Lista de Exercício II (grupos e álgebras)

1. Prove as relações

$$\exp(L)\, T \exp(-L) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ad_L^n T$$

e

$$(\partial \exp(L))\, \exp(-L) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} ad_L^n \partial L$$

onde $ad_L T$ é a ação adjunta de L

$$ad_L T = [L\, , \, T]$$

2. Seja V uma álgebra associativa, i.e. para $a, b \in V$ então $a \cdot b \in V$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Mostre então que V com a operação

$$[a\, , \, b] \equiv a \cdot b - b \cdot a$$

é uma álgebra de Lie.

3. Na seção 2.5, página 46, da *Lecture Notes on Lie Algebras and Lie Groups* discutimos as representações espinoriais de $su(2)$ e $sl(2)$, i.e. as matrizes (2.57) e (2.77) respectivamente. Mostre que a exponenciação de uma combinação linear dos geradores T_i, $i = 1, 2, 3$, dados por (2.57), com coeficientes reais, produz matrizes 2×2 que correspondem a elementos de um grupo compacto. Isto é, mostre que estas matrizes são funções periódicas dos parâmetros reais usados na exponenciação. Por outro lado, mostre que a exponenciação de uma combinação linear dos geradores L_i, $i = 1, 2, 3$, dados por (2.77), com coeficientes reais, produz matrizes 2×2 que correspondem a elementos de um grupo não compacto.

4. Calcule as matrizes 3×3, $d\,(T_a)$ na representação adjunta (tripleto) dos geradores da álgebra de $SU(2)$, satisfazendo as relações de comutação

$$[\, T_a\, , \, T_b\,] = i\, \varepsilon_{abc}\, T_c \qquad\qquad a, b, c = 1, 2, 3$$

Lembre-se:

$$g\, T_a\, g^{-1} = T_b\, d_{ba}\,(g) \qquad\qquad [\, T\, , \, T_a\,] = T_b\, d_{ba}\,(T)$$