

4 Modelagem da Dinâmica Veicular

A modelagem da dinâmica veicular será apresentada neste capítulo. O veículo será dividido em subsistemas específicos, definidos como: chassi; suspensão; rodas; sistema de propulsão; sistema de frenagem; sistema de direção; e contato pneu-solo. Para facilitar a compreensão e o equacionamento, as dinâmicas serão tratadas em separado e, uma vez que estejam devidamente definidas e testadas, elas serão acopladas, permitindo a compreensão do veículo como um único organismo. Toda a modelagem apresentada neste capítulo utiliza como base os modelos desenvolvidos, apresentados e discutidos nas referências [6], [7], [8], [9], [25], [27] e [47].

No entanto, a abordagem adotada nesta tese é diferente de todas estas referências, pois considera uma maior fragmentação de sistemas componentes, bem como se utiliza dos conceitos existentes na técnica de modelagem de grafos de ligação. De acordo com esta técnica, faz-se a análise do fluxo de potência e das relações de causa e efeito entre as diversas variáveis do sistema para se determinar um modelo dinâmico válido. Desta maneira é possível segmentar a dinâmica mais complexa em múltiplas dinâmicas menores, mais simples de serem equacionadas, e que poderão ser acopladas para, combinadas, definirem a dinâmica veicular. O grafo de ligação, por trabalhar com a conservação de potência na entrada e saída dos modelos de sistemas dinâmicos que representa, permite particionar um modelo dinâmico complexo em múltiplos modelos dinâmicos simplificados, de fácil compreensão e equacionamento. Com isso, e baseado no conceito de conservação de potência, desmembra-se um sistema complexo em múltiplos sistemas, realizam-se suas modelagens e validações necessárias, para reagrupar todos os modelos componentes novamente no formato do sistema original, com os mesmos resultados de uma modelagem que utiliza metodologias mais tradicionais, como Lagrange ou Newton-Euler.

As variáveis empregadas pela técnica de grafos de ligação correspondem a variáveis generalizadas que retratam esforços (e), fluxos (f), quantidades de

movimento (p) ou deslocamentos (q), fornecidos de ou para um sistema em particular. Ao conectar mais de um sistema, cada ligação feita gera uma ação sobre o sistema vizinho e dele recebe uma reação, caracterizando o fluxo de potência e a relação de causa e efeito. Além disso, a constante interferência de um sistema em seus vizinhos corrobora o fato mencionado anteriormente, de que não é possível realizar projeto de controladores embarcados para solucionar problemas de segurança ativa em veículos automotivos ao se considerar apenas uma parte da dinâmica que os caracteriza. A consequência para este tipo de consideração corresponde a limitar o funcionamento dos sistemas de auxílio à direção, fazendo-os começar a atuar a partir de limiares distantes dos limites físicos do veículo. O resultado é uma restrição na operação de veículos em geral.

As variáveis de fluxo (f) e esforço (e) são chamadas de variáveis de potência, pois seu produto retorna a potência instantânea que flui por uma ligação. As variáveis de quantidade de movimento (p) e de deslocamento (q) por sua vez, são chamadas de variáveis de energia e são obtidas a partir da integração das variáveis de potência. Cada ligação é representada por um par de variáveis, de sentidos opostos, configurando a idéia de ação e reação. Assim, quando um sistema passa um esforço (e) para o sistema seguinte, ele está recebendo um fluxo (f) e vice-versa.

Entendendo um pouco mais da abordagem de fluxo de potência e grafos de ligação, deve-se primeiro identificar o que são as variáveis de esforço (e) e de fluxo (f). Vale aqui mencionar que a abordagem por fluxos de potência se baseia na conservação de energia e que, para poder verificar tal conservação, é preciso conhecer as forças, momentos e velocidades do sistema mecânico representativo da dinâmica veicular. Variáveis de esforço (e), como o próprio nome diz, representam ações e reações sobre um determinado sistema, sendo representadas pelas forças e momentos que atuam sobre o modelo físico. Já as variáveis de fluxo (f) indicam as velocidades ou taxas, sejam elas lineares ou angulares.

O procedimento para a confecção do grafo de ligação possui os seguintes passos: identificar cada componente do sistema e sua representação via elementos puros; desenhar o grafo; indicar o fluxo de potência e as relações de causalidade, procurando sempre respeitar as relações integrais para elementos capacitores e elementos inércia; numerar cada uma das variáveis de esforço e fluxo ao longo das ligações; escrever as equações constitutivas procurando identificar as

variáveis de estado; e efetuar o equacionamento do modelo dinâmico representativo do sistema físico real. Respeitados todos os passos, obtém-se um sistema de equações que representa o modelo sob análise, de maneira mais simples, rápida e eficiente do que o equacionamento clássico.

O primeiro passo corresponde a identificar quem são os sistemas componentes do modelo representativo da dinâmica veicular. Baseado na Figura 17, que mostra uma representação de um veículo e seus sistemas, é possível construir um diagrama (Figura 16) que indica os principais sistemas e componentes da dinâmica veicular, contendo a interação das três dinâmicas principais, longitudinal, lateral e vertical, através do contato pneu-solo, além de especificar quem são as entradas ou excitações para o automóvel. Nesse diagrama identificam-se também as principais variáveis que atuam internamente à dinâmica, as variáveis de entrada associadas aos comandos do motorista e as variáveis de saída, que definem o comportamento dinâmico do veículo. Também fica estabelecido o fluxo das variáveis de potência, desde o contato do pneu com o solo até o chassi.

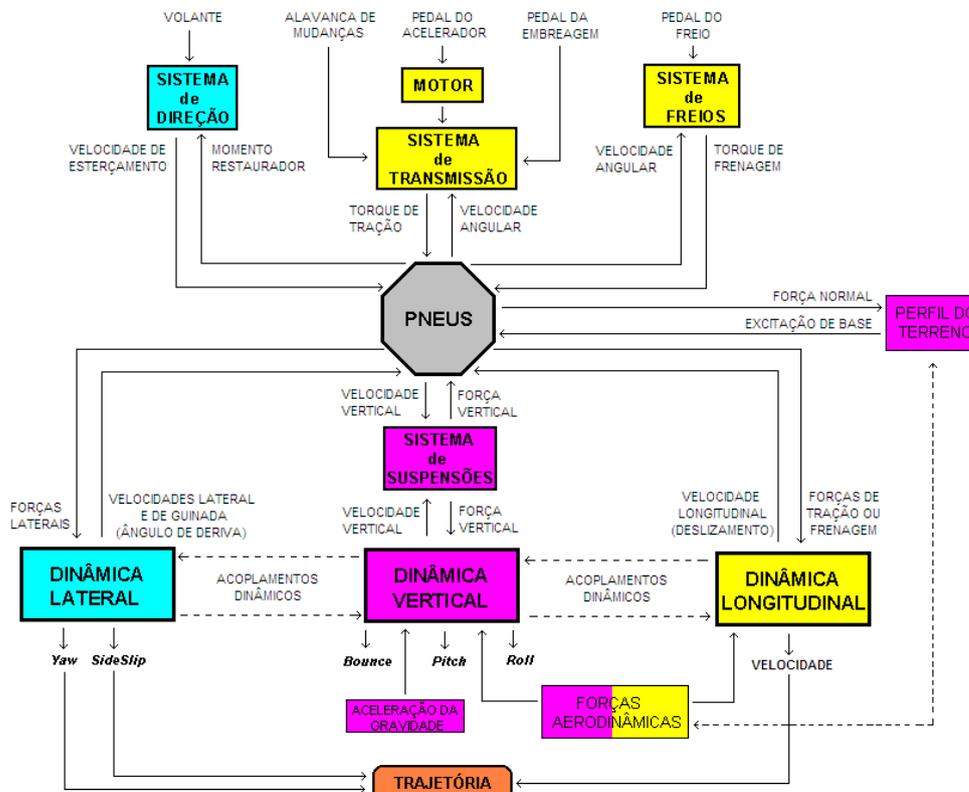


Figura 16: Componentes da dinâmica veicular.

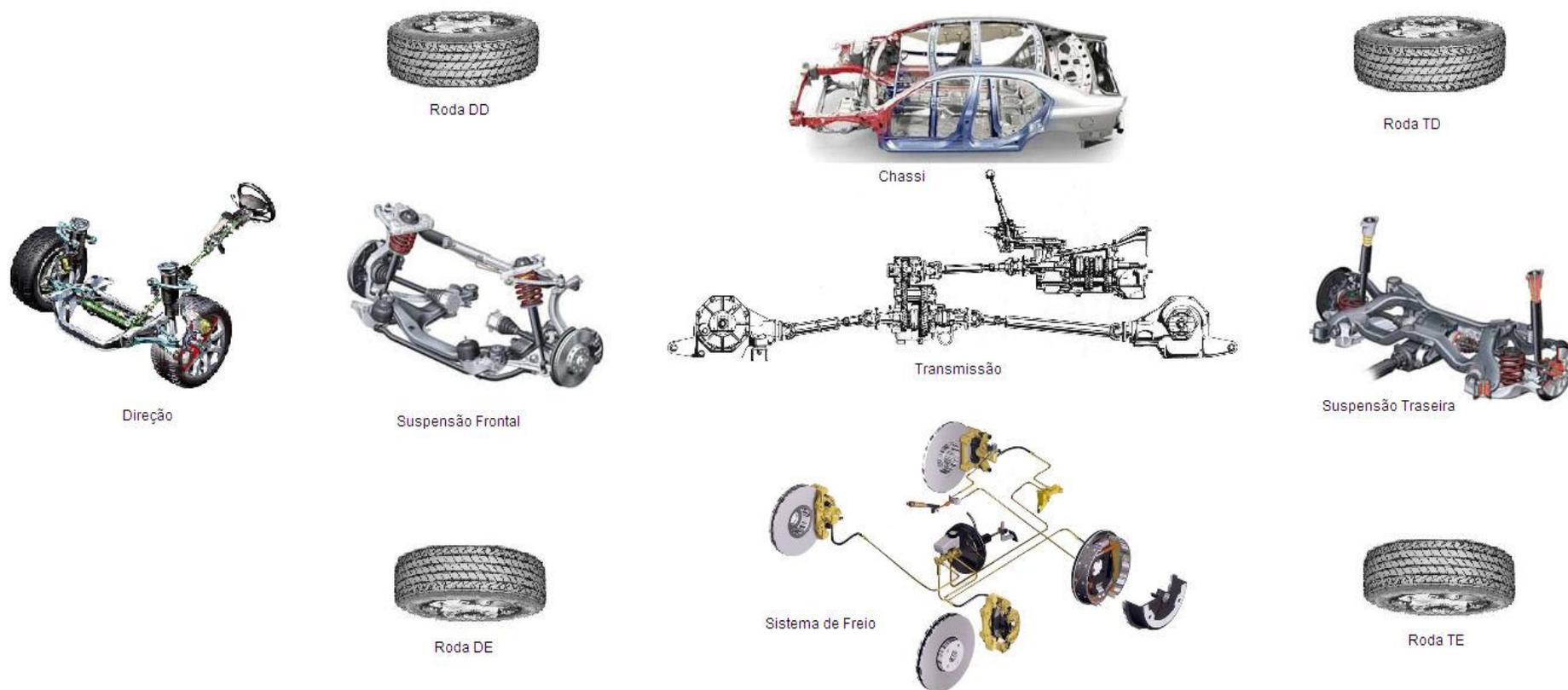


Figura 17: Subsistemas componentes da dinâmica veicular.

A seguir desenvolve-se o modelo da dinâmica de corpo rígido no espaço através da metodologia de Newton-Euler, a partir das relações de compatibilidade cinemática e equilíbrio, gerais para movimentos quaisquer, dependendo das restrições que serão impostas e de acordo com o tipo de movimento e/ou vínculos associados. Os demais componentes da dinâmica veicular são, por sua vez, desenvolvidos a partir do equacionamento de grafos de ligação, com o devido respeito ao fluxo de potência, para permitir posterior acoplamento entre os modelos desenvolvidos com técnicas de modelagem diferentes.

4.1.

Chassi

4.1.1.

Cinemática Absoluta em um Referencial Local

Considere o corpo rígido da Figura 18, que representa o chassi, se deslocando no sistema de referência global XYZ, com um sistema de referência local xyz conectado a ele, com origem no centro de massa CM, onde

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

correspondem, respectivamente, à velocidade absoluta de translação do CM e à velocidade absoluta de rotação em torno do sistema de referência local com origem no CM, representadas no referencial local xyz, e que caracterizam o movimento do chassi no espaço.

Um ponto p_i pertencente ao chassi, de coordenadas no referencial local

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

possui velocidade absoluta de translação no referencial local

$$\vec{V}_i = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i \tag{4.3}$$

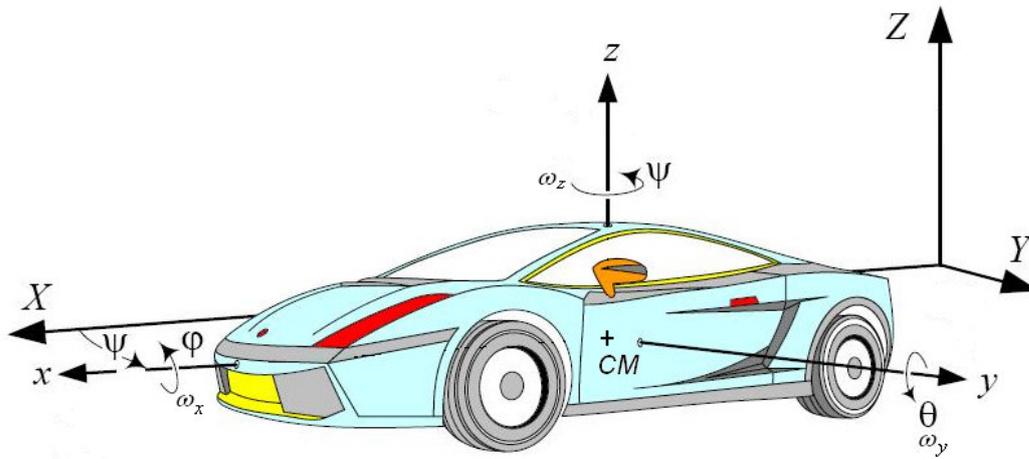


Figura 18: Chassi no sistema de referência global XYZ.

Lembrando que

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \omega_x y \vec{k} + x \omega_z \vec{j} + \omega_y z \vec{i} - \omega_z y \vec{i} - z \omega_x \vec{j} - x \omega_y \vec{k} = \\ &= (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (x \omega_z - z \omega_x) \vec{j} + (\omega_x y - x \omega_y) \vec{k} \end{aligned}$$

conclui-se, então, que

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = \begin{bmatrix} -\omega_z y + \omega_y z \\ \omega_z x - \omega_x z \\ -\omega_y x + \omega_x y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Também é sabido que

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = -\vec{r} \times \vec{\Omega} \tag{4.5}$$

e que, portanto, a velocidade absoluta de translação do ponto p_i , no referencial local, é dada por

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_i &= \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i = \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x - \omega_z y_i + \omega_y z_i \\ v_y + \omega_z x_i - \omega_x z_i \\ v_z - \omega_y x_i + \omega_x y_i \end{bmatrix} \\
 &= \vec{V} - \vec{r}_i \times \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & z_i & -y_i \\ -z_i & 0 & x_i \\ y_i & -x_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde a matriz de coordenadas

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & z_i & -y_i \\ -z_i & 0 & x_i \\ y_i & -x_i & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

define a posição do ponto p_i no referencial local e relaciona a velocidade absoluta de translação do ponto, neste mesmo referencial, com as velocidades absolutas de translação do CM e de rotação do chassi em torno do referencial local, com origem no CM, representadas no referencial local. O ponto p_i pode corresponder a um local por onde é possível conectar o chassi a outros sistemas da dinâmica veicular como, por exemplo, a suspensão.

Reorganizando os termos dos vetores de velocidade de translação e rotação do chassi em um único vetor na forma

$$\begin{bmatrix} \vec{V} \\ \vec{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

tem-se, então, que a velocidade absoluta de translação é dada por

$$\vec{V}_i = \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{bmatrix} = T_i \begin{bmatrix} \vec{V} \\ \vec{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i & -y_i \\ 0 & 1 & 0 & -z_i & 0 & x_i \\ 0 & 0 & 1 & y_i & -x_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde a matriz T_i representa a transformação das velocidades de translação do centro de massa e de rotação do chassi, em torno do sistema local, que passa no centro de massa, para a velocidade de translação do ponto p_i . Poder-se-ia ainda definir uma matriz T_i , dada por

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_i \\ \vec{\Omega}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \\ \omega_{xi} \\ \omega_{yi} \\ \omega_{zi} \end{bmatrix} = T_i \begin{bmatrix} \vec{V} \\ \vec{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i & -y_i \\ 0 & 1 & 0 & -z_i & 0 & x_i \\ 0 & 0 & 1 & y_i & -x_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

que relaciona as velocidades de translação e rotação do ponto p_i com as do centro de massa. Desta forma define-se um elemento de transformação de velocidades, caracterizado pela matriz T_i , a partir do qual se têm as velocidades de translação do CM e de rotação em torno do CM como entradas e as velocidades do ponto p_i como saída.

4.1.2. Cinemática Absoluta em um Referencial Global

A descrição completa do movimento (ou configuração) de um corpo no espaço é dada pela posição do seu centro de massa em relação a um referencial fixo à sua trajetória, chamado de referencial global, e pelos ângulos do referencial local do corpo com relação ao referencial global, ou seja, a sua atitude ou orientação. Para estabelecer a cinemática global do corpo, sua velocidade representada no referencial fixo, é necessário primeiro determinar sua atitude. Esta é descrita por um conjunto conveniente de ângulos, obtidos a partir das projeções das componentes da velocidade angular descritas no referencial local em eixos de referência apropriados, e suas integrações no tempo. Em seguida projeta-se a velocidade de translação absoluta no referencial global, para depois integrá-la e determinar a trajetória do centro de massa.

4.1.2.1. Atitude do Chassi

Para descrever a atitude do chassi através de um conjunto adequado de ângulos (*Ângulos de Euler*), deve ser definida uma sequência de rotações que serão realizadas em um referencial inicialmente paralelo ao sistema de referência global, com origem no centro de massa do chassi, até fazê-lo coincidir com o sistema de referência local no corpo, em uma atitude qualquer. Dentre as sequências possíveis, escolheu-se a aquela conhecida como *zyx*, na qual se tem:

- Uma rotação ψ em torno do eixo Z, levando ao plano $x'y'$ deslocado em relação ao plano XY e com os eixos z' e Z coincidentes, chamada de *yaw* ou guinada;
- Uma rotação θ em torno do eixo y' , levando ao plano $x''z''$ deslocado em relação ao plano $x'z'$ e com os eixos y' e y'' coincidentes, chamada de *pitch* ou arfagem;
- Uma rotação ϕ em torno do eixo x'' , levando ao plano yz deslocado em relação ao plano $y''z''$ e com os eixos x'' e x coincidentes, chamada de *roll* ou rolagem.

A Figura 19 mostra cada uma das rotações e os respectivos planos deslocados, ilustrando a sequência empregada para definir a orientação do chassi no sistema local, em relação ao referencial global.

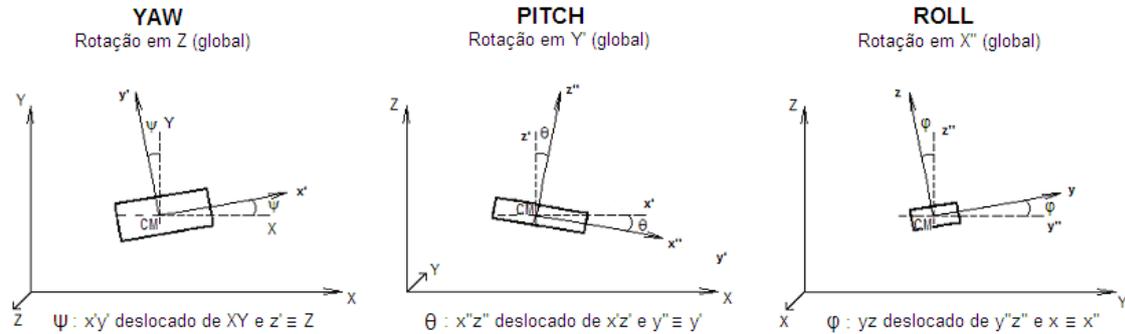


Figura 19: Ângulos de Euler ψ , θ , ϕ .

Uma vez que

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen} \phi \\ 0 & -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

a partir destas rotações, feitas em torno de um eixo por vez, pode-se definir as matrizes de transformação T_ψ , T_θ e T_ϕ , dadas por

$$T_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad e \quad T_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen} \phi \\ 0 & -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Estas matrizes possibilitam projetar um vetor descrito em um dado referencial para outro. Assim, dado que as três rotações sucessivas levam um referencial paralelo ao global coincidir com o referencial local do corpo,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \text{sen} \varphi \\ 0 & -\text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \text{sen} \varphi \\ 0 & -\text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \text{sen} \varphi \\ 0 & -\text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \text{sen} \psi & -\text{sen} \theta \\ -\cos \varphi \text{sen} \psi + \text{sen} \varphi \text{sen} \theta \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi + \text{sen} \varphi \text{sen} \theta \text{sen} \psi & \text{sen} \varphi \cos \theta \\ \text{sen} \varphi \text{sen} \psi + \cos \varphi \text{sen} \theta \cos \psi & -\text{sen} \varphi \cos \psi + \cos \varphi \text{sen} \theta \text{sen} \psi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

E a matriz

$$T = T_\varphi T_\theta T_\psi = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \text{sen} \psi & -\text{sen} \theta \\ -\cos \varphi \text{sen} \psi + \text{sen} \varphi \text{sen} \theta \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi + \text{sen} \varphi \text{sen} \theta \text{sen} \psi & \text{sen} \varphi \cos \theta \\ \text{sen} \varphi \text{sen} \psi + \cos \varphi \text{sen} \theta \cos \psi & -\text{sen} \varphi \cos \psi + \cos \varphi \text{sen} \theta \text{sen} \psi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

projeta para o referencial local, um vetor descrito no referencial global. Se for necessário representar um vetor descrito no referencial local, no referencial global, então a operação inversa deve ser realizada. Uma vez que, pela propriedade de ortonormalidade das matrizes de transformação, tem-se que

$$T \cdot T^T = I_d \Rightarrow T^T = T^{-1} \tag{4.16}$$

Sendo assim, a transformação inversa, do referencial local para o referencial global, se escreve:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \text{sen} \psi + \text{sen} \varphi \text{sen} \theta \cos \psi & \text{sen} \varphi \text{sen} \psi + \cos \varphi \text{sen} \theta \cos \psi \\ \cos \theta \text{sen} \psi & \cos \varphi \cos \psi + \text{sen} \varphi \text{sen} \theta \text{sen} \psi & -\text{sen} \varphi \cos \psi + \cos \varphi \text{sen} \theta \text{sen} \psi \\ -\text{sen} \theta & \text{sen} \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Para determinar os Ângulos de Euler, suas taxas de variação no tempo, escritas nos referenciais intermediários, devem ser projetadas de acordo com a respectiva sequência de rotações, e obter a representação vetorial da velocidade angular no referencial local. Lembrando que

$$\vec{\Omega} = \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\psi}} \tag{4.18}$$

onde todas as velocidades estão representadas no mesmo referencial. Então, para se ter as taxas de variação no tempo dos ângulos de Euler, no referencial local, devem ser feitas as respectivas projeções empregando as matrizes de transformação, de tal modo que:

- A velocidade de *guinada* $d\psi/dt$, escrita no referencial XYZ, deve ser projetada no referencial $x'y'z'$, através do produto por T_ψ .
- A velocidade de *arfagem* $d\theta/dt$, somada à velocidade de *guinada*, escritas no referencial $x'y'z'$, deve ser projetada no referencial $x''y''z''$, através do produto por T_θ .
- A velocidade de *rolagem* $d\varphi/dt$, somada às velocidades de *arfagem* e *guinada*, escritas no referencial $x''y''z''$, devem ser projetadas no referencial local, a partir do produto por T_φ .

Assim,

$$\vec{\Omega} = T_\varphi \left(\vec{\dot{\varphi}} + T_\theta \left(\vec{\dot{\theta}} + T_\psi \vec{\dot{\psi}} \right) \right) \tag{4.19}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) \right) \tag{4.20}$$

Como normalmente, no problema do movimento de um corpo rígido no espaço, as incógnitas são os ângulos de Euler e as velocidades angulares no

referencial local são conhecidas a partir das relações dinâmicas associadas, então se deve inverter a relação anterior, de maneira que

$$T_{\varphi}^T \vec{\Omega} = \vec{\dot{\varphi}} + T_{\theta} (\vec{\dot{\theta}} + T_{\psi} \vec{\dot{\psi}}) \quad \text{ou} \quad T_{\theta}^T T_{\varphi}^T \vec{\Omega} = T_{\theta}^T \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\theta}} + T_{\psi} \vec{\dot{\psi}} \quad (4.21)$$

Então

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\text{sen} \varphi \\ 0 & \text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \text{ sen} \varphi & \text{sen} \theta \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & -\text{sen} \varphi \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \text{ sen} \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \dot{\varphi} \\ 0 \\ -\text{sen} \theta \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

E, finalmente,

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{tg} \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \text{ sen} \varphi & \text{sen} \theta \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & -\text{sen} \varphi \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \text{ sen} \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{tg} \theta \text{ sen} \varphi & \text{tg} \theta \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & -\text{sen} \varphi \\ 0 & \text{sen} \varphi / \cos \theta & \cos \varphi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Após obter as taxas de variação dos ângulos de Euler, deve-se integrá-las no tempo. Note que para obtenção dos ângulos ψ , θ e φ , deve-se resolver um sistema de equações diferenciais não-lineares acopladas a partir das componentes da velocidade angular no referencial local.

Note ainda que para $\theta = \frac{\pi}{2} \times (2k + 1)$, ou seja, para qualquer múltiplo ímpar de 90° para o ângulo de arfagem, o sistema acima fica indeterminado, pois para $\cos \theta = 0$ existem singularidades na solução dos ângulos de Euler. Para veículos terrestres, tal condição está associada à situação limite de uma capotagem devida, por exemplo, a elevadas forças aerodinâmicas de sustentação positiva, o que apesar de possível, é muito pouco provável em condições normais de operação. O mesmo problema existe para o ângulo de rolagem, pois um valor em que $\varphi = \frac{\pi}{2} \times (2k + 1)$, ou seja, qualquer múltiplo ímpar de 90° indica que uma capotagem está ocorrendo. No entanto, apesar de ser um problema físico, com consequências graves para qualquer passageiro do veículo, este valor de ângulo de rolagem não provoca nenhuma indeterminação ao modelo matemático podendo, portanto, ser encontrado. Na prática, antes de atingir este valor, o modelo dinâmico aqui apresentado já deixou de ter validade, o carro está fora de controle e um acidente está prestes a acontecer, ou já aconteceu.

A Figura 20 abaixo mostra um esquema ilustrando as operações necessárias para obter os ângulos de Euler a partir das velocidades angulares descritas no referencial local. Também apresenta a determinação da matriz de transformação do referencial local para o global, escrita em função dos ângulos de Euler e a partir de uma orientação inicial nula.

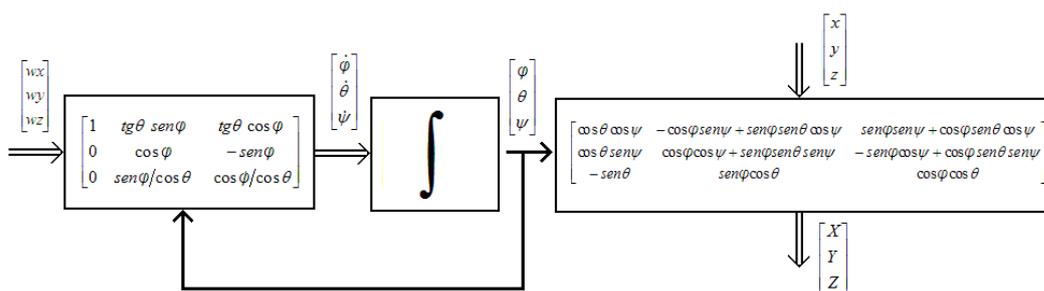


Figura 20: Determinação dos ângulos de Euler e da matriz de transformação T.

4.1.2.2. Deslocamento do Chassi no Referencial Global

Para obtenção da posição instantânea do chassi, em relação ao referencial global e a partir de uma posição inicial do CM (X_0, Y_0, Z_0), basta integrar as

velocidades absolutas descritas no referencial global, determinadas pela projeção do vetor velocidade no referencial local. Assim, conhecida a matriz de transformação,

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

pode-se determinar a velocidade do chassi em relação ao referencial global.

A Figura 21 ilustra o procedimento completo para determinação do deslocamento do chassi no espaço, incluindo o procedimento representado na Figura 20, para obtenção dos ângulos de Euler, no qual dois processos de integração de equações diferenciais não-lineares acopladas são necessários. Também indica a possibilidade do chassi estar inicialmente deslocado da origem do sistema de referencial global e com uma atitude inicial, dada por $(\varphi_0, \theta_0, \psi_0)$, o que pode ser utilizado em uma situação de determinação e/ou controle de trajetória por partes.

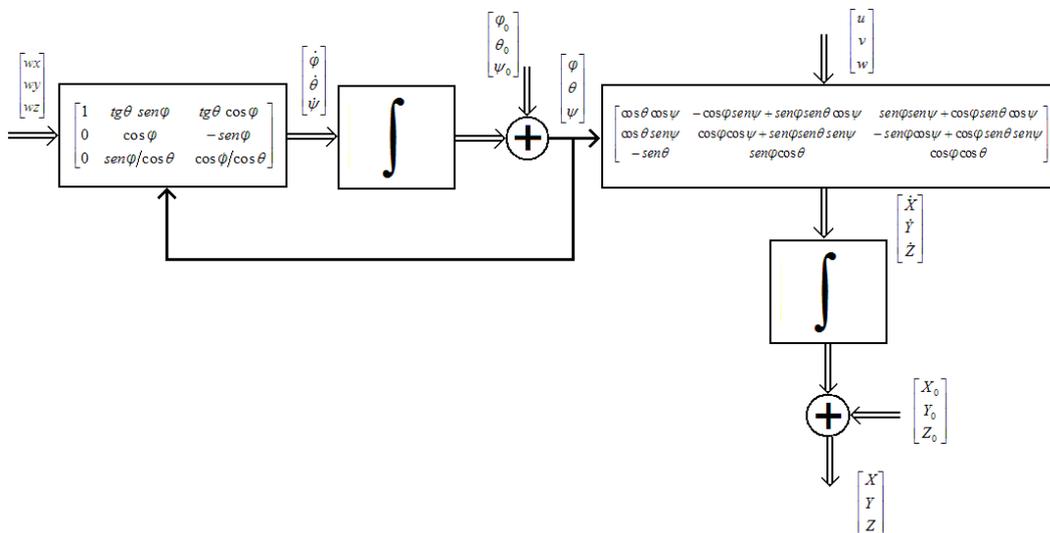


Figura 21: Determinação da trajetória e da atitude do corpo rígido no espaço.

4.1.3. Dinâmica em um Referencial Local

Normalmente é mais conveniente escrever as equações de movimento de Newton-Euler no referencial local do chassi, uma vez que as forças e momentos

motrizes e resistentes atuam sobre o mesmo referencial e, portanto, são mais simples de representar. Entretanto como o referencial do chassi geralmente é um sistema de referência que possui velocidade angular, devem-se incluir os seus efeitos nas equações de equilíbrio dinâmico, que definem o comportamento do chassi no espaço.

Assim as leis de Newton-Euler no referencial local móvel estabelecem que o somatório de forças F e momentos M , em relação ao centro de massa CM do veículo (origem do referencial local), são dados respectivamente por

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{p} \\ \sum \vec{M} = \frac{d\vec{h}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{h} \end{cases} \quad (4.27)$$

onde \vec{p} é a quantidade de movimento linear do chassi; $\vec{\Omega}$ é a velocidade angular do chassi; e \vec{h} é a quantidade de movimento angular do chassi. Todos os vetores estão escritos no referencial local.

Lembrando que $\vec{p} = m\vec{V}$ e $\vec{h} = J\vec{\Omega}$, onde m é a massa do chassi, V é a velocidade do chassi e J é o tensor de inércia do chassi no referencial local, dado por

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

No tensor de inércia, $J_{ii} = \int (j^2 + k^2) dm$ é o momento de inércia em relação ao eixo i , com $i = x, y, z$, e $j, k = y, z; x, z; x, y$; respectivamente, definindo a distribuição de massa em torno dos eixos x, y , e z , e $J_{ij} = J_{ji} = - \int i.j dm$ é o produto de inércia em relação ao plano ij , com $ij = xy, xz, yz$, que caracteriza a distribuição de massa nesses planos.

Nota-se que a simetria do chassi em relação a um dos eixos do plano em questão, anula os produtos de inércia associados. Os produtos de inércia ij e ik

também serão nulos se o chassi estiver sendo considerado como um corpo plano em jk .

Escreve-se, então,

$$\vec{h} = J\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z \\ J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z \\ J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Logo, as equações de movimento de Newton-Euler podem ser re-escritas como

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F} = m \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{V} \right) \\ \sum \vec{M} = J \frac{d\vec{\Omega}}{dt} + \vec{\Omega} \times J\vec{\Omega} \end{array} \right. \quad (4.30)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F} = m \left(\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right) \\ \sum \vec{M} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.31)$$

ou, ainda,

$$\left\{ \begin{aligned} \sum \vec{F} &= m \left(\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right) \\ \sum \vec{M} &= \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z \\ J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z \\ J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (4.32)$$

levando a

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum F_z \end{bmatrix} &= m \left(\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_y v_z - \omega_z v_x \\ \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ \omega_x v_x - \omega_y v_x \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \sum M_x \\ \sum M_y \\ \sum M_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (J_{zz} - J_{yy})\omega_z\omega_y + J_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) + (J_{zx}\omega_y - J_{yx}\omega_z)\omega_x \\ (J_{xx} - J_{zz})\omega_z\omega_x + J_{xz}(\omega_z^2 - \omega_x^2) + (J_{xy}\omega_z - J_{zy}\omega_x)\omega_y \\ (J_{yy} - J_{xx})\omega_y\omega_x + J_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) + (J_{yz}\omega_x - J_{xz}\omega_y)\omega_z \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (4.33)$$

que finalmente possibilita chegar às equações diferenciais que definem a dinâmica do chassi, considerado um corpo rígido no espaço, em termos das velocidades representadas no referencial local. Estas são dadas por

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} &= \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum F_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_y v_z - \omega_z v_x \\ \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ \omega_x v_x - \omega_y v_x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \sum M_x \\ \sum M_y \\ \sum M_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (J_{zz} - J_{yy})\omega_z\omega_y + J_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) + (J_{zx}\omega_y - J_{yx}\omega_z)\omega_x \\ (J_{xx} - J_{zz})\omega_z\omega_x + J_{xz}(\omega_z^2 - \omega_x^2) + (J_{xy}\omega_z - J_{zy}\omega_x)\omega_y \\ (J_{yy} - J_{xx})\omega_y\omega_x + J_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) + (J_{yz}\omega_x - J_{xz}\omega_y)\omega_z \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \right. \quad (4.34)$$

onde a inversa do tensor de inércia é sempre possível de ser obtida, pois o tensor é definido positivo, ou seja $\det J > 0$. Assim, considerando que $J = J^T$, ou seja, o tensor de inércia é simétrico e que

$$J^{-1} = \frac{1}{\det J} \text{Adj}(J) = \frac{1}{\det J} \text{Cof}(J)^T \quad (4.35)$$

e sendo

$$\begin{aligned}
 \det J &= J_{xx}J_{yy}J_{zz} + 2J_{xy}J_{xz}J_{yz} - J_{xx}J_{yz}^2 - J_{yy}J_{xz}^2 - J_{zz}J_{xy}^2 \\
 \text{Adj}(J) &= \begin{bmatrix} J_{yy}J_{zz} - J_{yz}^2 & J_{xz}J_{yz} - J_{xy}J_{zz} & J_{xy}J_{yz} - J_{xz}J_{yy} \\ J_{xz}J_{yz} - J_{xy}J_{zz} & J_{xx}J_{zz} - J_{xz}^2 & J_{xy}J_{xz} - J_{yz}J_{xx} \\ J_{xy}J_{yz} - J_{xz}J_{yy} & J_{xy}J_{xz} - J_{yz}J_{xx} & J_{xx}J_{yy} - J_{xy}^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

a inversa do tensor de inércia é facilmente obtida.

A Figura 22 ilustra o procedimento de obtenção das velocidades do veículo no referencial local, na forma matricial descrita pela Equação (4.31). Observe que as variáveis envolvidas, forças, momentos, velocidades de translação e angulares são pares de variáveis de potência (F, V) e (M, ω) e, portanto, o modelo em termos de fluxo de potência encontra-se completamente estabelecido. Note, ainda, que as saídas deste diagrama correspondem às entradas para o esquema da Figura 21.

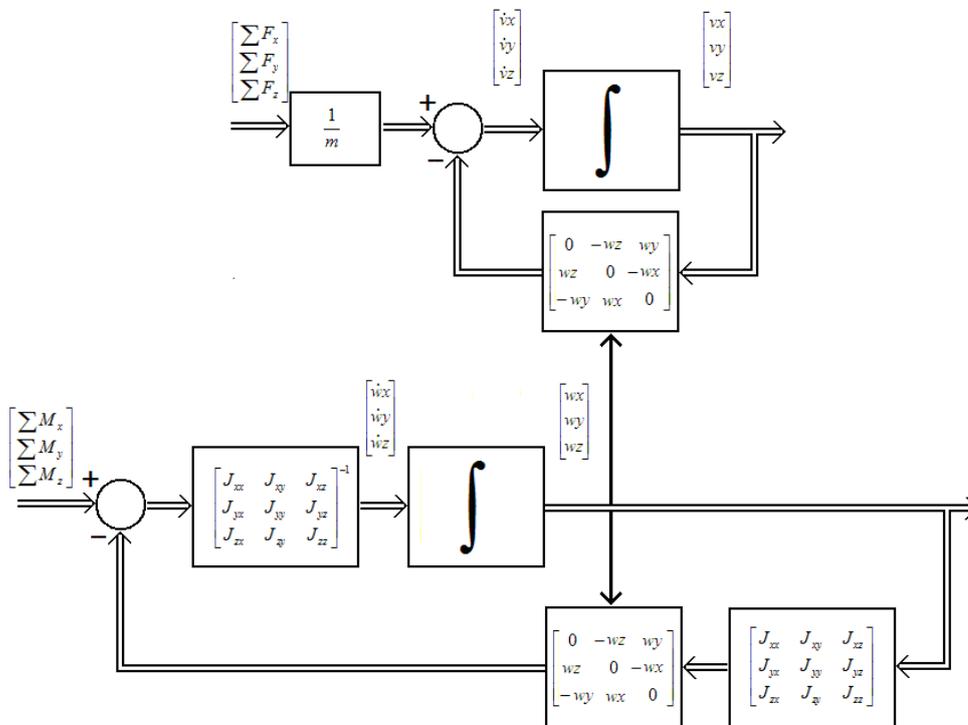


Figura 22: Solução das equações de movimento de um corpo rígido no espaço.

A Figura 23 mostra a representação da dinâmica do chassi no espaço através do Grafo de Fluxo de Potência, onde os pares de variáveis de potência são indicados e os acoplamentos internos, inerentes ao tratamento do problema no referencial local, são resolvidos através das operações matriciais mostradas na Figura 22. Emprega-se uma notação apropriada para o fluxo de potência e para a relação da causa e efeito (causalidade), na qual a meia seta vetorial indica o sentido da potência entrando para o elemento. A barra causal se encontra no sentido da variável vetorial esforço, para o elemento, e conseqüentemente a variável vetorial de fluxo está no sentido contrário, saindo do elemento. As potências instantâneas de translação e de rotação nas portas do elemento são dadas pelos produtos escalares,

$$P_t = [F_x \quad F_y \quad F_z] \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad e \quad P_r = [M_x \quad M_y \quad M_z] \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Note que a dinâmica do veículo é na verdade um macro-elemento inércia, recebendo esforços como entrada e tendo velocidades como saídas, no qual as equações constitutivas correspondem àquelas apresentadas no sistema de equações (4.34).

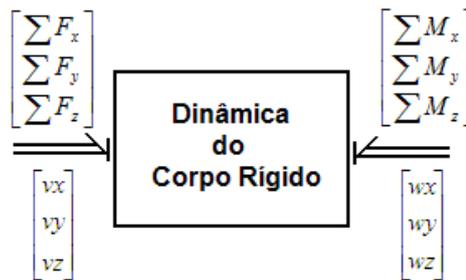


Figura 23: Grafo de Fluxo de Potência de um corpo rígido no espaço.

A Figura 24 apresenta um diagrama de blocos completo da dinâmica e cinemática do veículo no espaço, obtido pela união dos diagramas da Figura 21 e da Figura 22, que representam, respectivamente, a solução das relações cinemáticas, associadas à trajetória e a atitude do veículo, e a solução das equações de movimento de Newton-Euler.

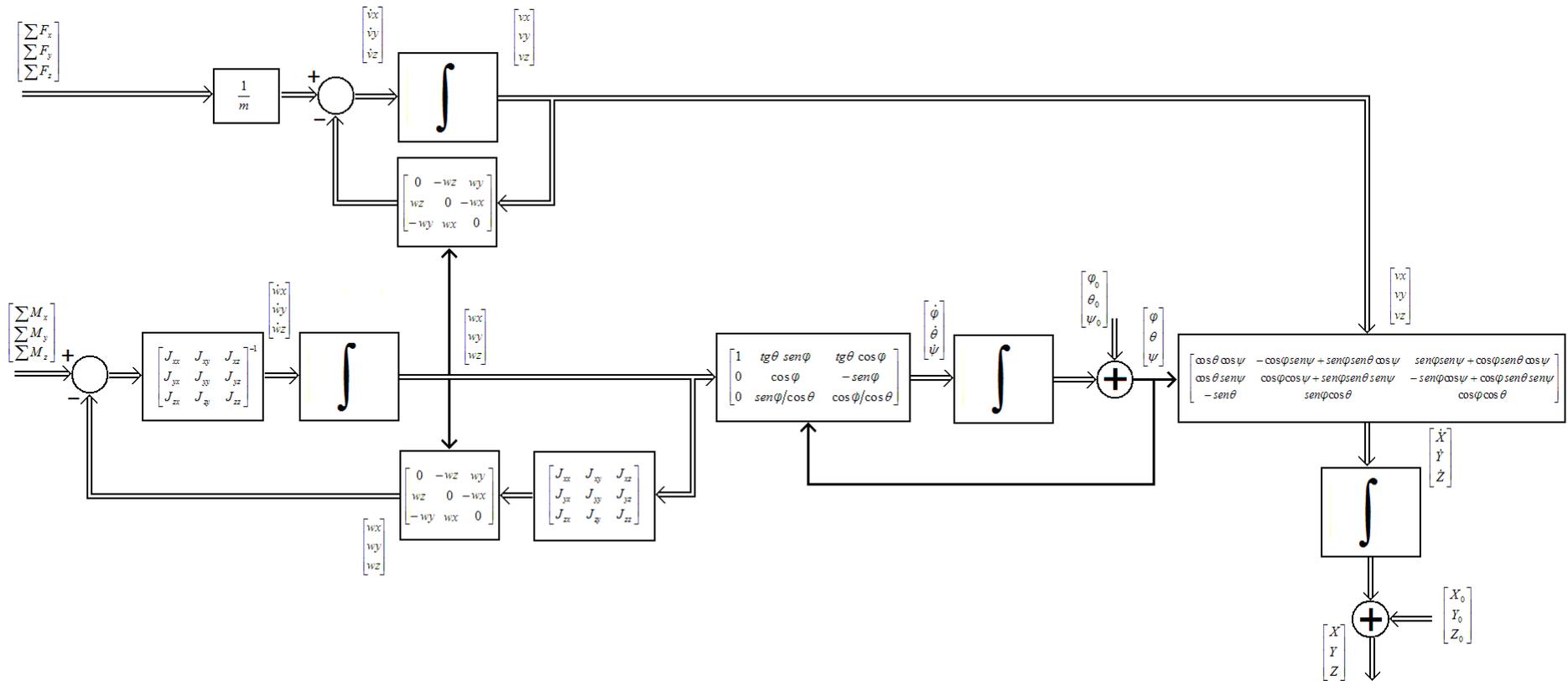


Figura 24: Diagrama de blocos completo para a dinâmica e a cinemática do chassi no espaço.

4.1.4. Equilíbrio de Forças Externas

Até o momento, todo o equacionamento apresentado, para cinemática e dinâmica do chassi, considerou apenas o equilíbrio de forças e momentos internos, gerados a partir dos movimentos de translação e rotação do próprio corpo rígido, como é considerado o chassi. No entanto é preciso determinar um modelo representativo para o equilíbrio das forças e momentos externos, desempenhadas pelo meio, sobre o corpo do chassi.

Uma primeira consideração que se faz diz respeito à pista sobre a qual o veículo trafega. Considera-se que ela possui inclinações laterais e longitudinais, constituindo uma trajetória tridimensional, mais complexa, ao invés da pista horizontal considerada em trabalhos anteriores ([2] e [1]). Cabe ressaltar, aqui, que não são consideradas imperfeições na superfície da trajetória, como buracos, desníveis, rugosidades e etc. Estas características de pista são tratadas como excitações de base e podem ser incluídas no modelo, como funções de forças resultantes do perfil correspondente a cada imperfeição. A Figura 25 e a Figura 26 apresentam o equilíbrio de forças e momentos para as condições inclinadas.

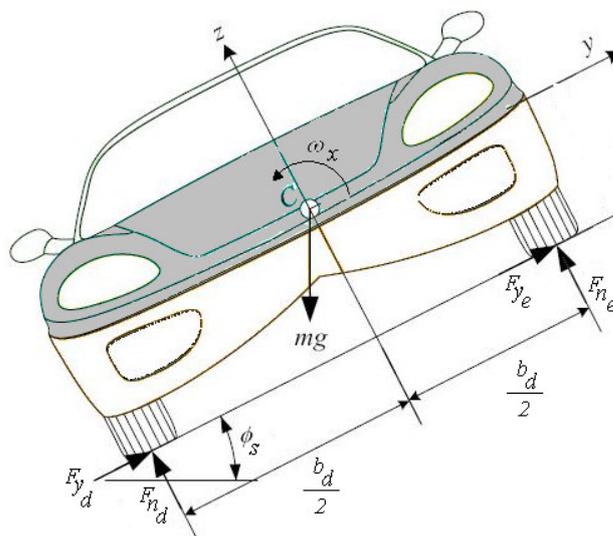


Figura 25: Equilíbrio de forças externas, vista frontal do veículo.

Observando a Figura 26 pode-se realizar o equilíbrio das forças externas, que atuam sobre o veículo. Assim sendo, o somatório das forças longitudinais corresponde a

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = & F_{x_{DE}} + F_{x_{DD}} + F_{x_{TE}} + F_{x_{TD}} - R_{x_{DE}} \cos \alpha_{DE} - R_{x_{DD}} \cos \alpha_{DD} \dots \\ & \dots - R_{x_{TE}} \cos \alpha_{TE} - R_{x_{TD}} \cos \alpha_{TD} - m_{total} g \sin(\theta_s) - F_{aero} \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho C_d A_f v_x |v_x| \quad (4.39)$$

corresponde à força aerodinâmica que age sobre o veículo; $A_f = 1,6 + 0,00056(m_{total} - 765)$, para veículos com massa entre 800kg e 2000kg; $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$; $C_d = 0,32$, como apresentado em [6]; e α_{DE} , α_{DD} , α_{TE} , α_{TD} , correspondem aos ângulos de deriva, que surgem no contato do pneu com o solo, durante um movimento em curva.

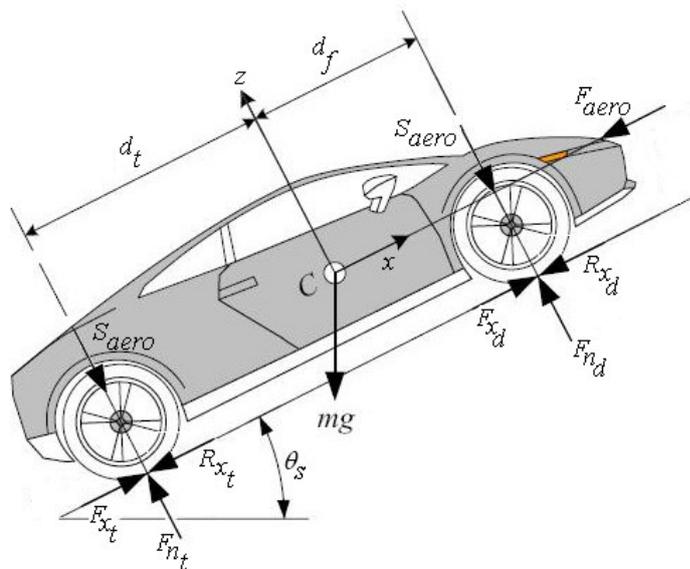


Figura 26: Equilíbrio de forças externas longitudinais e verticais de um veículo em movimento. Vista lateral do veículo.

A força longitudinal, F_x é gerada no contato do pneu com o solo, transmitida para as suspensões e, posteriormente, para o chassi. Seu modelo analítico correspondente depende das transformações provocadas pelo sistema de suspensão e da complexidade de sua geometria.

A força correspondente à resistência a rolagem, R_x , que se contrapõe à força longitudinal F_x , também é determinada a partir do contato do pneu com o solo e

do peso do veículo. Ela também é transmitida ao chassi pela suspensão, que transforma a resistência a rolagem de acordo com a complexidade de sua geometria.

$$\begin{aligned}
 R_{x_{DE}} &= (f_o + kv_{x_{DE}}^2) F_{N_{DE}} \\
 R_{x_{DD}} &= (f_o + kv_{x_{DD}}^2) F_{N_{DD}} \\
 R_{x_{TE}} &= (f_o + kv_{x_{TE}}^2) F_{N_{TE}} \\
 R_{x_{TD}} &= (f_o + kv_{x_{TD}}^2) F_{N_{TD}}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Ao observar a Figura 25 pode-se realizar o equilíbrio de forças laterais que atuam sobre o veículo. Como também é considerada uma inclinação da pista, de maneira a permitir trajetórias no espaço, ao aplicar a 2ª Lei de Newton encontra-se

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_y &= F_{y_{DE}} + F_{y_{DD}} + F_{y_{TE}} + F_{y_{TD}} - R_{x_{DE}} \text{sen} \alpha_{DE} \dots \\
 \dots - R_{x_{DD}} \text{sen} \alpha_{DD} - R_{x_{TE}} \text{sen} \alpha_{TE} - R_{x_{TD}} \text{sen} \alpha_{TD} - m_{total} g \text{sen}(\phi_s) \cos(\theta_s)
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Assim como foi definido para o equilíbrio de forças longitudinais, as parcelas de forças laterais, em cada uma das rodas, são transmitidas para o chassi, sofrendo as transformações necessárias, de acordo com a geometria do sistema de suspensão.

O equilíbrio de forças externas verticais compreende as forças normais e a ação da gravidade. Assim como foi determinado para as forças longitudinais e laterais, a ação das forças verticais também sofre influência do sistema de suspensão. O equacionamento apresentado compreende as parcelas resultantes e presentes no contato entre o chassi e a suspensão, como pode ser verificado na Figura 27. Assim, o equacionamento que determina o equilíbrio das forças verticais que atuam sobre o chassi, corresponde a

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_z &= F_{z_{DE}} + F_{z_{DD}} + F_{z_{TE}} + F_{z_{TD}} - S_{aero_{DE}} - S_{aero_{DD}} \dots \\
 \dots - S_{aero_{TE}} - S_{aero_{TD}} - m_s g \cos(\theta_s) \cos(\phi_s)
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

onde m_s é a massa suspensa do veículo. S_{aero} corresponde à força aerodinâmica que pressiona o carro contra o solo, aumentando seu peso e, conseqüentemente, as

forças geradas no contato do pneu com o solo. Ela corresponde, para cada uma das rodas, ao seguinte equacionamento.

$$S_{aero_{DE}} = S_{aero_{DD}} = \frac{d_t}{2(d_f + d_t)} \rho C_l A_f v_x^2$$

$$S_{aero_{TE}} = S_{aero_{TD}} = \frac{d_f}{2(d_f + d_t)} \rho C_l A_f v_x^2$$
(4.43)

onde C_l corresponde ao coeficiente de sustentação aerodinâmica do veículo, d_t corresponde a distância do C.G. ao eixo traseiro e d_f corresponde a distância do C.G. ao eixo dianteiro.

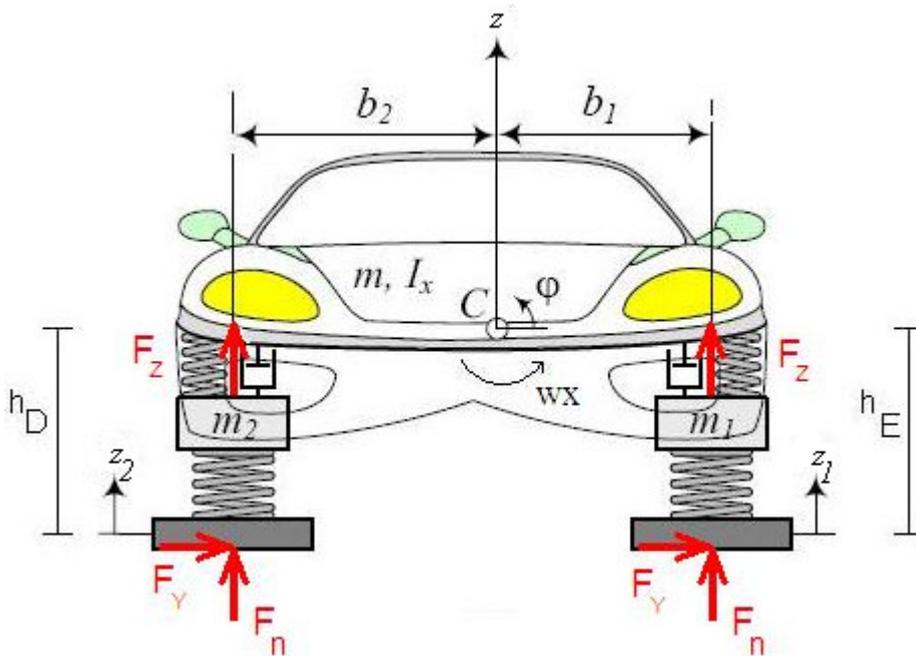


Figura 27: Equilíbrio de forças e momentos em torno do eixo x.

Determina-se, então, o modelo analítico para o equilíbrio de momentos em cada um dos movimentos angulares que o veículo é capaz de fazer. Para tanto é considerada a presença de um sistema de suspensão como elemento acoplador entre o chassi e os pneus-rodas, como pode ser visualizado na Figura 27.

Para o movimento de guinada, ou “Yaw”, considera-se a distribuição de forças tal como a apresentada na Figura 28.

Com base nas distâncias e distribuição de forças, o somatório dos momentos em torno do eixo z, para o movimento de guinada, é dado por

$$\begin{aligned} \Sigma M_z = & d_f (F_{yDE} - R_{x_{DE}} \text{sen} \alpha_{DE} + F_{yDD} - R_{x_{DD}} \text{sen} \alpha_{DD}) \dots \\ & \dots - d_t (F_{yTE} - R_{x_{TE}} \text{sen} \alpha_{TE} + F_{yTD} - R_{x_{TD}} \text{sen} \alpha_{TD}) \dots \\ & \dots + \frac{b_d}{2} (R_{x_{DE}} \cos \alpha_{DE} + F_{x_{DD}}) - \frac{b_d}{2} (R_{x_{DD}} \cos \alpha_{DD} + F_{x_{DE}}) \dots \\ & \dots + \frac{b_t}{2} (R_{x_{TE}} \cos \alpha_{TE} + F_{x_{TD}}) - \frac{b_t}{2} (R_{x_{TD}} \cos \alpha_{TD} + F_{x_{TE}}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

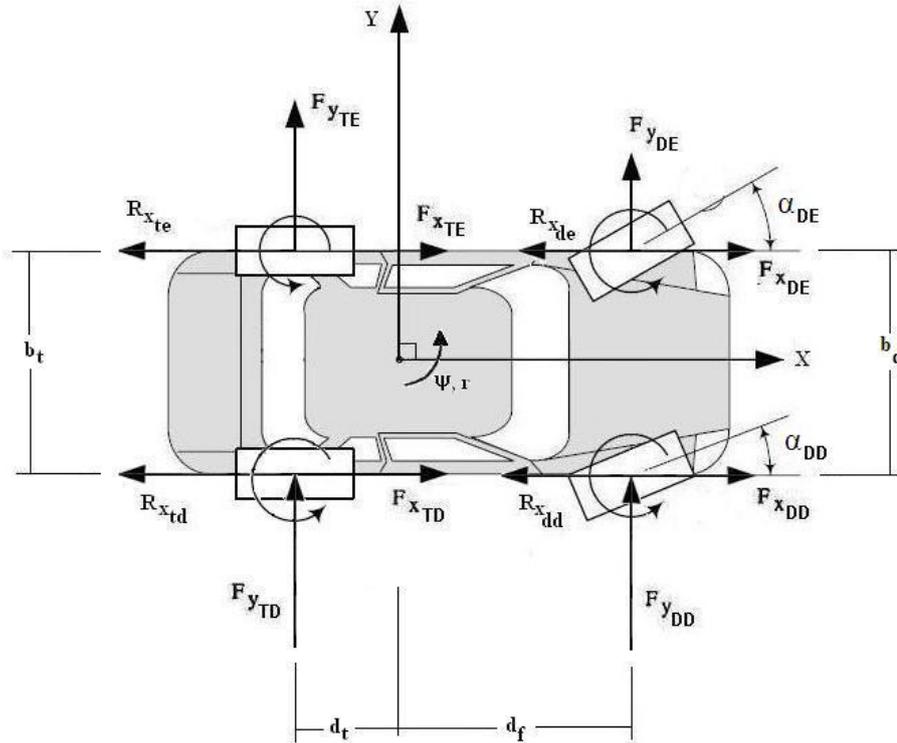


Figura 28: Distribuição de forças, vista superior do veículo.

Para o movimento de arfagem, ou “Pitch”, considera-se que o ponto de atuação das forças, no contato pneu-solo, está no mesmo eixo que o ponto de contato entre as suspensões e o chassi. A distribuição de forças para determinação do equilíbrio de momentos do movimento de arfagem pode ser visualizada na Figura 29. Seu equacionamento é apresentado a seguir.

$$\begin{aligned} \Sigma M_y = & d_t (F_{z_{TE}} + F_{z_{TD}}) - d_f (F_{z_{DE}} + F_{z_{DD}}) + h_{DE} (R_{x_{DE}} \cos \alpha_{DE} - F_{x_{DE}}) \dots \\ & \dots + h_{DD} (R_{x_{DD}} \cos \alpha_{DD} - F_{x_{DD}}) + h_{TE} (R_{x_{TE}} \cos \alpha_{TE} - F_{x_{TE}}) \dots \\ & \dots + h_{TD} (R_{x_{TD}} \cos \alpha_{TD} - F_{x_{TD}}) + d_f (S_{aero_{DE}} + S_{aero_{DD}}) - d_t (S_{aero_{TE}} - S_{aero_{TD}}) \end{aligned} \quad (4.45)$$

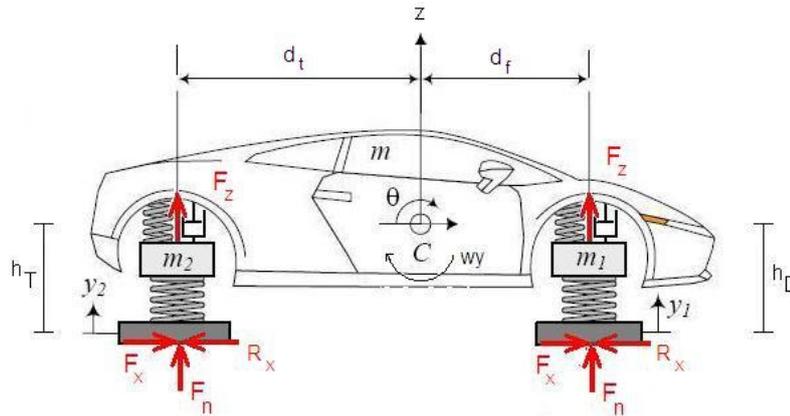


Figura 29: Equilíbrio de momentos em torno do eixo y.

Para o movimento de rolagem, ou “Roll”, o equacionamento leva em consideração as mesmas suposições adotadas para os outros dois movimentos angulares. A distribuição de forças, usadas para determinar o equacionamento, pode ser visualizado na Figura 27.

$$\begin{aligned} \Sigma M_x = & \frac{b_f}{2} (F_{z_{DE}} - F_{z_{DD}}) + \frac{b_t}{2} (F_{z_{TE}} - F_{z_{TD}}) + h_{DE} (F_{y_{DE}} - R_{x_{DE}} \text{sen} \alpha_{DE}) \dots \\ & \dots + h_{DD} (F_{y_{DD}} - R_{x_{DD}} \text{sen} \alpha_{DD}) + h_{TE} (F_{y_{TE}} - R_{x_{TE}} \text{sen} \alpha_{TE}) + h_{TD} (F_{y_{TD}} - R_{x_{TD}} \text{sen} \alpha_{TD}) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Em todos os equacionamentos para equilíbrio de momentos são utilizadas distâncias que definem a geometria do veículo. Estas distâncias são definidas como bitola dianteira (b_f), bitola traseira (b_t), distância entre o C.G. do veículo e o eixo dianteiro (d_f), distância entre o C.G. do veículo e o eixo traseiro (d_t) e as alturas entre o ponto de contato do pneu com o solo e o ponto de acoplamento das suspensões com o chassi. Estas últimas distâncias são variáveis e compostas pelo raio de cada roda e a altura da suspensão, em um dado instante de tempo. Assim, as alturas são definidas como

$$\begin{aligned} h_{DE} &= h_{cg} - (c_{pneu_{DE}} + c_{susp_{DE}}) \\ h_{DD} &= h_{cg} - (c_{pneu_{DD}} + c_{susp_{DD}}) \\ h_{TE} &= h_{cg} - (c_{pneu_{TE}} + c_{susp_{TE}}) \\ h_{TD} &= h_{cg} - (c_{pneu_{TD}} + c_{susp_{TD}}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde h_{cg} corresponde à altura do centro de gravidade do veículo, antes de assentá-lo sob seu peso próprio. Já as variáveis c_{pneu} e c_{susp} correspondem à compressão vertical do pneu e da suspensão, respectivamente.

Ao combinar os equacionamentos apresentados nesta seção, para os somatórios das forças e momentos longitudinais, laterais e verticais, com os equacionamentos para dinâmica interna, desenvolvidos na seção 4.1.3, tem-se o modelo completo para dinâmica do chassi do veículo.

4.2. Suspensão Passiva

O modelo de suspensão a ser adotado neste trabalho corresponde a uma suspensão passiva, representada como um sistema mola-amortecedor simples, linear, que possui apenas um grau de liberdade, ao longo do eixo Z. Dessa forma todas as forças aplicadas ao longo dos eixos X e Y são passadas integralmente aos demais sistemas acoplados às suspensões. A Figura 30 apresenta um diagrama do modelo simplificado de suspensão, com os deslocamentos e velocidades possíveis. Todos os efeitos das massas suspensas e não suspensas foram deixados para serem representados nos dois sistemas que se ligam à suspensão, mais especificamente o chassi e o conjunto pneu-roda. Este procedimento é feito como uma forma de simplificar a modelagem e não compromete a validação física do modelo, que corresponde, na sua essência, a um distribuidor de forças, para o chassi e para a roda.

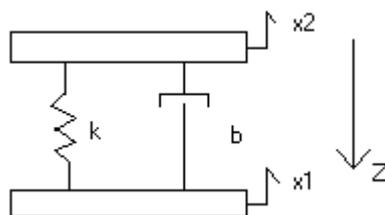


Figura 30: Representação do sistema de suspensão passiva.

Usando os conceitos de fluxo de potência e causalidade da teoria de grafos de ligação, é possível identificar as variáveis de entrada e saída do sistema, de acordo com a construção do sistema. As variáveis de entrada correspondem às velocidades provenientes do chassi, v_{sz} , e do pneu/roda, v_{sp} . As variáveis de saída

corresponderão, então, às forças que atuam nos pontos de acoplamento com o chassi, F_z , e com o pneu/roda, F_s .

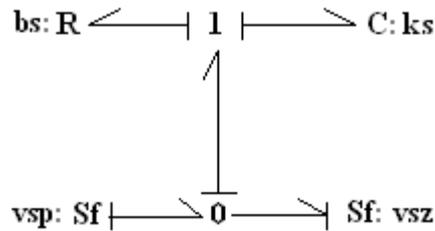


Figura 31: Modelo em grafo de ligação da suspensão passiva.

Realizando o equacionamento, de acordo com o grafo de ligação correspondente, apresentado na Figura 31, encontra-se a equação (4.48) a seguir.

$$\begin{aligned}
 [\dot{q}] &= [0][q] + [1 \quad -1] \begin{bmatrix} v_{sp} \\ v_{sz} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} F_s \\ F_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_s \\ k_s \end{bmatrix} [q] + \begin{bmatrix} b_s & -b_s \\ b_s & -b_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{sp} \\ v_{sz} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.48}$$

Na equação (4.48) F_s corresponde à resultante de forças verticais passada ao sistema pneu/roda, em cada um dos quatro sistemas de suspensão possíveis. F_z corresponde à resultante de forças verticais passada ao chassi na modelagem realizada na seção 4.1.4. Já q corresponde à variável de estado, interna ao sistema, que representa o deslocamento relativo entre o pneu e o chassi, c_{susp} , no ponto de acoplamento com a suspensão que deve ser subtraído do comprimento original da suspensão, sem pré-carga, para resultar na altura efetiva do componente. O mesmo deve ser feito para a determinação da altura efetiva do conjunto pneu-solo. As constantes k_s e b_s correspondem aos coeficientes de rigidez e de amortecimento da suspensão.

4.3. Sistema de Propulsão

O sistema de propulsão, aqui desenvolvido, será baseado no apresentado em [9]. No entanto, ao invés de considerar um veículo com tração em duas rodas,

considera-se, para efeitos de projeto do controlador homeostático, um veículo com tração independente nas quatro rodas, conforme será abordado durante o desenvolvimento dos modelos. Isso deve ser feito para que se permita uma maior possibilidade de ações de controle, para um rápido restabelecimento de sua condição de homeostase, quando alguma situação de emergência ocorrer e o veículo perder estabilidade local e/ou global. O sistema de propulsão será formado por um motor, um sistema de acoplamento entre motor e transmissão - que pode ser um conjunto de embreagem com caixa de marchas tradicional, um mecanismo de transmissão automática, ou um mecanismo de transmissão CVT, diferencial central, diferencial frontal, diferencial traseiro, eixos e semi-eixos para distribuição de potência e as rodas, como apresentado na Figura 32.

Para o sistema de propulsão também se faz o equilíbrio de forças e momentos para cada um dos blocos, respeitando o conceito de fluxo de potência. E, para tanto, é preciso identificar as variáveis de potência presentes, mais especificamente torques e velocidades angulares. Inicialmente define-se o sistema de propulsão inteiro em um grafo de ligação literal, conforme apresentado na Figura 33.

É possível notar que já existe uma separação de cada componente do sistema de propulsão. E mais do que isso, é possível agrupá-los em categorias, de acordo com a função que desempenhem. Como existem quatro ramificações iguais, uma para cada roda, com os mesmos componentes compondo cada ramificação do chassi até o contato do pneu com o solo, só é preciso construir o grafo de ligação para uma delas. Para representar os mesmos componentes, em diferentes pontos da dinâmica veicular, ou em diferentes funções, como é o caso dos diferenciais, eixos e semi-eixos, basta que os parâmetros do modelo sejam modificados em cada ponto específico. Separando cada subsistema em um modelo diferente, para ser acoplado futuramente, encontram-se grupos de subsistemas que serão modelados individualmente, tais como motor, embreagem, caixa de mudanças, diferenciais, eixos de transmissão e conjunto roda-pneu.

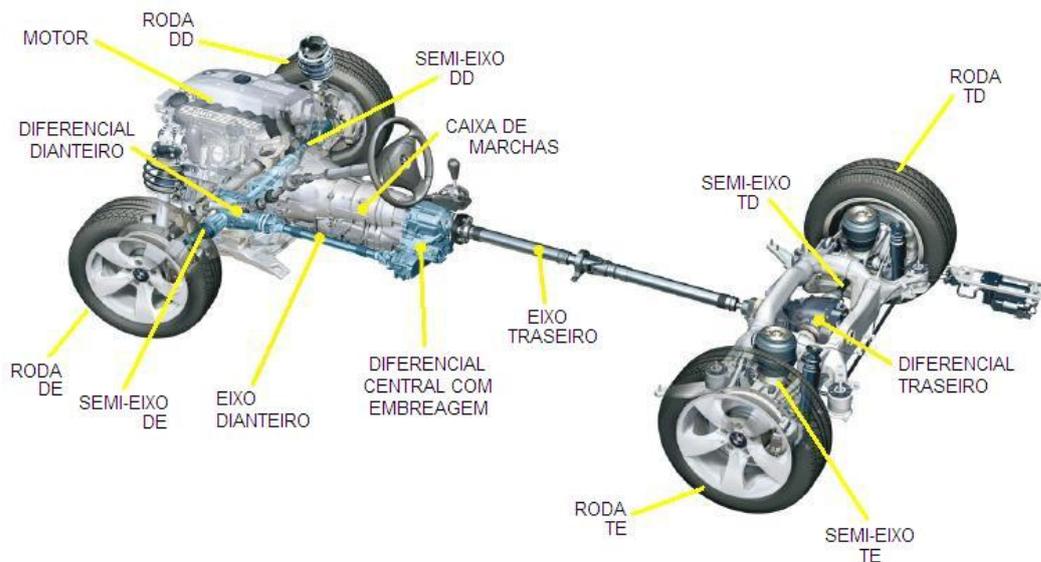


Figura 32: Componentes do Sistema de Propulsão.

Assim como foi realizado nos demais modelos, considera-se que todos os componentes do sistema de propulsão correspondem a corpos rígidos, sem perdas entre as suas conexões.

4.3.1. Motor

O primeiro componente do sistema de propulsão corresponde ao motor. Aqui será modelada apenas a parte de transmissão mecânica de movimento, já que o importante para este trabalho é saber como será realizada a propagação de torque propulsor até as rodas. A parte do equacionamento relativa à combustão interna do motor, que é a responsável pela geração do torque propulsor, será representada por uma equação polinomial de 3ª ordem, obtida através de um gráfico de torque de um motor central de 3,5l de um carro esportivo. O gráfico deste motor é apresentado na Figura 34.

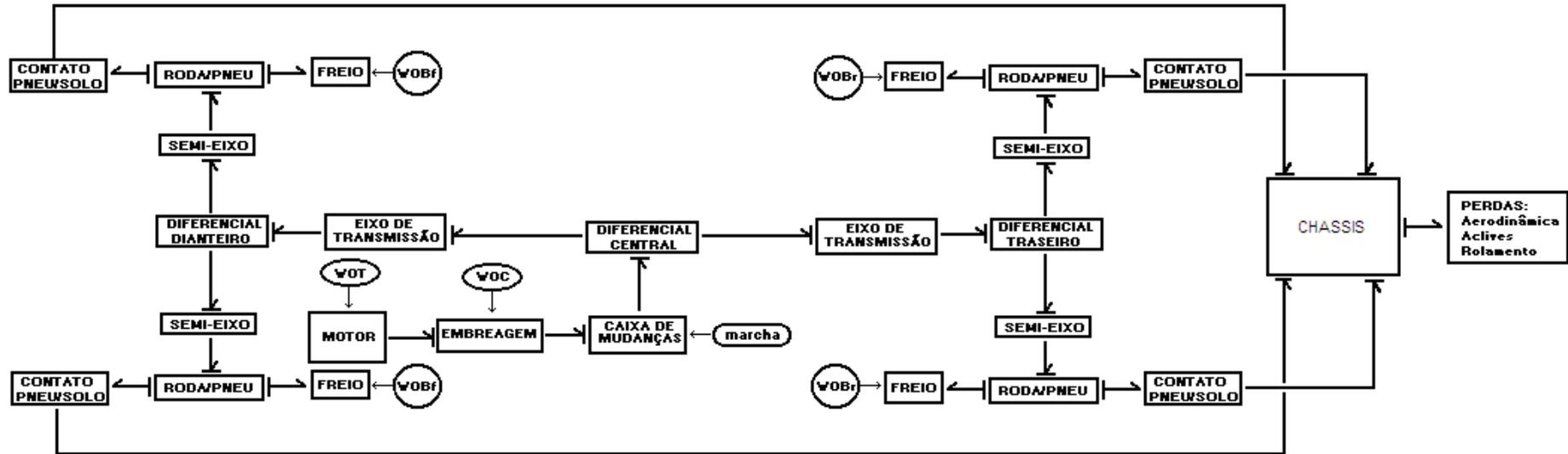


Figura 33: Grafo de fluxo de potência da dinâmica veicular longitudinal completa.

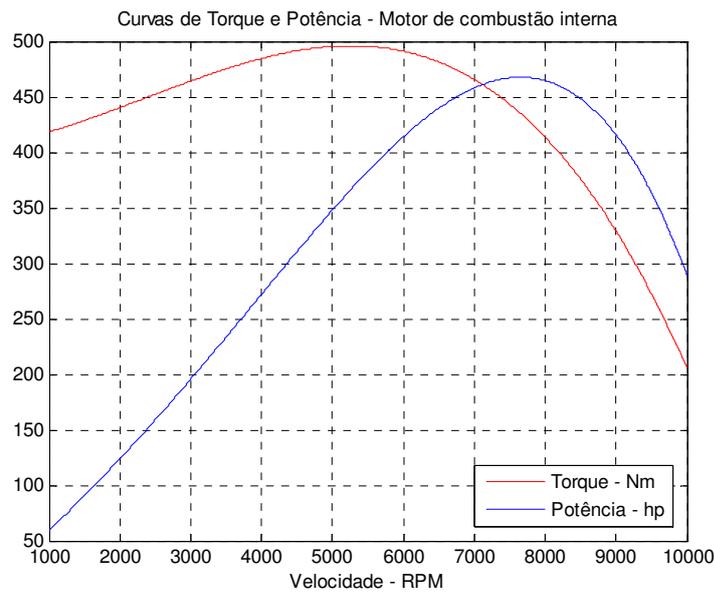


Figura 34: Curvas de torque e potência de motor central de 3,5l.

O torque gerado pelo motor deve ser suficiente para vencer sua inércia, as perdas internas e as cargas, ou os demais componentes, que estejam acopladas ao seu eixo. Ele representa a fonte de potência que move o veículo. O modelo do motor será obtido a partir de um grafo de ligação isolado, considerando as conexões entre seus sistemas vizinhos como fontes de esforço e/ou fluxo, conforme observado na Figura 35. Para efeitos de modelagem o motor será representado aqui por um momento de inércia (I_3), indicando suas massas rotativas; um resistor (R_4) que indica as perdas de potência por atrito; e duas fontes supostas ideais.

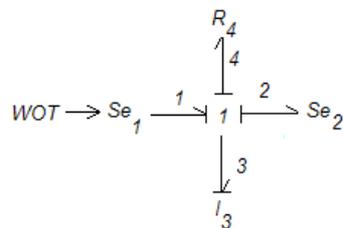


Figura 35: Grafo de Ligação do motor

A primeira fonte (Se_1) corresponde ao torque proveniente da combustão interna, T_m , e é quem fornece o torque propulsor, responsável pelo movimento do carro. O torque propulsor é controlado pela abertura da borboleta do pedal do

acelerador, representada no modelo pela variável *WOT* (*wide open throttle*), que determina o percentual de aceleração passado pelo motorista. A função que representa o torque fornecido pela fonte de esforço Se_1 corresponde a uma equação paramétrica de 3ª ordem

$$Se_1 = T_m = WOT \left[c_1 \omega_m^3 + c_2 \omega_m^2 + c_3 \omega_m + c_4 \right] \quad (4.49)$$

onde ω_m representa a velocidade de giro do motor e os parâmetros c_1 a c_4 determinam o perfil da curva do motor.

A segunda fonte ideal (Se_2), que é apresentada como uma fonte de esforço com fluxo de potência saindo do motor, representa a sua ação sobre o sistema seguinte, a embreagem ou outro mecanismo de acoplamento entre a transmissão e o motor. Este torque corresponde à carga que o veículo exerce sobre o motor, T_{carga} . Pode-se observar na Figura 35, que o motor gera uma velocidade angular correspondente à velocidade do eixo do motor, ainda a ser acoplada à embreagem e conseqüente mente, ao veículo.

De posse do grafo de ligação apresentado na Figura 35 é possível escrever as equações constitutivas do modelo, Equações (4.50) e (4.51), e descobrir quem são as variáveis de entrada e saída, que permitirão efetuar o acoplamento dos subsistemas futuramente.

$$\begin{aligned} f_1 = f_3 = f_2 = f_4 = \omega_m \\ e_3 = J_m \dot{\omega}_m = e_1 - e_4 - e_2 = T_m - T_{carga} - b_m \omega_m \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_3 = e_3 = J_m \dot{\omega}_m \\ f_3 = \frac{1}{I_3} p_3 = \frac{1}{J_m} J_m \omega_m = \omega_m \\ e_4 = R_4 f_4 = b_m \omega_m \end{aligned} \quad (4.51)$$

A variável p_3 corresponde à velocidade de giro do motor, multiplicada pela inércia de giro do motor, J_m , e é utilizada como variável de estado, que servirá de base para que se efetue o equacionamento do modelo dinâmico do motor. Porém, o que interessa é a relação matemática entre as variáveis de entrada e saída. Assim, faz-se necessário, também, identificar cada uma delas. As variáveis de entrada correspondem aos esforços e_1 e e_2 , que são os torques provenientes da

queima de combustível no interior da câmara do motor, T_m , e da carga referente ao veículo, T_{carga} , respectivamente. As variáveis de saída correspondem aos fluxos f_1 e f_2 , que correspondem à mesma grandeza física: a velocidade angular do motor, ω_m .

Substituindo-se as equações constitutivas dos elementos de maneira a determinar a relação entre cada um deles e obter o modelo dinâmico, encontra-se o seguinte sistema de equações em forma de espaço de estados, equação (4.52).

$$\begin{aligned} [\dot{p}_3] &= \begin{bmatrix} -b_m \\ J_m \end{bmatrix} [p_3] + [I \quad -I] \begin{bmatrix} T_m \\ T_{carga} \end{bmatrix} \\ [\omega_m] &= \begin{bmatrix} I \\ J_m \end{bmatrix} [p_3] + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} T_m \\ T_{carga} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Este modelo simples representa a dinâmica do motor necessária ao início do desenvolvimento do controlador homeostático. Ele considera a existência de perdas internas em função de atritos, uma inércia de giro e as fontes de torque adequadas. Com ele já é possível realizar simulações para verificar sua validade, além de existir margem para aprimoramentos futuros.

4.3.2. Embreagem

Um sistema de embreagem por atrito, encontrada em veículos equipados com câmbio de transmissão manual, consiste de um conjunto de discos que conectam o eixo do motor ao eixo de entrada da transmissão. Considera-se que, quando a embreagem é acionada, não existem perdas por atrito e que a embreagem é um corpo rígido. Por isso as variáveis de potência do motor são integralmente passadas para a transmissão, e vice-versa. A embreagem (Figura 36) é representada por um modelo bastante simples, pois caracteriza apenas o deslizamento que vincula a velocidade angular do eixo do motor à velocidade angular no eixo de transmissão do veículo. Suas equações constitutivas e modelo na forma de espaço de estados são descritos nas Equações (4.53) e (4.54), onde o resistor R_3 , que representa o coeficiente do atrito viscoso existente entre os discos

da embreagem, recebe um sinal de comando, chamado *WOC* (que significa *Wide Open Clutch*, para que fique similar ao *WOT* utilizado no motor. Por hipótese considera-se, nesse caso, $WOC = 0$ ou 1 e, conseqüentemente, $R_3 = 0$ ou ∞ , que significa que a embreagem está desacoplada ou acoplada sem deslizamento, respectivamente. Na prática, o atrito viscoso da embreagem, quando ela estiver engrenada, corresponde a um valor grande o suficiente para tornar eventuais perdas insignificantes para a transmissão do torque do motor adiante no sistema de propulsão. Esta variável de entrada corresponde a uma variável binária que habilita ou desabilita a presença da embreagem, como a ação real do motorista que controla a sua atuação quando realiza a troca de marchas. Note que não se considera a sua variação gradual, tão usada para o início do movimento do veículo e para o emprego do freio motor. Quando o automóvel possuir uma transmissão do tipo CVT o valor da variável *WOC* será igual a 1 sempre, em virtude de a CVT possuir uma transmissão contínua de torque/velocidade, que varia com o aumento da velocidade do carro, e um conversor de torque constantemente conectado, ao invés de uma embreagem.

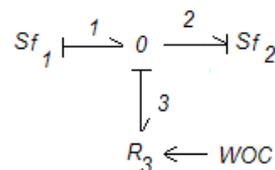


Figura 36: Grafo de Ligação da embreagem.

Observando o grafo de ligação adotado como modelo para este trabalho, percebe-se que a embreagem recebe velocidades (f_1 e f_2), tanto do motor (ω_m) quanto da transmissão ($\omega_{c.m.}$), e devolve o mesmo torque (e_1 , ou e_2), que é proporcional à diferença entre as velocidades de entrada, para ambos os sistemas. A constante que multiplica essa diferença de velocidades, R_3 , corresponde ao coeficiente de atrito viscoso. As equações constitutivas são descritas pelas relações (4.53) e (4.54), sendo que esta última fornece a relação entre as grandezas de entrada e saída do sistema algébrico que descreve o bloco da embreagem.

$$\begin{aligned}
 e_1 = e_2 = e_3 = T_{carga} = T_{emb} \\
 f_3 = f_1 - f_2 = \omega_m - \omega_{c.m.} \\
 e_3 = R_3 f_3 = b_{emb} (\omega_m - \omega_{c.m.})
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$T_{carga} = T_{emb.} = \begin{bmatrix} b_{emb.} & -b_{emb.} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_{c.m.} \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

Suas variáveis de entrada (f_1 e f_2) correspondem aos fluxos, ou velocidades, provenientes do motor, ω_m , e da caixa de marchas, $\omega_{c.m.}$, e suas saídas (e_1 e e_2) correspondem aos torques passados aos dois sistemas adjacentes, T_{carga} e T_{emb} . Porém, este modelo apresenta somente uma relação algébrica entre entradas e saídas, não havendo dinâmica associada.

4.3.3. Transmissão

A transmissão corresponde a um conjunto de engrenagens, cada uma com uma redução diferente para caracterizar as diferentes marchas do veículo e que são definidas como uma função dependente da velocidade (no caso de CVT), ou reduções que mudam suas relações em função da velocidade do automóvel (para os casos de transmissão automática e/ou manual). Diferente dos modelos apresentados até aqui, o modelo para transmissão, ou caixa de marchas, é um pouco mais complexo e traz a representação de elementos de armazenamento de energia (I_3 e C_4), de dissipação (R_5) e de acoplamento (TF), conforme pode ser observada no grafo de ligação que o representa, na Figura 37. O elemento de inércia e o capacitor representam a massa rotacional da caixa e uma rigidez torsional (uma resistência inicial para a transferência da velocidade angular para o eixo de transmissão). O módulo do transformador, indicado por ζ , corresponde à relação de cada uma das marchas, passadas como comandos para o modelo de caixa de mudanças. As equações constitutivas, representadas pelas relações (4.55) a (4.58), apresentam duas variáveis de estado independentes, p_3 e q_4 , e duas variáveis de entrada, e_1 e f_2 , que indicam respectivamente o torque propulsor proveniente da embreagem e do motor, a velocidade angular proveniente do eixo

de transmissão e duas variáveis de saída, e_2 e f_1 , que retratam a propagação das entradas para os sistemas adjacentes. O torque propulsor, e_2 , é passado para o eixo de transmissão enquanto que a velocidade angular, f_1 , é fornecida à embreagem e posteriormente ao motor como carga.

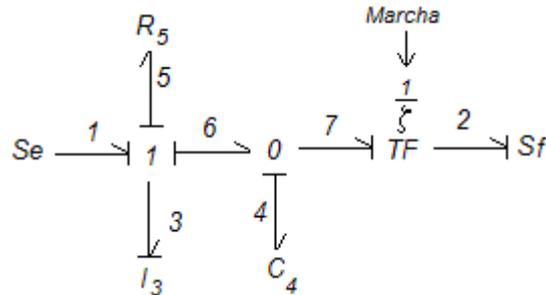


Figura 37: Grafo de Ligação da caixa de mudanças.

As equações constitutivas do bloco caixa de mudanças são representadas pelas relações (4.55) a (4.58).

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_3 = f_5 = \omega_{c.m.} \\
 e_3 &= e_1 - e_5 - e_6 = T_{emb} - b_{c.m.} \omega_{c.m.} - T_{carga_{c.m.}}
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
 e_6 &= e_4 = e_7 = T_{carga_{c.m.}} \\
 f_4 &= f_6 - f_7 = \omega_{c.m.} - \omega_{carga}
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_3 &= e_3 = J_{c.m.} \omega_{c.m.} \\
 f_3 &= \frac{1}{I_3} p_3 = \frac{1}{J_{c.m.}} J_{c.m.} \omega_{c.m.} \\
 \dot{q}_4 &= f_4 = \frac{1}{k_{c.m.}} \dot{T}_{carga_{c.m.}} \\
 e_4 &= \frac{1}{C_4} q_4 = k_{c.m.} \frac{T_{carga_{c.m.}}}{k_{c.m.}}
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
 f_7 &= \zeta f_2 = \zeta \omega_{d.c.} \\
 e_2 &= \zeta e_7 = \zeta T_{carga_{c.m.}} \\
 e_5 &= R_5 f_5 = b_{c.m.} \omega_{c.m.}
 \end{aligned}
 \tag{4.58}$$

O modelo em espaço de estado é representado pela Equação (4.59).

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b_{c.m.}}{J_{c.m.}} & -k_{c.m.} \\ \frac{1}{J_{c.m.}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{emb.} \\ \omega_{d.c.} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{c.arg.a.c.m.} \\ T_{c.m.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{c.m.}} & 0 \\ 0 & \zeta k_{c.m.} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

4.3.4. Eixo de Transmissão

O eixo de transmissão é o componente que conecta o diferencial central ao diferencial dianteiro, ou traseiro. O seu modelo também é utilizado para descrever os semi-eixos, que ligam os diferenciais, traseiro ou dianteiro, às rodas.

Para seu modelo escolheu-se uma representação de um corpo flexível em forma de uma barra, que apresenta rigidez à torção (C_4), inércia (I_3) e dissipação de potência (R_5), devida aos mancais nas duas extremidades. O grafo de ligação resultante desta abordagem de modelagem pode ser visualizado na Figura 38. Este modelo faz a propagação do torque propulsor, em um sentido do fluxo de potência, e no outro se caracteriza pela transmissão da velocidade angular. As suas equações constitutivas aparecem descritas pelas relações (4.60) a (4.63), tendo como variáveis de entrada e_1 e f_2 , e como variáveis de saída f_1 e e_2 . As fontes S_e e S_f estão representando os acoplamentos com os demais modelos. A fonte de esforço (S_e) caracteriza o torque propulsor, proveniente do diferencial, enquanto a fonte de fluxo (S_f) representa as velocidades provenientes ou das rodas, ou dos diferenciais, dianteiro e traseiro. A causalidade do grafo de ligação indica que os elementos puros de armazenamento, capacitor e inércia, são responsáveis pela existência de duas variáveis de estado independentes e que possibilitarão a construção do modelo dinâmico em forma de espaço de estado, dado pela equação (4.64).

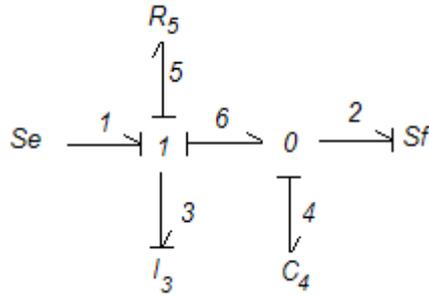


Figura 38: Grafo de Ligação do eixo de transmissão.

$$f_1 = f_3 = f_5 = f_6 = \omega_{e.t.} \tag{4.60}$$

$$e_3 = e_1 - e_5 - e_6 = T_{dif.} - b_{e.t.} \omega_{e.t.} - T_{carga}$$

$$e_6 = e_4 = e_2 = T_{e.t.} \tag{4.61}$$

$$f_4 = f_6 - f_2 = \omega_{e.t.} - \omega_{carga}$$

$$\dot{p}_3 = e_3 = J_{e.t.} \dot{\omega}_{e.t.}$$

$$f_3 = \frac{1}{I_3} p_3 = \frac{1}{J_{e.t.}} J_{e.t.} \omega_{e.t.} \tag{4.62}$$

$$\dot{q}_4 = f_4 = \frac{1}{k_{e.t.}} \dot{T}_{e.t.}$$

$$e_4 = \frac{1}{C_4} q_4 = k_{e.t.} \frac{T_{e.t.}}{k_{e.t.}}$$

$$e_5 = R_5 f_5 = b_{e.t.} \omega_{e.t.} \tag{4.63}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b_{e.t.}}{J_{e.t.}} & -k_{e.t.} \\ \frac{1}{J_{e.t.}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{dif.} \\ \omega_{carga} \end{bmatrix} \tag{4.64}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{e.t.} \\ T_{e.t.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{e.t.}} & 0 \\ 0 & k_{e.t.} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

**4.3.5.
Diferencial**

O diferencial, que corresponde a um conjunto de engrenagens montadas de maneira a permitir velocidades diferentes aos eixos que são conectados a ele, possui uma redução conhecida, que é levada em conta na modelagem do seu modelo dinâmico. O diferencial representa a distribuição do esforço proveniente do acoplamento entre a caixa de mudanças e o motor para cada um dos eixos de transmissão, dianteiro e traseiro. No caso dos diferenciais corresponderem aos posicionados na dianteira e/ou traseira do veículo, eles são responsáveis por distribuir os torques provenientes dos eixos, dianteiro ou traseiro, para os semi-eixos e, por conseguinte, para as rodas. Decidiu-se manter sua representação o mais simples possível, ao considerá-lo como um diferencial ideal. Com isso não há dissipação de potência, nem armazenamento e, conseqüentemente, a potência que entra é passada integralmente adiante para os subsistemas subseqüentes. A Figura 39 apresenta o grafo de ligação utilizado para determinar o modelo dinâmico do diferencial.

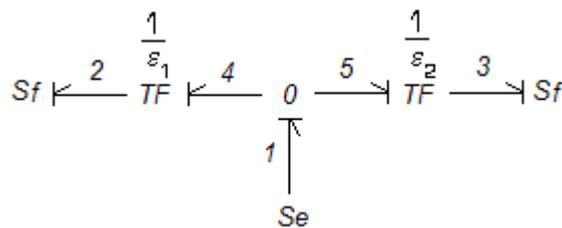


Figura 39: Grafo de Ligação do diferencial.

As equações constitutivas são descritas pelas relações (4.65) e (4.66) e a relação algébrica que determina as grandezas de entrada (e_1, f_2, f_3) e saída (f_1, e_2, e_3), aparece representada na equação (4.67).

$$\begin{aligned}
 e_4 = e_1 = e_5 = T_{e.t.} \\
 f_1 = f_4 + f_5 = \omega_{ramo_1} + \omega_{ramo_2}
 \end{aligned}
 \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
 e_2 = \epsilon_1 e_4 = \epsilon_1 T_{e.t.} \\
 f_4 = \epsilon_1 f_2 = \epsilon_1 \omega_{ramo_1} \\
 e_3 = \epsilon_2 e_5 = \epsilon_2 T_{e.t.} \\
 f_5 = \epsilon_2 f_3 = \epsilon_2 \omega_{ramo_2}
 \end{aligned}
 \tag{4.66}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{e\ arg\ a} \\ T_{ramo_1} \\ T_{ramo_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{e.t.} \\ \omega_{ramo_1} \\ \omega_{ramo_2} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Como pode ser percebido na Figura 39 e nas equações (4.65) e (4.67), decidiu-se por um modelo de diferencial que permite distribuições de torque propulsor independentes entre os dois eixos de transmissão aos quais ele estiver ligado, para permitir uma ação de controle mais adequada à situação que o veículo estiver submetido. Este modelo de diferencial será utilizado também para os diferenciais dianteiro e traseiro, que distribuem o torque propulsor para cada uma das quatro rodas. Se houver a necessidade de adicionar uma ampliação do torque fornecido pelo diferencial, seu grafo de ligação e, conseqüentemente, seu modelo dinâmico precisam ser modificados para que um transformador seja adicionado na entrada, logo após a fonte de esforço S_e e antes da ligação “0”, conforme pode ser observado na Figura 40.

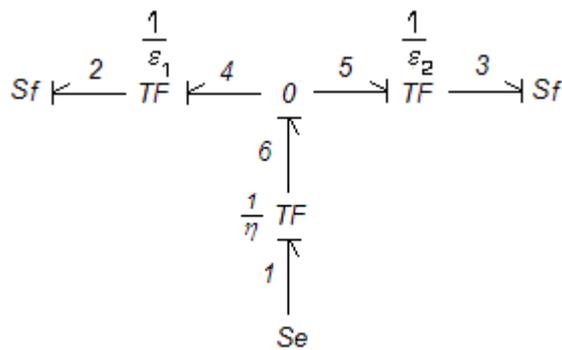


Figura 40: Grafo de ligação do diferencial modificado.

O equacionamento para este modelo aumentado corresponde ao acréscimo de um termo multiplicador à equação (4.67) apenas, resultando na equação (4.68).

$$\begin{bmatrix} \omega_{carga} \\ T_{ramo_1} \\ T_{ramo_2} \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{e.t.} \\ \omega_{ramo_1} \\ \omega_{ramo_2} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

No modelo apresentado pelas equações (4.65) a (4.67), as variáveis de entrada correspondem ao torque propulsor (e_1), proveniente do motor após ter passado pela embreagem, caixa de mudança e algum eixo de transmissão, e às velocidades de rotação (f_2 e f_3) dos semi-eixos conectados ao diferencial. O torque propulsor é passado a cada um dos eixos conectados como variáveis de saída (e_2 e e_3), enquanto que as velocidades de rotação são combinadas e repassadas à caixa de embreagem ou eixo de transmissão como uma única velocidade (f_1).

4.3.6. Semi-eixo

O semi-eixo corresponde ao elemento que realiza a ligação entre o diferencial e a roda, no caso de veículos com tração em duas rodas apenas. No caso de veículos com tração nas quatro rodas, antes de chegar ao semi-eixo, o torque propulsor é passado a um eixo intermediário, que liga o diferencial central a um diferencial, seja ele o dianteiro ou o traseiro. Esta ligação é feita para que seja possível distribuir o torque propulsor entre as rodas frontais e traseiras. Após o diferencial dianteiro/traseiro, então, conecta-se o semi-eixo que distribui o torque propulsor à roda.

Em sistemas de propulsão convencionais o torque propulsor é dividido igualmente entre os dois semi-eixos. A variação de tração nas rodas é definida em função da velocidade e da carga representada por cada uma delas, de acordo com o terreno e a trajetória que o veículo estiver percorrendo. Atualmente, em sistemas de segurança ativa, principalmente em casos de sistemas de tração diferenciada nas duas/quatro rodas, esse torque pode ser variado, de maneira a garantir uma aderência adequada em qualquer instante do movimento do veículo, como apresentado nas referências [20], [23] e [24].

Considera-se, neste trabalho, que o semi-eixo possui exatamente o mesmo modelo apresentado para o eixo de transmissão, que é descrito pelas equações (4.60) a

(4.64). Por este motivo, novos equacionamentos não serão desenvolvidos. Apenas quando for o momento de montar o sistema de propulsão, deve-se atentar para os valores de parâmetros intrínsecos a cada tipo de eixo em particular.

4.3.7. Integração no Sistema de Propulsão

Para obter o sistema de propulsão, tal como utilizado em veículos em geral, é preciso combinar os componentes abordados nos tópicos anteriores deste capítulo. Como todos os componentes foram desenvolvidos utilizando a técnica de grafo de ligação, onde há uma definição do fluxo de potência com a identificação adequada das variáveis de entrada e saída do modelo, a tarefa de construir o modelo do sistema de propulsão fica bastante facilitada, bastando conectar os modelos desenvolvidos na ordem correta para a composição do sistema dinâmico. O modelo dinâmico do sistema de propulsão sustenta o argumento de modularidade para o desenvolvimento de sistemas de controle embarcados, pois a partir da existência de múltiplos componentes, com seus próprios modelos dinâmicos, é mais simples construir um sistema dinâmico virtual, que servirá de base para a determinação da ação de controle adequada ao restabelecimento de uma condição de homeostase local. Com o modelo do sistema de propulsão modularizado, é possível pensar em controladores para cada componente individualmente, ou para apenas aqueles componentes que realmente necessitem de controle, como por exemplo, os diferenciais. Estes, se dotados de um sistema de controle de distribuição de torques, são capazes de auxiliar o controle de tração e/ou de frenagem do veículo, evitando uma sobrecarga do motor, que geralmente, em sistemas de controle embarcado convencionais presentes no mercado, é o responsável por dosar a quantidade de torque fornecido ao sistema como um todo.

O sistema de propulsão, formado a partir da integração dos modelos dos múltiplos componentes desenvolvidos na seção 4.3, pode ser visualizado na Figura 41, a seguir.

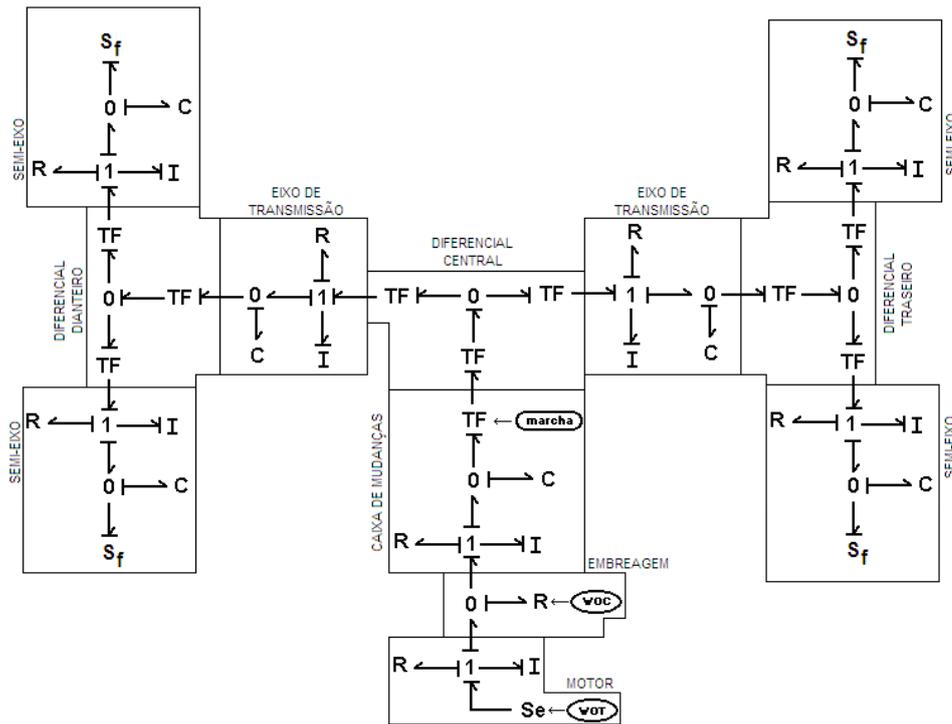


Figura 41: Grafo de ligação do sistema de propulsão completo integrado.

4.4. Roda e Pneu

Este é o elemento de maior importância em toda a dinâmica veicular. É o conjunto roda-pneu que faz o contato com o solo e onde são geradas as forças e velocidades que irão movimentar o carro. Este contato pneu-solo é o responsável pela manutenção da estabilidade do veículo, dentro de uma trajetória desejada e segura. O sistema pneu-roda é, também, o principal na integração de todos os sistemas componentes e onde as ações de controle serão desempenhadas. A Figura 42 ilustra a importância do sistema pneu-roda.

Uma primeira etapa da modelagem do movimento na roda diz respeito ao seu movimento de giro em torno do próprio eixo. Este movimento corresponde a um equilíbrio de torques e considera as ações de aceleração (ou propulsão do veículo) e de frenagem. Estas duas ações, por si só, já representam a integração com outros dois sistemas componentes da dinâmica veicular: os sistemas de propulsão e de frenagem do veículo. A Figura 43 ilustra a distribuição de forças e torques em cada uma das rodas.

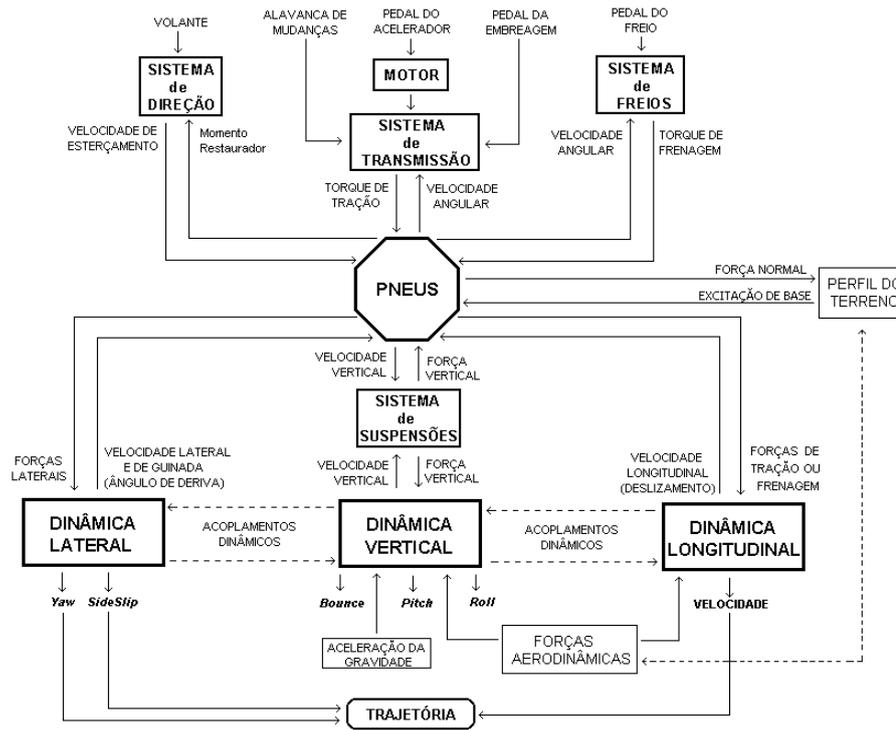


Figura 42: Integração de sistemas e dinâmicas de um veículo.

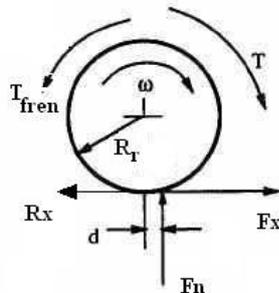


Figura 43: Distribuição de forças e torques durante o giro da roda.

Assim, considerando que o sistema roda-pneu possui uma inércia J_j , pode-se escrever o equacionamento para equilíbrio de forças e torques do movimento de giro, apresentado na equação (4.69) a seguir e conforme [1].

$$\dot{\omega}_j = \frac{1}{J_j} (T_j - R_{r,j} F_{x,j} - T_{fren,j}) \quad \therefore \quad j = DE, DD, TE, TD \quad (4.69)$$

Uma segunda etapa da modelagem está atrelada ao movimento vertical do conjunto roda-pneu, que é interpretado como um sistema massa-mola-amortecedor, conforme indicado na Figura 44. O fluxo de potência deste sistema é

apresentado na Figura 45, e a indicação das variáveis de entrada e saída aparecem na Figura 46. De acordo com este último diagrama, as variáveis de saída são: a velocidade fornecida pelo pneu à suspensão, v_p , e a força normal, F_n , que indica o esforço que o carro exerce sobre o solo.

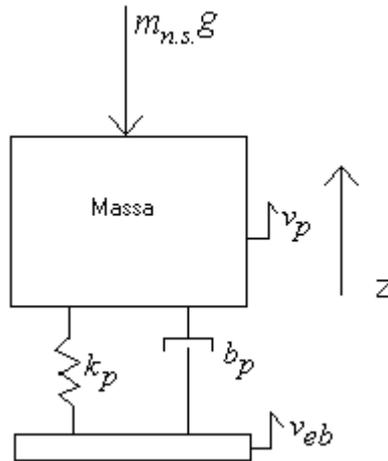


Figura 44: Modelo físico para movimento vertical da roda-pneu.

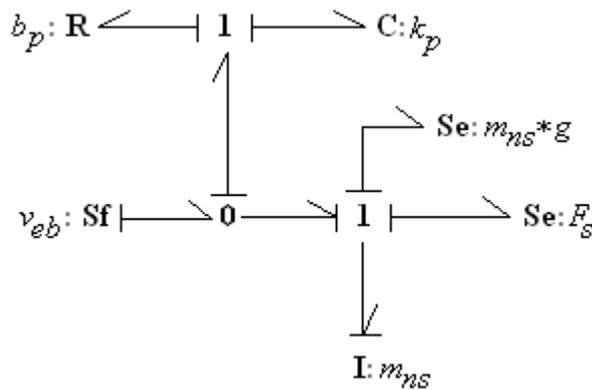


Figura 45: Modelo em grafo de ligação para o pneu, movimento vertical.

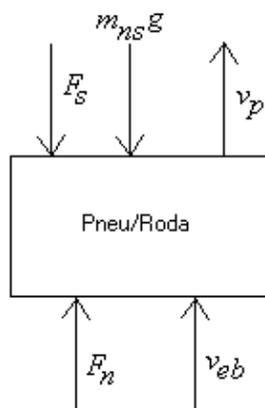


Figura 46: Variáveis de entrada e saída de potência.

As variáveis de entrada são identificadas como a força F_s e a velocidade v_{eb} . A velocidade corresponde à excitação de base, que representa a ação do perfil da pista sobre o pneu. Já a força corresponde ao esforço da suspensão sobre o pneu. Pode ser percebido que, apesar de F_n ser uma variável de saída, seu sentido está orientado para cima, de acordo com o fluxo de potência indicado na Figura 45. O sentido positivo do fluxo indica que as variáveis deverão apresentar a mesma orientação, obedecendo ou não a orientação do referencial adotado para o sistema, influenciando o sinal que a variável irá apresentar na equação analítica. O sistema de orientações adotado para este trabalho determina que os eixos Z e X estão orientados para cima e para frente, respectivamente. As equações analíticas, representativas do modelo físico e em concordância com os conceitos de causalidade e fluxo de potência, formam o seguinte modelo de equações de estado,

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b_p}{m_{ns}} & k_p \\ \frac{-1}{m_{ns}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{eb} \\ F_s \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$\begin{bmatrix} F_n \\ v_{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b_p}{m_{ns}} & k_p \\ \frac{1}{m_{ns}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{eb} \\ F_s \end{bmatrix}$$

A representação em ambiente Simulink do modelo descrito em (4.70) é apresentada na seção 5.1. Percebe-se a simplicidade de sua implementação que facilitará o acoplamento futuro com outros blocos componentes do sistema de dinâmica vertical. As grandezas b_p , m_{ns} e k_p representam a constante de amortecimento, a massa não-suspensa e a constante elástica vertical do pneu. A massa não-suspensa indica a massa do pneu em adição à massa da roda e algumas outras partes componentes do sistema pneu/roda.

O modelo representado por (4.70) representa apenas um único sistema pneu/roda. Para representar as quatro rodas de um veículo, é preciso repetir o

modelo mais três vezes, tomando o cuidado para diferenciar as constantes b_p , m_{ns} e k_p de acordo com a roda que cada parte representar.

4.4.1. Contato Pneu-Solo

De acordo com o apresentado em [1], existem três forças e três momentos agindo sob o pneu a partir do solo. A força longitudinal F_x (de tração ou frenagem) é a componente na direção X da força resultante exercida sobre o pneu pelo solo. A força lateral F_y é a componente na direção Y , e a força normal F_z é a componente na direção Z . O momento de “*overturning*” M_x é o momento em torno do eixo X exercido pelo solo sobre o pneu. O momento de resistência ao rolamento (*rolling resistance*) M_y é o momento em torno do eixo Y , e o momento de alinhamento M_z é o momento em torno do eixo Z .

Com este sistema de coordenadas, muitos parâmetros do pneu podem ser convenientemente definidos. Apenas para constar, a variação longitudinal do centro de pressão normal é definida pela razão entre o momento de resistência ao rolamento (M_y) e a carga normal. A variação lateral do centro de pressão normal é definida pela razão entre o momento de “*overturning*” (M_x) e a carga normal. A integração das tensões de compressão longitudinais sobre toda a área de contato representa a força de tração ou a força de frenagem, dependendo do tipo de movimento a que o veículo estiver desempenhando. Um torque propulsor em torno do eixo de rotação do pneu produz uma força para acelerar o veículo, e outro torque, de frenagem, produz uma força para freá-lo.

Existem dois importantes ângulos associados ao movimento de rotação do pneu: o ângulo de deriva e o ângulo de cambagem. Ângulo de deriva α é o ângulo formado entre a direção que a roda se desloca e a linha de interseção do seu próprio plano, localizado em sua superfície. Ângulo de cambagem γ é o ângulo formado entre o plano XZ e o plano da roda, conforme ilustrado na Figura 47. A força lateral na área de contato pneu-solo é função de ambos os ângulos de deriva e de cambagem. Para efeitos de entendimento da modelagem da dinâmica nos pneus, não será adotado o ângulo de cambagem, considerando que o plano XZ coincide com o plano da roda.

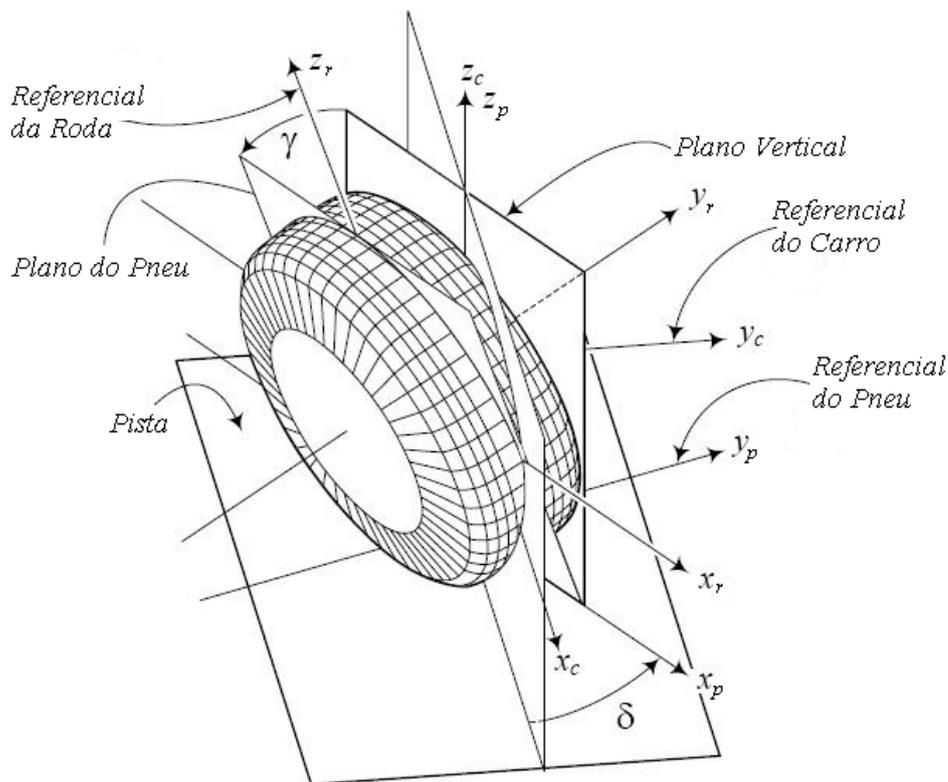


Figura 47: Referenciais existentes no conjunto roda-pneu.

4.4.2. Força de Tração, de Frenagem e Derivas Longitudinais

Quando um torque propulsor é aplicado a um pneu, uma força de tração é desenvolvida na área de contato entre pneu e solo, que provoca uma deformação na banda de rolagem do pneu. Como os elementos da banda de rolagem são comprimidos antes de entrar na região de contato, a distância que o pneu se desloca quando sujeito a um torque propulsor será menor do que em rolamento livre. Este fenômeno é usualmente referido como deriva ou deslizamento longitudinal (*slip* em tração e *skid* em frenagem), e definido pela Equação (4.71).

$$i = \left(1 - \frac{V}{R_r \omega}\right) \times 100\% = \left(1 - \frac{r_e}{R_r}\right) \times 100\% \quad (4.71)$$

onde V é a velocidade linear do centro do pneu, ω é a velocidade angular do pneu, R_r é o raio do pneu em movimento de giro livre, e r_e é o raio efetivo do pneu. O deslizamento, ou deriva, corresponde à razão entre a velocidade linear do centro do pneu e sua velocidade angular.

Quando um torque propulsor é aplicado, o pneu gira sem que haja uma progressão de translação equivalente; assim sendo, $R_r\omega > V$ e um valor positivo para a deriva é encontrado. Se um pneu está girando a certa velocidade angular, mas a velocidade linear do centro do pneu é nula, então, de acordo com a equação (4.71), a deriva longitudinal do pneu será de 100%. Isso é muito comumente observado em uma superfície congelada, onde o pneu que recebe o torque permanece girando, enquanto o veículo não se move para frente.

A definição de deriva longitudinal varia em algumas publicações. Em *SAE Handbook Supplement, Vehicle Dynamics Terminology J670e*, a deriva longitudinal é definida como a razão entre a velocidade de deriva longitudinal e a velocidade de rotação do pneu em rotação livre e direta, expressa em percentagem. A velocidade longitudinal de deriva é tomada como a diferença entre a velocidade de giro do pneu atuado (sob aceleração ou frenagem) e a velocidade de giro do pneu em rotação livre e direta. Ambas as velocidades de rotação são medidas na mesma velocidade linear, no centro da roda e na direção X. Um valor positivo resulta de um torque propulsor. Em essência, a definição de deriva longitudinal i' , sugerida pela SAE, pode ser expressa pela Equação (4.72)

$$i' = \left(\frac{R_r\omega}{V} - 1 \right) \times 100\% = \left(\frac{R_r}{r_e} - 1 \right) \times 100\% \quad (4.72)$$

onde V , ω , R_r e r_e são definidos da mesma forma que para a equação (4.71). Como a força de tração desenvolvida pelo pneu é proporcional ao torque aplicado na roda sob condições estacionárias, a deriva é uma função do esforço de tração.

Da mesma forma, quando o veículo se coloca em movimento de frenagem, o efeito contrário acontece e há um alargamento da banda de rolagem. A distância que o pneu percorre quando em movimento de frenagem será maior do que se estivesse em movimento de giro livre. A intensidade da frenagem é medida pelo deslizamento do pneu i_s , também conhecido como *skid* (deslizamento em frenagem), e que é definido pela Equação (4.73).

$$i_s = \left(1 - \frac{R\omega}{V} \right) \times 100\% = \left(1 - \frac{R}{r_e} \right) \times 100\% \quad (4.73)$$

Para o caso de haver o travamento da roda, a velocidade angular ω é nula e, como a velocidade linear do veículo é não nula, a deriva longitudinal é entendida como sendo total, ou 100%. Deve ser mencionado, no entanto, que se for adotada a definição da SAE, a deriva seria equivalente a -100% para o caso de um pneu travado com o carro em movimento.

Como existem dois tipos de deriva distintos, um para o movimento de aceleração, e outro para o movimento de frenagem, uma única relação pode ser escrita, de maneira a facilitar a obtenção das equações para o caso de frenagem do veículo. Assim, a relação entre as derivas de aceleração (*slip*) e frenagem (*skid*) é dada pela Equação (4.74).

$$|i| = \left| \frac{i_s}{(1-i_s)} \right| \quad (4.74)$$

Como em caso de escorregamento existem duas regiões no contato pneu-solo, uma em aderência e outra em escorregamento, a força longitudinal é dividida em duas parcelas, conforme o apresentado em [1]. A primeira parcela, onde ocorre o escorregamento é dada pela Equação (4.75).

$$F_{ts} = \mu_p F_n \left(1 - \frac{l_c}{l_t} \right) = \mu_p F_n \left(1 - \frac{\mu_p F_n}{2C_i i} \right) \quad (4.75)$$

onde l_c corresponde à área do pneu efetivamente em contato com o solo; l_t corresponde à banda de rolagem; μ_p corresponde ao coeficiente de atrito; e C_i corresponde à rigidez longitudinal do pneu.

Já a parcela que representa a força na região onde ainda há alguma aderência é definida na Equação (4.76).

$$F_{ta} = \frac{1}{2} \frac{\mu_p F_n l_c}{l_t} = \frac{\mu_p^2 F_n^2}{4C_i i} \quad (4.76)$$

A soma das duas parcelas determina a força de tração quando o veículo se encontra em regime de aceleração. Ela é representada pela Equação (4.77).

$$F_t = F_{ts} + F_{ta} = \mu_p F_n \left(1 - \frac{\mu_p F_n}{4C_i i} \right) \quad (4.77)$$

Assim como foi definido para a deriva, a força de tração tem sua dual, para o caso do veículo estar freiando. A Equação (4.78) apresenta o resultado do desenvolvimento apresentado em [1],

$$F_f = \mu_p F_n \left(1 - \frac{\mu_p F_n (1 - i_s)}{4C_s i_s} \right) \quad (4.78)$$

No entanto as equações (4.77) e (4.78), que definem as forças de tração e de frenagem, retratam o comportamento na parte não-linear de ambas as curvas. Mas para pequenos valores de deriva longitudinal, que irão gerar pequenas forças longitudinais, pode-se representar a relação entre deriva e força por uma relação linear para cada tipo de movimento.

$$F_t = C_i i \quad (4.79)$$

$$F_f = C_s i_s \quad (4.80)$$

Como se adota o referencial negativo para as forças de frenagem e como existe um ponto de interseção entre as forças lineares e não-lineares, a relação que determina a força de tração do veículo irá corresponder a

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_t = C_i i & \text{para } i < \frac{\mu_p F_n}{2C_i} \\ F_t = \mu_p F_n \left(1 - \frac{\mu_p F_n}{4C_i i} \right) & \text{para } i \geq \frac{\mu_p F_n}{2C_i} \\ F_f = C_s i_s & \text{para } i_s < \frac{\mu_p F_n}{(2C_s + \mu_p F_n)} \\ F_f = \mu_p F_n \left(1 - \frac{\mu_p F_n (1 - i_s)}{4C_s i_s} \right) & \text{para } i_s \geq \frac{\mu_p F_n}{(2C_s + \mu_p F_n)} \end{array} \right. \quad (4.81)$$

onde as parcelas que compõem a força de frenagem F_f correspondem a forças negativas. O gráfico apresentado na Figura 48 abaixo apresenta a variação das curvas de frenagem e aceleração em função da força normal. Quanto maior a força normal, maior a amplitude da força longitudinal.

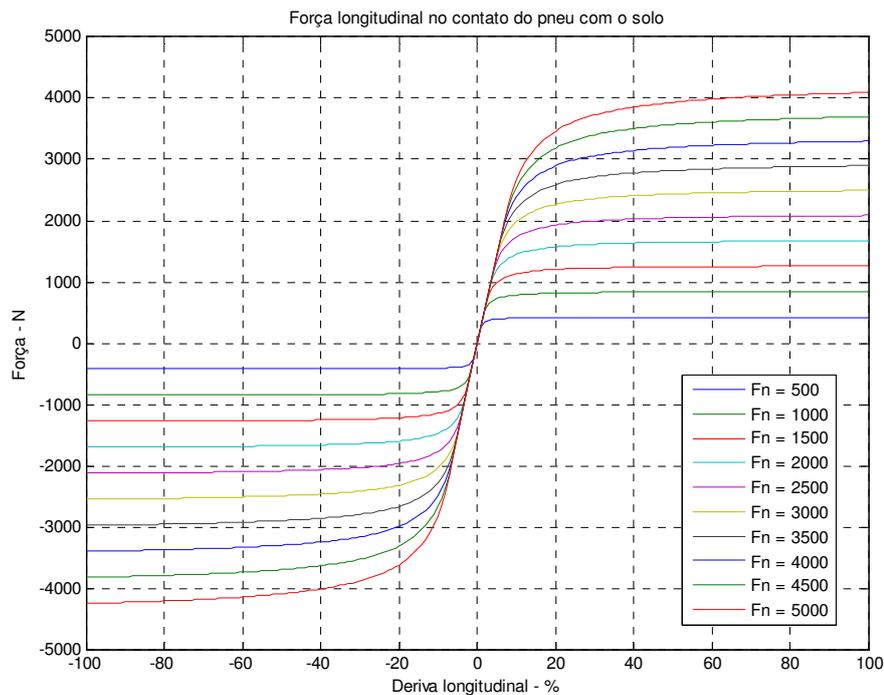


Figura 48: Variação da força longitudinal, em função do escorregamento do pneu.

4.4.3. Força Lateral e Ângulo de Deriva

Assim como existem escorregamentos no contato pneu solo, em função de uma aceleração e/ou frenagem, quando o veículo estiver em movimento retilíneo, também existem escorregamentos quando ele estiver realizando uma curva, seja por alta velocidade, ou qualquer outra razão.

Supondo inicialmente que não há deslizamento longitudinal, mas que o veículo está sujeito à aplicação de uma força lateral F_y , o pneu estará sujeito a uma deformação em sua banda de rolagem, que irá gerar um ângulo defasado do plano da roda, conhecido como ângulo de deriva. Este ângulo, aqui representado por α , representa a deriva lateral do veículo, como pode ser observado na Figura 49.

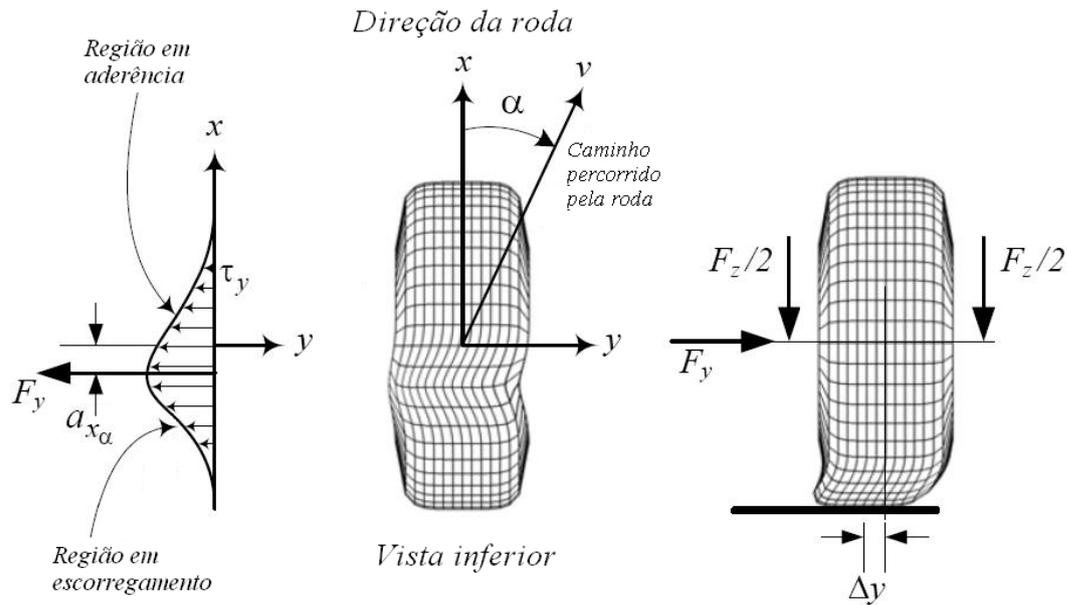


Figura 49: Comportamento do pneu quando sujeito a uma força lateral.

Quando há deslizamento lateral, e o ângulo de deriva não pode ser mais desprezado (quando se passa de um valor crítico de deslizamento) a relação entre força de aderência e ângulo de deriva lateral é definida pela Equação (4.82).

$$F_{y_\alpha} = \mu_p F_n \left(1 - \frac{\mu_p F_n}{4C_\alpha \operatorname{tg} \alpha} \right) \quad (4.82)$$

No entanto, antes de alcançar o valor crítico para deslizamento a relação entre o ângulo de deriva e a força lateral é regida por uma equação simplificada, apresentada a seguir.

$$F_{y_\alpha} = C_\alpha \operatorname{tg} \alpha \quad (4.83)$$

A combinação das equações (4.82) e (4.83) resulta na força lateral gerada no contato do pneu com o solo.

$$\begin{cases} F_{y_\alpha} = C_\alpha \operatorname{tg} \alpha & \text{para } \alpha < \frac{\mu_p F_n}{2C_\alpha} \\ F_{y_\alpha} = \mu_p F_n \left(1 - \frac{\mu_p F_n}{4C_\alpha \operatorname{tg} \alpha} \right) & \text{para } \alpha \geq \frac{\mu_p F_n}{2C_\alpha} \end{cases} \quad (4.84)$$

As curvas de forças laterais, geradas a partir da equação (4.84) podem ser visualizadas na Figura 50 a seguir. Como pode ser observado, à medida que se aumenta a amplitude da força normal também se aumenta a amplitude da força lateral. Também pode ser constatado que quanto menor for a força lateral, menor é o ângulo a partir do qual o pneu entra em condição de escorregamento lateral.

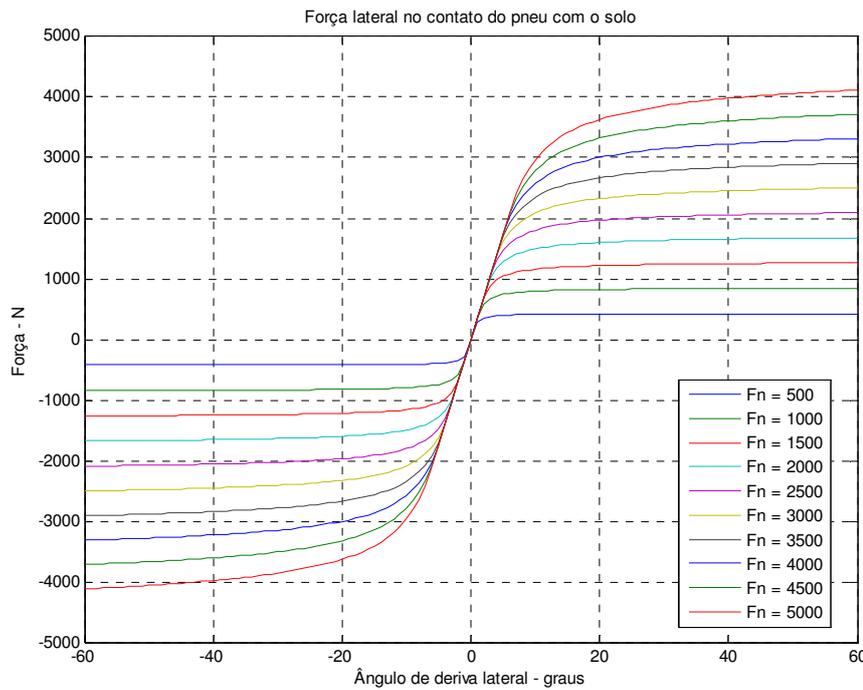


Figura 50: Variação da força lateral, em função do ângulo de deriva do pneu.

Ainda é preciso definir o ângulo de deriva, α . Ele corresponde ao ângulo que o pneu efetivamente gira em torno de um eixo vertical, situado no plano da roda. Ele também indica a orientação dos vetores de velocidade longitudinal e lateral no ponto de contato com o solo. Pelas características físicas do pneu e do movimento que ele desempenha, o vetor de velocidade acaba ficando entre o plano original da roda e o sistema de coordenadas definido pelo ângulo de esterçamento, fornecido pelo sistema de direção. Esta situação, que ocorre na prática, pode ser observada na Figura 51 a seguir e permite determinar a equação que define o ângulo de deriva, para cada uma das rodas.

$$\alpha_i = \delta_j - \beta_i \quad \therefore \quad i = DE, DD, TE, TD \quad e \quad j = DE, DD \quad (4.85)$$

onde

$$\beta_i = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{v_{y_i}}{v_{x_i}} \right) \quad (4.86)$$

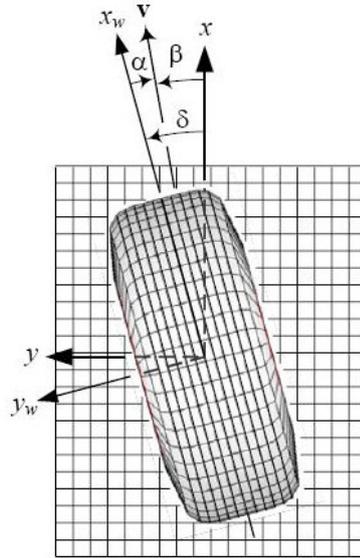


Figura 51: Identificação do ângulo de deriva.

4.4.4. Composição de Forças no Referencial da Roda

Ao realizar uma curva a composição das forças no contato do pneu com o solo sofre modificações, pois cada pneu passa a contar com uma orientação diferente da longitudinal, determinada pelos ângulos de esterçamento e de deriva. Com isso uma parcela dos esforços longitudinais passa a exercer influência na força lateral, assim como uma parcela dos esforços laterais também influencia a composição das forças longitudinais. A nova relação de forças, quando um veículo realiza uma curva, é descrita como

$$\begin{aligned} F_{x_i} &= F_{t_i} \cos \delta_i - F_{y_\alpha} \operatorname{sen} \delta_i \\ F_{y_i} &= F_{y_\alpha} \cos \delta_i + F_{t_i} \operatorname{sen} \delta_i \end{aligned} \quad (4.87)$$

onde F_t corresponde à força de tração no referencial do pneu, podendo ser substituída pela força de frenagem F_f .

4.5. Sistema de Direção

O sistema de direção utilizado corresponde a um modelo cinemático, que usa a geometria de Ackermann para determinação dos ângulos de esterçamento das rodas dianteiras, da direita e da esquerda (δ_D e δ_E), a partir de um esterçamento do volante (δ). A partir da geometria de Ackermann também é possível determinar o raio de curva instantâneo (R_{ci}), conforme indicado na Figura 52.

O modelo da geometria de Ackermann relaciona o ângulo do volante do motorista e os ângulos de esterçamento, mediante algumas condições ideais dos veículos, que, na realidade, não são cumpridas. Nos mecanismos de direção reais dos veículos não existem componentes (braços de ligação) suficientes para garantir que a geometria de Ackermann possa ser completamente satisfeita. Entretanto, como ponto de partida para os projetos, sempre se leva em consideração tal condição ideal.

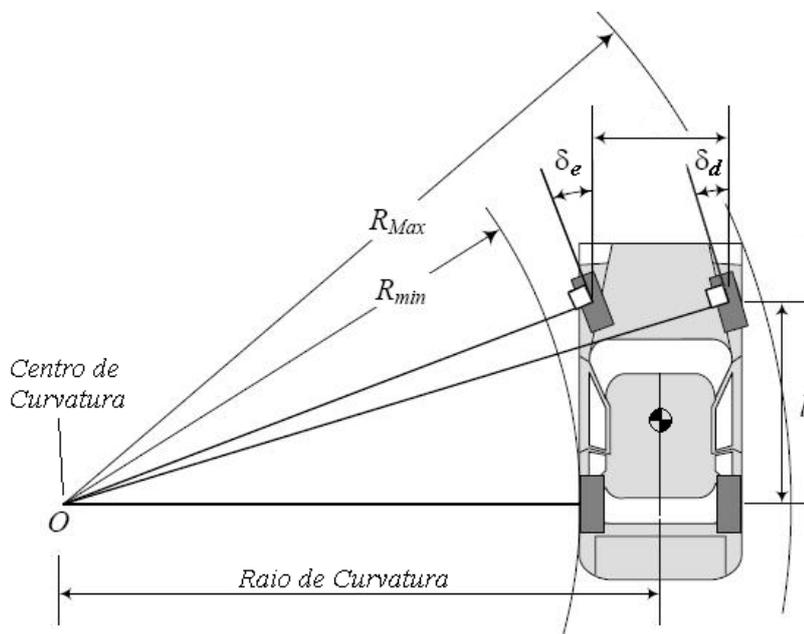


Figura 52: Geometria de Ackermann.

Empregando a geometria de Ackermann tem-se que os ângulos de esterçamento são diferentes $\delta_D \neq \delta_E$. Quando se gira o volante para um

determinado sentido, o ângulo de esterçamento da roda interna sempre é maior do que aquele da roda externa à curva que se deseja percorrer. Tal condição permite definir duas relações matemáticas como mostrado na equação (4.88),

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \text{Para } \delta < -f_d \\ \text{Para } \delta > f_d \end{array} \right\} \begin{cases} \delta_D = k_d \cdot \delta \\ R_{ci} = \frac{l}{\text{tg}(\delta_D)} - \frac{b_d}{2} \\ \delta_E = \text{tg}^{-1}\left(\frac{l}{R_{ci} - b_d/2}\right) \\ \\ \delta_E = k_d \cdot \delta \\ R_{ci} = \frac{l}{\text{tg}(\delta_E)} + \frac{b_d}{2} \\ \delta_D = \text{tg}^{-1}\left(\frac{l}{R_{ci} + b_d/2}\right) \end{cases} \quad (4.88)
 \end{aligned}$$

sendo δ positivo para curvas à esquerda e negativo para curvas à direita (medido em relação ao eixo x). Na equação (4.88), k_d e f_d são, respectivamente, a relação de transmissão e a folga do sistema de direção. b_d é a bitola dianteira. $l = d_f + d_t$ é a distância entre os eixos das rodas. d_f e d_t são as distancias dos eixos das rodas dianteiras e traseiras ao centro de massa CM e R_{ci} é o raio de curvatura instantâneo durante o movimento do veículo.

4.6. Sistema de Freios

Um sistema de freios tradicional compreende dois circuitos independentes de atuação para garantir uma mínima capacidade de frenagem ao veículo. Estes circuitos acionam duas rodas opostas diagonalmente, para evitar que apenas um lado do veículo receba a ação de frenagem e, por conseguinte, rode causando um acidente. Todo esse sistema de atuação, para funcionar adequadamente, requer uma quantidade de componentes, tais como válvulas, pressurizador, compensadores, fluido de freio e pastilhas de freio, entre outros, conforme visualizado na Figura 53. No entanto inserir a modelagem de cada componente ao modelo de dinâmica veicular desta tese implicaria em um sistema mais complexo do que o próprio sistema de propulsão. Sendo assim, e baseado em [12], onde a

representação mais comum de sistemas de frenagem corresponde a uma função degrau com retardo, decidiu-se manter uma versão simplificada de modelo de sistema de freio. Essa abordagem serve para mostrar a maleabilidade da modelagem desenvolvida e permite explorar a capacidade do controlador homeostático de realizar sua tarefa, de acordo com a percepção do controlador central (no caso o motorista), a partir de modelos simplificados da dinâmica veicular.

Para o sistema de freios utilizado neste trabalho, considerou-se que todo o sistema e seus componentes, do pedal de freio até o cilindro de atuação hidráulica que aciona a pastilha de freio, podem ser representados como um sistema de 1ª ordem com um retardo temporal adequado. A partir do cilindro de atuação hidráulica, que movimenta as pinças com as pastilhas de freio, decidiu-se modelar a equação do torque máximo permitido, em função da geometria entre estes componentes, chegando à relação a seguir.

$$T_{b_{max}} = 2P_b A_p R_b \mu_b \tag{4.89}$$

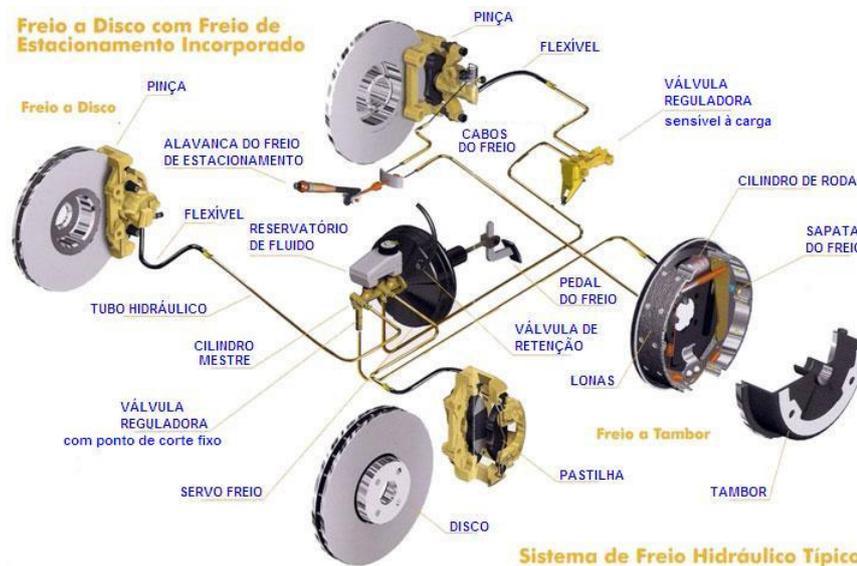


Figura 53: Sistema de freio comum e seus componentes.

onde P_b corresponde à pressão do fluido de freio dentro do circuito de frenagem, que será usado como variável de controle para um eventual sistema *ABS*. A_p corresponde à área da seção reta do pistão que movimenta as pinças e, por

consequência, as pastilhas de freio. R_b representa o raio efetivo de frenagem e μ_b representa o coeficiente de atrito entre as pastilhas e o disco de freio.

O torque de frenagem máximo é dosado pelo pedal de freio, representado por uma variável que multiplica o torque máximo, mas que está limitada ao intervalo [0 1]. Essa variável, chamada de *WOB* (*wide open brake*), para seguir a mesma nomenclatura dada aos pedais de aceleração e de embreagem, pode assumir formas variadas, para melhor representar características de motoristas ou ações de controle específicas. O mais comum é que *WOB* seja representado por uma função do tipo rampa, limitada em 1. Ao combinar as três partes do modelo para sistema de freio, encontra-se:

$$T_b = WOB T_{b_{m\acute{a}x}} \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \quad (4.90)$$

onde τ corresponde ao retardo temporal do sistema de frenagem.