

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – PIRASSUNUNGA**

**ZEB1058 PESQUISA  
OPERACIONAL E OTIMIZAÇÃO  
DE SISTEMAS AGROPECUÁRIOS**



**PROF. DR. FERNANDO L. CANEPPELE**

**PROF. DR. JOSÉ A. RABI**

**DEPTO. ENGENHARIA DE BIODISSISTEMAS**

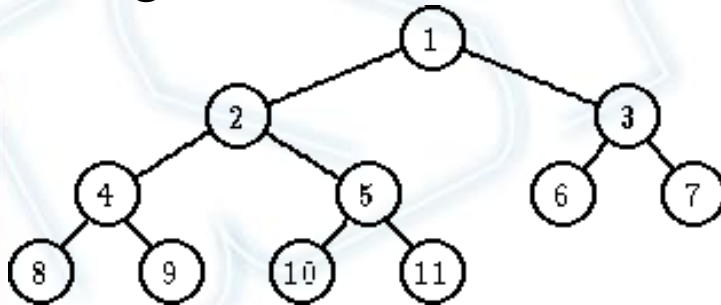
# PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA: BRANCH & BOUND



- **ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO**
- **EXEMPLO DE APLICAÇÃO**
- **ÁRVORE DE SOLUÇÕES (VIÁVEIS / INVIÁVEIS)**

# Programação Linear Inteira: solução

- Algoritmo Branch & Bound (Bifurcação & Limite)



Árvore de soluções

- Série de bifurcações de problemas relaxados em novos problemas mediante a imposição de limites adicionais às variáveis de decisão que resultarem não inteiras

- Problema 1: problema relaxado original → solução

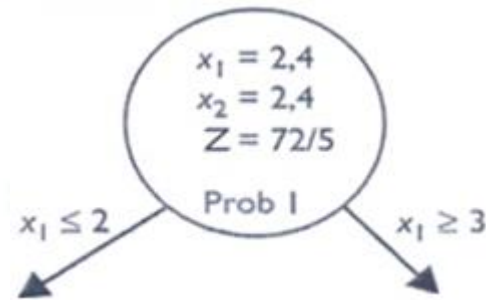
$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a : } \quad x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ \quad \quad \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{solução ótima}} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2,4 \\ x_2 = 2,4 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{ambos não} \\ \text{inteiros} \end{array} \right.$$

$$Z = 14,4$$

limite superior



# Problema 1: bifurcação c/ relação a $x_1$



(problema 2)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(problema 3)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

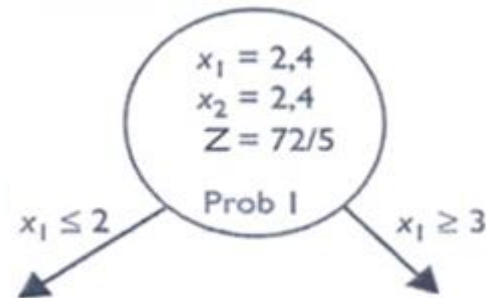
$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Problemas 2 e 3: soluções



(problema 2)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 2,5 \quad Z = 13,5$$

(problema 3)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

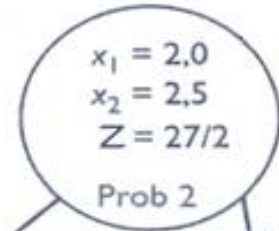
$$x_1 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 1,5 \quad Z = 13,5$$

bifurcar cada um

# Problema 2: bifurcação c/ relação a $x_2$



(problema 4)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 2$$

(problema 5)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

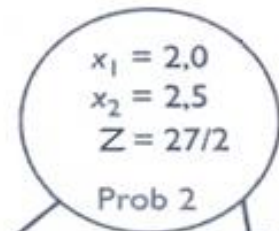
$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \geq 3$$



# Problemas 4 e 5: soluções



(problema 4)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 2 \quad Z = 12$$

(problema 5)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

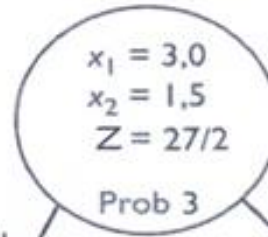
$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \quad Z = 9$$

fim das ramificações

# Problema 3: bifurcação c/ relação a $x_2$



(problema 6)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

(problema 7)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

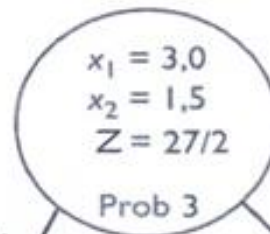
$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_2 \geq 2$$



# Problema 6 e 7: soluções



(problema 6)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 = 10/3 \quad x_2 = 1 \quad Z = 13$$

bifurcar

(problema 7)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

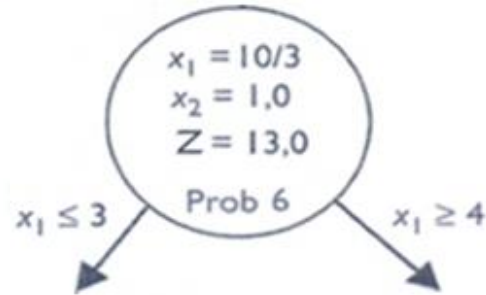
$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_2 \geq 2$$

inviável (fim do ramo)

# Problema 6: bifurcação c/ relação a $x_1$



(problema 8)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 3$$

(problema 9)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

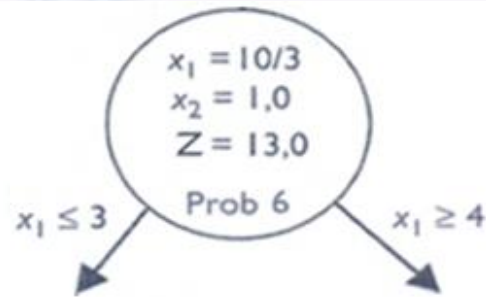
$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 4$$

# Problemas 8 e 9: soluções



(problema 8)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 1 \quad Z = 12$$

(problema 9)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 0 \quad Z = 12$$

# PL Inteira: árvore de soluções

