ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME
Departamento de Engenharia Mecânica

PME3100 Mecânica I

Notas de aula

Estática -
Forças distribuídas - Atrito

Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

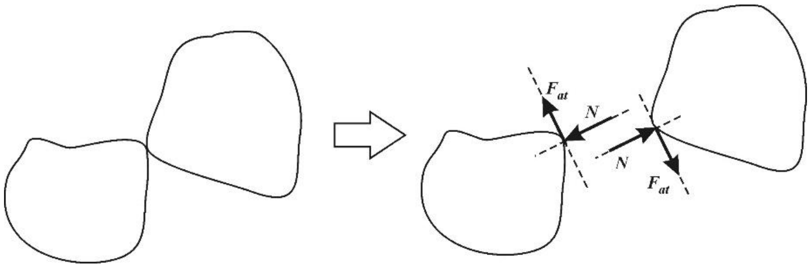
PME3100 Mecânica I

2 – Estática

2.7 – ATRITO

2.7.1 – Considerações gerais

As reações de contato entre corpos, sejam eles sólidos ou líquidos ou gases, apresentam normalmente componentes tangenciais à superfície de contato. Essas componentes são genericamente chamadas de forças de atrito.



A caracterização dessas forças é um dos problemas mais complexos da Mecânica, em virtude do grande número de fatores que nelas intervêm (ver *J. Awrejcewicz; P. Olejnik - Analysis of Dynamic Systems With Various Friction Laws. Applied Mechanics Reviews - NOVEMBER 2005, Vol. 58*. DOI: 10.1115/1.2048687, por exemplo).

Não pretendemos aqui estudar o assunto nos seus aspectos mais gerais, mas sim discutir a solução de um tipo de problema que mais comumente se apresenta na Engenharia, relativo a forças de atrito que se desenvolvem nos contatos entre sólidos. Esse atrito entre sólidos é genericamente chamado de atrito seco e, especificamente, estudaremos o caso de atrito (seco) de escorregamento, entre sólidos.

Quando a força de atrito é utilizada para transmissão de esforços ou para garantir o equilíbrio, procura-se obter a máxima força possível. Quando seu efeito é desfavorável, procura-se reduzi-lo ao mínimo. As aplicações enquadram-se num ou noutro caso.

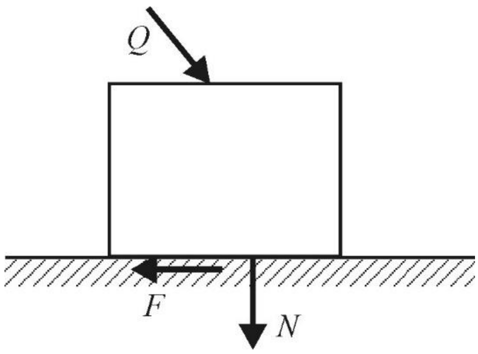
2.7.2 – Atrito seco de escorregamento

Lei estabelecida por Coulomb (modelo - caráter puramente experimental)

$$|F| \leq \mu |N|$$

onde:

F = reação no plano tangente à superfície de contato dos sólidos;
N = reação normal ao plano tangente na superfície de contato;
μ = coeficiente de atrito estático (número positivo adimensional).



Neste modelo, μ depende apenas da natureza das superfícies de contato (modelo físico válido entre certos limites).

Table from Encarta

Table of Friction Coefficients

Friction coefficients can be used to calculate the effects of friction on stationary or moving objects. Static friction prevents two stationary objects in contact from moving, while kinetic friction slows the movement of one object in contact with another surface. The amount of friction, and therefore the size of the friction coefficient, depends on the materials that make up the contacting surfaces.

Materials in Contact	Coefficient of Static Friction* $_S$	Coefficient of Kinetic Friction * $_K$
Wood on wood	0.5	0.3
Waxed ski on snow	0.1	0.05
Ice on ice	0.1	0.03
Rubber on concrete (dry)	1.0	0.8
Rubber on concrete (wet)	0.7	0.5
Glass on glass	0.94	0.4
Steel on aluminum	0.61	0.47
Steel on steel (dry)	0.7	0.6
Steel on steel (lubricated)	0.12	0.07
Teflon on steel	0.04	0.04
Teflon on Teflon	0.04	0.04
Synovial joints (in humans)	0.01	0.01

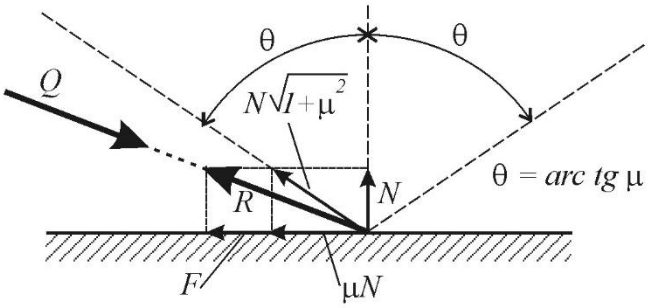
* These values are approximate and intended only for comparison.

Para *F*:

DIREÇÃO: tangente à superfície de contato, paralela ao movimento relativo (incipiente ou não) dos pontos de contato;

SENTIDO: oposto ao do movimento relativo (incipiente ou não) dos pontos de contato.

Cone de atrito:



Para uma dada reação normal N, o valor máximo da força de atrito é μN, o que define uma reação vincular total (resultante) máxima $N\sqrt{1+\mu^2}$, inclinada de um ângulo θ = arctg μ em relação à normal às superfícies no ponto de contato.

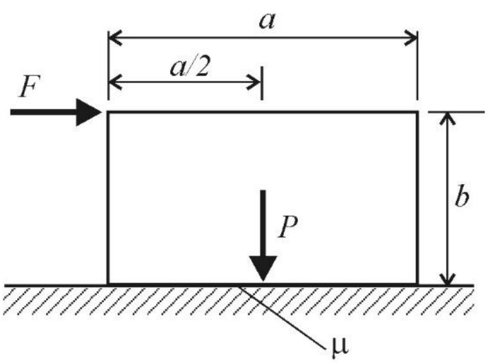
Isto significa que se a força total aplicada (à qual a reação vincular é igual e diretamente oposta) for interior ao cone cujo eixo é aquela normal e cuja semi-abertura é θ, não pode haver escorregamento.

Caso típico: bloco em plano inclinado

O ângulo θ chama-se *ângulo de atrito* e o cone, *cone de atrito*.

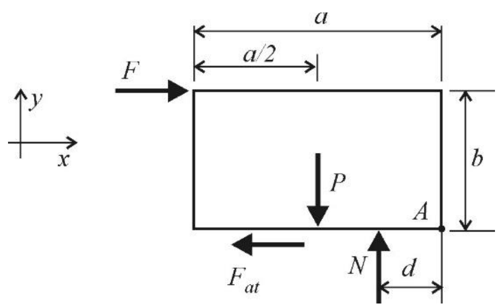
2.7.3 – Exemplos

Exemplo 1: No bloco da figura abaixo, determine o valor máximo da força F para o bloco não escorregar nem tombar.



Resolução:

Isolando o bloco:



Equações de equilíbrio:

$\sum \boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{0}$: $F - F_{at} = 0 \Rightarrow F_{at} = F$
$\sum \boldsymbol{F_y} = \boldsymbol{0}$: $-P + N = 0 \Rightarrow N = P$
$\sum \boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{0}$: $-F \cdot b + P \cdot \frac{a}{2} - N \cdot d = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{N}\left(P \cdot \frac{a}{2} - F \cdot b\right)$

- Para não tombar: $d \geq 0 \Rightarrow F \leq \frac{Pa}{2b}$

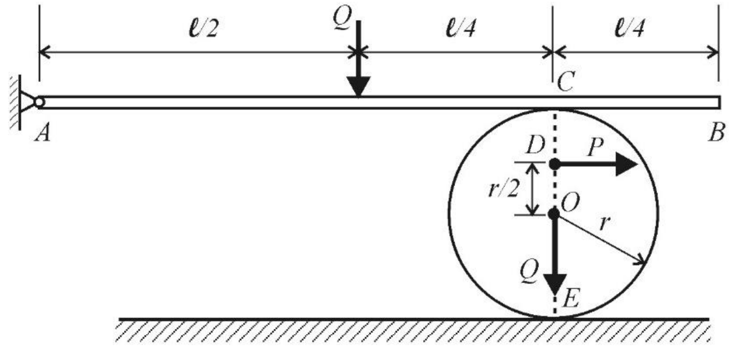
- Para não escorregar: $F_{at} \leq \mu N \Rightarrow F \leq \mu P$

Assim:

$$\boldsymbol{F_{max} = \beta P}$$

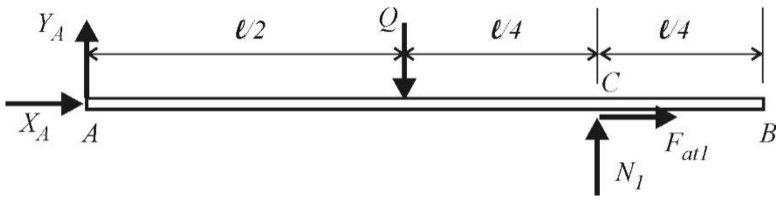
com $\beta = min\left(\mu; \frac{a}{2b}\right)$

Exemplo 2: Uma barra *AB*, de comprimento $\boldsymbol{\ell}$, homogênea e de peso *Q*, apoia-se sobre um cilindro também homogêneo, de centro *O*, raio *r* e peso *Q*. A barra *AB* está articulada no ponto *A*. Ao ponto *D* do disco de centro *O* é aplicada uma força *P* paralela à superfície horizontal. Sabendo que os coeficientes de atrito entre o disco e a barra e entre o disco e a superfície horizontal têm o mesmo valor μ, determine o máximo valor da força *P* compatível com o equilíbrio.



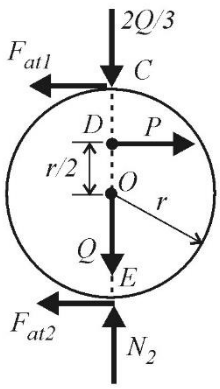
Resolução:

Isolando a barra, para obter a força normal entre a barra e o disco:



$\sum \boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{0}$: $-Q \cdot \frac{l}{2} + N_1 \cdot \frac{3l}{4} = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{2Q}{3}$

Isolando o disco:



$\sum \boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{0}$: $F_{at1} + F_{at2} = P$
$\sum \boldsymbol{F_y} = \boldsymbol{0}$: $N_2 = \frac{5Q}{3}$
$\sum \boldsymbol{M_C} = \boldsymbol{0}$: $P \cdot \frac{r}{2} - F_{at2} \cdot 2r = 0 \Rightarrow F_{at2} = \frac{P}{4} \Rightarrow F_{at1} = \frac{3P}{4}$

Lei de Coulomb: $|F_{at}| \le \mu|N|$

Em C: $F_{at1} \le \mu N_1 \Rightarrow \frac{3P}{4} \le \mu \frac{2Q}{3} \Rightarrow P \le \mu \frac{8Q}{9}$

Em E: $F_{at2} \le \mu N_2 \Rightarrow \frac{P}{4} \le \mu \frac{5Q}{3} \Rightarrow P \le \mu \frac{20Q}{3}$

Portanto:

$$P_{MAX} = min\left(\mu \frac{8Q}{9}; \mu \frac{20Q}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P_{MAX} = \mu \frac{8Q}{9}}$$