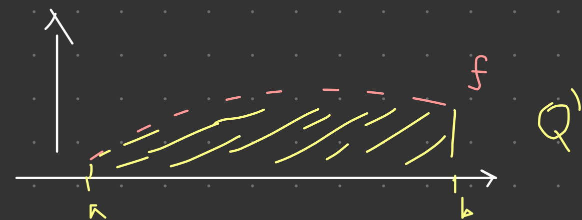
Concluímos que $I = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ é único pelas propriedades de sup e inf $\Longrightarrow$ f é integrável $\blacksquare$

OBS1 (a) Se $f:[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ ltda, integrável e $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Área}(Q) \qquad Q = \{(x,y) : x \in [a,b] \text{ e } 0 < y \le f(x)\}$$



(b) $Q' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \in [a,b] \quad 0 \leq y < f(x)\}$



$$\text{Área}(Q') = \int_a^b f(x)\,dx = \text{Área}(Q)$$

$$Q \supset Q' \quad \rightsquigarrow \quad \text{Área}(Q - Q') = 0$$

$\therefore$ Área de $g(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x \in [a,b] \ y = f(x)\}$

é zero.