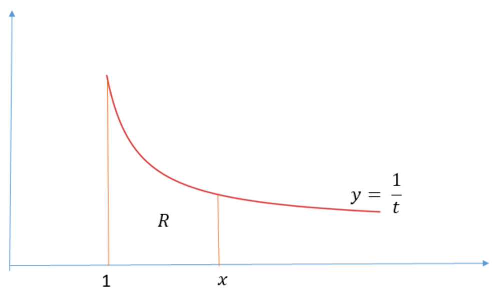
**A função $y = lnx$ (logaritmo neperiano)**

Zara Abud




Neste pequeno texto, pretendemos apresentar formalmente a definição e as propriedades usuais da função logaritmo, mais específicamente, do logaritmo neperiano. O logaritmo é usualmente definido depois da exponencial. Aliás, ele é definido a partir da função exponencial: dados $a > 0$ e $b > 0$ e $c \in \mathbb{R}$, escrevemos

$$\mathbf{log_a b = c} \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbf{a^c = b} \tag{*}$$

Mas como se define, por exemplo $2^\pi$ ?

O que a afirmação (*) mostra é que as definições de logaritmo e exponencial estão estreitamente relacionadas; a partir de uma, definimos a outra, e vice-versa. Dessa forma, uma vez definido formalmente o logaritmo, podemos definir a exponencial como sua função inversa.

Considere a função

$$\boxed{L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt}$$

e vamos estudar as suas propriedades:

(1) O domínio da função $L$ ($D_L$) é $]0, +\infty[$.
Demonstração: Se $x \geq 1$ então a função $y = \dfrac{1}{t}$ é contínua, e portanto, é integrável. Logo, existe $L(x)$.
Se $0 < x \leq 1$, a função $\dfrac{1}{t}$ também é contínua no intervalo $[x, 1]$. Logo, é integrável, e existe

$L(x)$.
Se $x \leq 0$, a função integranda será ilimitada, e portanto, não será integrável, e não ficará definido $L(x)$.
Concluimos que $L$ está definido apenas para $x > 0$. $\triangle$

(2) $L(x) > 0$ para $x > 1$, e $L(x) < 0$ para $0 < x < 1$.

Com efeito: a função $\dfrac{1}{t}$ é positiva em $]0, +\infty[$. Sendo assim:

$$\begin{cases} x > 1 \rightarrow \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt > 0 \\ \\ x = 1 \rightarrow L(1) = 0 \\ \\ 0 < x < 1 \rightarrow \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}dt > 0 \rightarrow \int_1^x \frac{1}{t}dt < 0 \rightarrow L(x) < 0 \end{cases}$$

(3) $L'(x) = \dfrac{1}{x}$, para todo $x > 0$. Portanto, $L$ é uma função estritamente crescente e, consequentemente, uma função injetora.

Esta propriedade é consequência direta de um dos teoremas fundamentais do Cálculo.

(4) $\forall\ x, y > 0 (L(xy) = L(x) + L(y))$.

Demonstração: Considere $y > 0$ fixado e as seguintes funções:

$F(x) = L(xy)$ e $G(x) = L(x) + L(y)$.

Derivando $F$ e $G$, temos:

$F'(x) = L'(xy).y$ (pela regra da cadeia, lembrando que $y$ está sendo considerado como constante) e $G'(x) = L'(x)$ (pois $L(y)$ é uma constante). Logo, resulta:

$F'(x) = \dfrac{1}{xy}.y = \dfrac{1}{x}$ e $G'(x) = \dfrac{1}{x}$

e $F'(x) = G'(x)$, $\forall\ x > 0$.

Sendo assim, existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + k$, $\forall\ x > 0$. Em particular, para $x = 1$, temos que $F(1) = G(1) + k$, isto é, $L(y) = L(1) + L(y) + k$. Logo, $k = 0$, e obtemos $F(x) = G(x)$, isto é, $L(xy) = L(x) + L(y)$. $\triangle$

(5) $L(x^n) = nL(x)$, para todo $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: para $n = 0$, temos que $L(x^0) = L(1) = 0$ e $0.L(x) = 0$.
Para $n = 2$, $L(x^2) \overset{(4)}{=} L(x.x) = L(x) + L(x) = 2L(x)$.
Para $n > 2$, a prova da propriedade sai por indução, e será deixada como exercício.

(6) Para todo $y > 0$, $L(\frac{1}{y}) = -L(y)$.

Demonstração: Temos:

$0 = L(1) = L(y.\frac{1}{y}) \overset{(4)}{=} L(y) + L(\frac{1}{y})$, e portanto,

$L(y) + L(\frac{1}{y}) = 0$. Logo, $L(\frac{1}{y}) = -L(y)$. △

(7) Para todo $x, y > 0$, $L(\frac{x}{y}) = L(x) - L(y)$.

Demonstração: Temos que

$L(\frac{x}{y}) = L(x.\frac{1}{y}) \overset{(4)}{=} L(x) + L(\frac{1}{y}) \overset{(6)}{=} L(x) - L(y)$. △

(8) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $L(x^{-n}) = -nL(x)$.

Demonstração: Com efeito:

$L(x^{-n}) = L(\frac{1}{x^n}) = -L(x^n) = -nL(x)$ △

(9) Para todo $q \in \mathbb{N}^*$, e todo $x > 0$, $L(x^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}L(x)$.

Demonstração: Vamos utilizar a propriedade (5). Temos:

$L(x) = L(x^1) = L((x^{\frac{1}{q}})^q) \overset{(5)}{=} qL(x^{\frac{1}{q}})$.

Logo, $qL(x^{\frac{1}{q}}) = L(x)$, e portanto, $L(x^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}L(x)$ △

(10) Para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$, e todo $x > 0$, $L(x^\alpha) = \alpha(x)$.

Demonstração: Faremos a prova apenas para $\alpha > 0$. O caso $\alpha < 0$ será deixado para o leitor. Suponhamos $p, q \in \mathbb{N}$, com $q \neq 0$, tais que $\alpha = \frac{p}{q}$. Então:

$L(x^\alpha) = L(x^{\frac{p}{q}}) = L((x^{\frac{1}{q}})^p) \overset{(5)}{=} pL(x^{\frac{1}{q}}) \overset{(9)}{=} p.\frac{1}{q}L(x) = \frac{p}{q}L(x) = \alpha L(x)$. △

(11) A imagem da função $y = L(x)$ é $\mathbb{R}$.

Demonstração : Considere $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Então $\frac{y}{L(2)} > 0$, e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq \frac{y}{L(2)} < n+1$, resultando $nL(2) \leq y < (n+1)L(2)$.

Por sua vez, $nL(2) = L(2^n)$, e $(n+1)L(2) = L(2^{n+1})$, de maneira que o número $y$ está compreendido entre dois elementos da imagem da função $L$. Como $L$ é uma função contínua, vale o Teorema do Valor Intermediário, e portanto, existe $\overline{x}$ tal que $L(\overline{x}) = y$, isto é, $y \in im(L)$. Analogamente provamos que se $y < 0$ então $y \in im(L)$. Finalmente, $L(1) = 0$, e portanto, $0 \in im(L)$. Dessa forma, $im(L) = \mathbb{R}$. △

Pelo que vimos acima, temos $L: ]0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função bijetora, derivável, com derivada sempre positiva. Logo, $L$ é inversível, e a inversa $L^{-1}$ de $L$ também é uma função derivável.

Vamos designar $E = L^{-1}$ Então:

$E : \mathbb{R} \longrightarrow ]0, +\infty[, \qquad x \longrightarrow E(x)$

de maneira que $\begin{cases} E(L(x)) = x & \forall x > 0 \\ L(E(x)) = x & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$
Em particular $E(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Além disso, pela regra da cadeia, $(L(E(x)))' = L'(E(x))E'(x) = (x)' = 1$. Como $L'(u) = \dfrac{1}{u}$, $\forall u > 0$, vem que

$\dfrac{1}{E(x)}.E'(x) = 1$, e portanto, $E'(x) = E(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Temos ainda que, como a função $E$ é inversa de $L$, vale que

(1) $E(0) = 1$, pois $L(1) = 0$

(2) $L(E(1)) = 1 \qquad \rightarrow \qquad \displaystyle\int_1^{E(1)} \frac{1}{t} dt = 1$

Dessa forma, $E(1)$ é o número maior do que 1 tal que a integral da hipérbole, de 1 até $E(1)$, é igual a 1. Denotamos $E(1) = e$, e a função $E(x)$ por $e^x$. Fica definida, a função exponencial, a partir da função logaritmo.