As fracções e o desenvolvimento do sentido do número racional

Cecília Monteiro, Hélia Pinto, Nisa Figueiredo

As fracções são um dos temas do ensino básico em que os alunos apresentam mais dificuldades. Os professores reclamam falta de estudo para justificarem o insucesso nesta parte da matéria, não parecendo reconhecer a complexidade inerente a este assunto (Streefland, 1991). Analisemos, por exemplo, os diversos significados que uma fracção pode ter dependendo do contexto onde se insere. 3/5 pode referir-se a uma parte de um todo, 3/5 de um bolo, 3/5 da superfície da terra, etc., ou pode representar o quociente entre dois números naturais. Se tivermos 3 pizas a partilhar por 5 pessoas, 3/5 representa o quociente que resulta de dividir 3 por 5 e que é a parte de piza que cabe a cada um. Por outro lado, 3/5 representa também, neste contexto, a razão entre o número de pizas e o número de pessoas: 3 pizas para 5 pessoas equivale a 6 pizas para 10 pessoas. Uma fracção pode ainda representar a razão entre duas partes de um mesmo todo: a relação entre o número de raparigas e o número de rapazes num conjunto de 8 jovens numa festa, por exemplo. No caso de querermos saber quanto é 3/5 de meio milhão de euros, por exemplo, ou 3/5 de meia piza, a fracção funciona como um operador aplicado a um conjunto discreto ou contínuo.

No longo percurso em que as crianças vão desenvolvendo o conceito de número racional, temos de considerar, por um lado, o conceito (mais precisamente a teia de conceitos), e por outro os símbolos que o representam. Acontece as crianças operarem com os símbolos sem terem ideia das quantidades e conceitos subjacentes, o que faz com que, por exemplo, cheguem a respostas sem sentido. Assim, não é raro vermos alunos adicionarem números representados por fracções adicionando os numeradores e os denominadores, evidenciando enormes lacunas na compreensão do conceito de fracção e das operações com estes números.

Neste artigo iremos apresentar e discutir uma proposta alternativa para a primeira abordagem às fracções, diferente daquela que é tradicionalmente usada com alunos do 2º ciclo. Discutiremos as estratégias que alunos usaram na resolução de tarefas em contextos de partilha equitativa e que foram usadas no âmbito de uma experiência de sala de aula com alunos do 5º ano de escolaridade. Procuraremos mostrar como é que, utilizando as estratégias informais dos alunos como ponto de partida na aprendizagem, é possível que os alunos construam de forma significativa o conceito de fracção, ao mesmo tempo que é valorizada a compreensão e a participação activa do aluno no seu próprio processo de aprendizagem. Finalmente, apresentaremos também, de forma breve, algumas das ideias didácticas que serviram de base a esta experiência e que tiveram origem na teoria de ensino e aprendizagem da Matemática Realista (Freudenthal, 1973, 1991; Streefland, 1986, 1991).

O ensino das fracções em Portugal

Em Portugal, e de um modo geral, a primeira (e por vezes única) abordagem às fracções é feita através da relação parte/todo. Utilizando uma figura (um rectângulo ou um círculo) dividida num certo número de partes iguais, e simbolizando a unidade, relaciona-se as partes com o todo da figura. A figura simboliza, por exemplo, um chocolate dividido em 5 partes iguais, cada uma dessas partes sendo 1/5 do chocolate. O conceito de fracção equivalente é também explicado recorrendo ao mesmo modelo, e os alunos devem visualizar assim que 2/10 é a mesma quantidade de chocolate que 1/5. Também as operações adição e subtracção são abordadas recorrendo ao mesmo suporte visual, havendo a preocupação de se estudar primeiro a adição e em seguida a subtracção como operação inversa da adição. Isto significa que, na abordagem tradicional, o ponto de partida para o ensino são de um modo geral, os conceitos matemáticos formais e não os fenómenos da realidade do dia-a-dia de onde estes conceitos foram em tempos abstraídos. Assim, isto pode ser uma das razões pela qual haja alunos que representem a situação da figura 1 por 1/4, em vez de 1/5, que é o que o *professor normalmente quer* que esteja representado na figura.

A verdade é que a figura também pode representar 1/4 se considerarmos, não a relação parte sombreada/toda a figura, mas sim a relação parte sombreada/parte não sombreada. Uma das origens de mal entendidos pode ser o facto de serem os conceitos matemáticos, que os alunos ainda não dominam, e não o contexto do problema a dar significado a actividades como estas. Outra característica da abordagem tradicional é a ausência do apelo à estimativa, dando-se preferência ao cálculo exacto com papel e lápis. Deste modo, a aprendizagem das fracções acaba por pôr muita ênfase nos procedimentos, nas regras e nos algoritmos, funcionando, do nosso ponto de vista, como um entrave ao desenvolvimento do sentido do número.

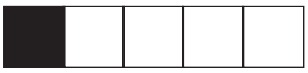

Figura 1.

A fracção explorada em situações de partilha equitativa

Na abordagem que aqui apresentamos, a fracção surge em situações de partilha equitativa. Os alunos desde o 3º ano de escolaridade que resolvem problemas de divisão deste tipo, onde o dividendo é quase sempre um múltiplo do divisor. No caso do quociente não ser um número inteiro, os alunos apresentam os resultados na forma de numeral decimal. Agora o dividendo é, numa primeira fase, um número menor que o divisor, o que pede que a unidade seja dividida.

Na experiência que levámos a cabo no 5º ano*, os alunos nunca tinham estudado fracções no 1º ciclo, o que aliás acontece com grande parte dos alunos portugueses apesar destas fazerem parte do programa do 1º ciclo em vigor[1]. Desde a primeira aula, os alunos trabalharam em grupo à volta de variados problemas de partilha equitativa, sem que lhes tivesse sido explicado como os podiam resolver.

Quadro 1.
Primeiros problemas apresentados aos alunos

Problema 1
Quatro amigos foram a um restaurante e pediram três pizas. Dividiram igualmente as três pizas. Que parte de piza comeu cada amigo?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

Cada amigo comeu mais que uma piza ou menos que uma piza? Explica o teu raciocínio.

Problema 2
Se em vez de quatro amigos fossem oito amigos, pedissem três pizas e as dividissem igualmente, que parte de piza comeria cada um?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

Cada amigo comeu mais que uma piza ou menos que uma piza? Explica o teu raciocínio.

Problema 3
Em qual dos grupos anteriores, o de quatro amigos (problema 1) ou o de oito amigos (problema 2), cada amigo comeu mais piza? Explica o teu raciocínio.

Quadro 2. Estratégias apresentadas pelos alunos na resolução da primeira parte do problema 1

A
Dividiram cada uma das 3 pizas em quatro partes iguais e deram 3 fatias a cada amigo.

Responderam que cada amigo comeu três fatias de piza.

B
Dividiram 2 pizas, cada uma destas em duas partes iguais e a terceira piza em quatro partes iguais e deram metade de uma piza mais um quarto da outra a cada amigo. Responderam que cada amigo comeu metade de uma piza e mais um quarto de outra.

C
Dividiram cada uma das 3 pizas em oito partes iguais e deram 6 oitavos a cada amigo. Responderam que cada amigo comeu 6 oitavos.

D
Dividiram cada uma das 3 pizas em oito partes iguais. Contaram os pedaços de uma piza obtidos e multiplicaram por 3 (temos $8 \times 3 = 24$) e dividiram as 24 fatias pelos 4 amigos ($24 \div 4 = 6$). Responderam que cada amigo comeu seis fatias.

E
Dividiram $3 \div 4$ e obtiveram 0,75 e alguns responderam 75%

A cada grupo era apresentado um conjunto de tarefas, numa única folha grande de modo a promover a leitura simultânea a todos os elementos do grupo, juntamente com materiais de cartão simbolizando pizas, chocolates, etc., dependendo das situações dos problemas. O papel do professor durante o trabalho de grupo era essencialmente o de promover a discussão entre os alunos e fazer com que todos os elementos do grupo participassem na resolução da tarefa. O professor solicitava uma resposta colectiva (*produção do grupo*) que era registada numa folha.

No quadro 1 encontram-se os primeiros problemas perante os quais os alunos foram colocados. Após a resolução dos três problemas, seguiu-se a apresentação e discussão em plenário das produções dos grupos, onde estas foram comparadas e se reflectiu sobre o trabalho desenvolvido. As estratégias apresentadas pelos grupos[2] foram as mais variadas (veja quadro 2). Praticamente todas as produções apresentavam desenhos ou esquemas, havendo em algumas delas registos de cálculos.

Como podemos ver, algumas produções dos alunos referiam quartos, oitavos e metades, por extenso, mesmo nunca tendo sido "ensinados" na escola a chamar-lhe assim. (figuras 2).

Outros alunos referiram-se a fatias, no entanto, os desenhos elucidaram sempre se eram quartos, oitavos ou metades (figura 3).

Na comparação com a unidade, todos os grupos referiram que cada amigo tinha comido menos que uma piza, tendo um deles escrito "se uma piza tem quatro fatias, cada um comeu menos, pois só comeu 3".

Na exploração em plenário de turma o professor solicitou aos alunos que referissem como tinham chegado à solução e os diferentes modos de representação desta foram registados no quadro. Durante a discussão, o professor foi chamando a atenção para o facto de ser possível representar de diferentes modos o mesmo número e introduziu a simbologia da fracção. O apelo à conexão com a divisão foi um dos aspectos realçados no diálogo que se manteve na turma, e o professor acabou por registar no quadro a expressão

$$\frac{3}{4} = 3 : 4.$$

As fracções unitárias surgiram e $3/4$ apareceu igual a

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

e também igual a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Como houve alunos que dividiram a piza em oitavos, houve ainda a resposta $6/8$, o que permitiu notar que afinal $3/4$ de piza era a mesma porção de piza que $6/8$ de piza. A multiplicação também surgiu quando um grupo resolveu dar $1/4$ de piza a cada amigo:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}.$$

Houve um aluno que referiu que tinha comido uma piza menos $1/4$, tendo o professor aproveitado para escrever

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}.$$

No fim da segunda aula os alunos tinham, de um modo informal, abordado já a noção de fracção, a decomposição em fracções unitárias, e a comparação e multiplicação de fracções, o que seria impensável na abordagem tradicional. Nos

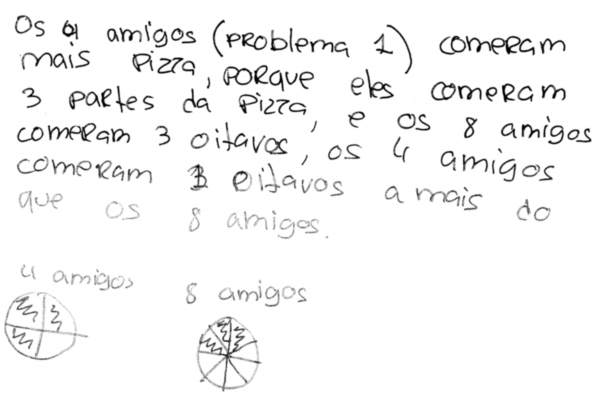

Figura 2. Produção de um grupo a propósito do problema 3.

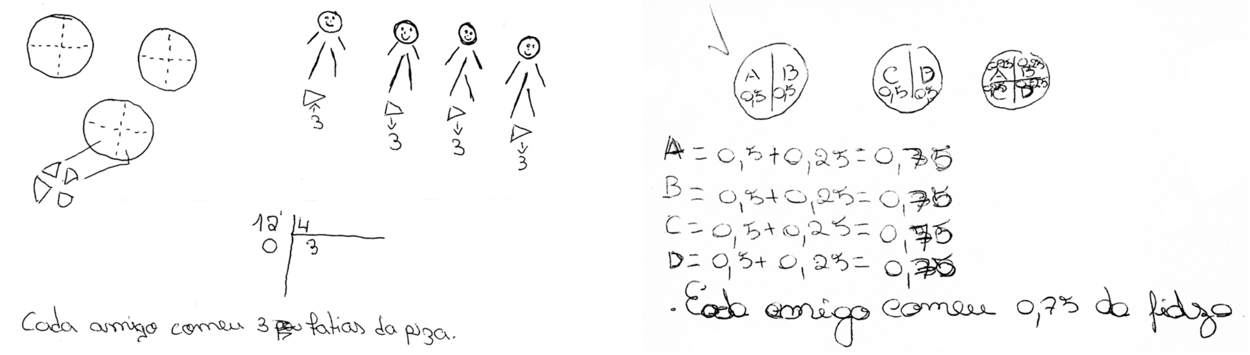

Figura 3. Produções de dois grupos a propósito do problema 1

seis problemas seguintes, surgiram temas como a equivalência de fracções, as fracções impróprias na forma de numeral misto (5 crianças a partilhar 6 chocolates), as fracções decimais (dois bolos de aniversário divididos em 10 fatias iguais), as fracções aplicadas a um conjunto discreto, e a reconstrução da unidade.

Mais tarde houve a preocupação de avaliar até que ponto as fracções sem contexto faziam sentido para estas crianças, tendo sido pedido aos alunos para fazerem mentalmente o cálculo de expressões tais como

$$2\frac{2}{5} + 1\frac{4}{5}$$

e para indicarem, de forma aproximada, o seu lugar numa recta (com a unidade previamente determinada através de alguns números inteiros representados). Nenhum grupo manifestou dúvidas. Houve raciocínios do tipo, "$2/5$ mais $4/5$ é maior que um portanto se 2 mais 1 dá 3, com mais 1 e pouco, assinalo um pouco à frente do 4". Noutra situação, onde se pedia para inventarem problemas que traduzissem expressões dadas, os alunos evidenciaram que os símbolos tinham para eles significado, como mostra o seguinte enunciado de um dos grupos para a expressão

$$2 - 1\frac{1}{3}$$

" Se o André receber duas unidades de chocolate e oferecer 1 unidade de chocolate à Vanessa e $1/3$ à Rita, quanto come o André?"

Através da análise que realizámos das produções dos alunos verificámos que ao longo do tempo estes foram recorrendo cada vez mais ao uso dos símbolos das fracções. Para além disso, notámos também que nenhum dos grupos apresentou respostas sem sentido, o que revela que fizeram um trabalho significativo. No caso das fracções decimais, as produções permitiram realçar a existência de diferentes designações para o mesmo número racional, nomeadamente os numerais decimais, as fracções e as percentagens (por exemplo $3/4 = 0{,}75 = 75\%$). As produções permitiram ainda a abordagem informal de algumas operações aritméticas. De resto, o facto de partirmos das estratégias informais dos alunos, dando espaço ao trabalho ao nível de compreensão de cada grupo, possibilitou que todos estes conceitos, que são reconhecidos como complexos, fossem trabalhados por *todos* os alunos.

Discussão da abordagem

Podemos dizer que esta abordagem se caracteriza pelo seguinte conjunto de aspectos intimamente relacionados. Um primeiro aspecto a realçar tem a ver com o facto da realidade dos alunos ser utilizada como ponto de partida para a construção do conceito de fracção. Neste caso, a realidade utilizada é uma série de situações contextuais do dia-a-dia, onde as fracções surgem de forma natural. Na abordagem tradicional, o ponto de partida para a aprendizagem é a própria Matemática, nomeadamente o conceito matemático de fracção concretizado em figuras, que funcionam como modelos visuais da estrutura matemática. Freudenthal (1973, 1991) refere-se a este aspecto da abordagem tradicional como "inversão anti-didática", observando que o ponto de partida para a aprendizagem da Matemática é o produto final da actividade matemática que foi sendo desenvolvida por matemáticos excepcionais.

Um outro aspecto que caracteriza a abordagem desta experiência, e que está extremamente ligado ao aspecto anterior, é o facto do processo de construção do conceito de fracção ter por base as próprias estratégias informais dos alunos, e as suas produções próprias. É dada assim a possibilidade aos alunos de participarem activamente no seu próprio processo de aprendizagem. O aprender Matemática é assim, nesta abordagem, identificado com o 'fazer Matemática'. Isto está intimamente ligado com a visão de, por exemplo, Freudenthal (1973,1991), de que a Matemática é primariamente uma actividade humana. É a actividade de organizar, relacionar, estruturar, generalizar, provar, formalizar o mundo à nossa volta.

Um terceiro aspecto tem a ver com o tipo de situações problemáticas. Estas são apresentadas de forma aberta (no sentido de que não é ensinado à partida qualquer processo de solução) e são tais que permitem gerar conhecimento matemático (que por sua vez servirá de base à produção de novo conhecimento). O papel do contexto é aqui fundamental. No estudo que realizámos, utilizámos contextos de partilha equitativa como ponto de partida para o estudo das fracções (Streefland, 1986). No entanto, há outros contextos igualmente ricos que deverão também ser usados numa fase inicial do estudo do conceito de fracção, como sendo contextos de medida (que convidem ao refinamento da unidade de medida, fazendo surgir assim as fracções). Neste caso as representações fraccionárias aparecem com a necessidade de comunicar o resultado da medição de uma certa grandeza. Por exemplo na medição de um comprimento, onde a unidade de medida fornecida aos alunos (por exemplo uma tira de papel) não cabe um número inteiro de vezes no comprimento a medir. Há necessidade de fraccionar a unidade em partes tais que daí resulte uma medida exacta, por exemplo

$$3\frac{4}{10} \text{ ou } 3{,}4.$$

As situações são tais que permitem a descoberta de relações e a construção de modelos que vão gradualmente servindo de ponte para a construção de conhecimento matemático mais formal.

Um outro aspecto é o papel e importância que é dada à interacção na sala de aula. Uma vez que é dado espaço a construções próprias das crianças, baseadas no seu conhecimento informal, surge na sala de aula uma grande variedade de estratégias, soluções e graus de compreensão da situação problemática e da sua resolução. É necessário por isso que haja um debate das ideias e descobertas feitas, o que leva à justificação, reflexão e comparação de estratégias, e que por sua vez estimula a consolidação das aprendizagens.

Finalmente, esta abordagem privilegia as conexões matemáticas. O facto das situações problemáticas serem do dia-a-dia e de ser dada liberdade ao aluno para as resolver baseado no seu conhecimento informal (aquilo que sabe naquele momento) faz com que estas conexões surjam de forma natural. De facto, em situações da realidade, as fracções, os decimais e a razão, por exemplo, estão intimamente relacionados.

Esta é assim uma abordagem que é centrada no aluno, uma vez que privilegia a participação activa deste no seu próprio processo de aprendizagem. O aluno tem liberdade de resolver os problemas ao seu nível, recorrendo ao seu próprio conhecimento naquele momento, o que não só valoriza o seu esforço e trabalho mas também permite a diferenciação de raciocínios na sala de aula. Primeiro, a possibilidade de construir ele próprio as soluções, e depois, a possibilidade de argumentar e comparar estratégias, permite ainda que possam ser os próprios alunos e não o professor a validar as respostas. Este tipo de trabalho transmite ainda ao aluno uma outra ideia do que é fazer matemática: o importante não é só chegar à resposta certa mas também e principalmente o descobrir um processo de resolução e saber argumentar sobre a sua correcção.

Notas finais

Note que não defendemos um trabalho exclusivamente em contextos de partilha equitativa. Pretendemos exemplificar uma primeira abordagem às fracções em contextos significativos para os alunos. É importante proporcionar às crianças um trabalho em diversificadas situações, onde as fracções surgem com diferentes significados, de modo a que explorem os conceitos de forma completa e integrada possibilitando uma construção gradual do sentido do número racional. É preciso, portanto, dar tempo aos alunos para irem integrando todos este conceitos e as suas relações, assim como os novos símbolos, e não ter pressa em introduzir regras e algoritmos, correndo o risco de os introduzir antes de que estes possam ter significado para as crianças.

A abordagem que aqui apresentámos foi inspirada no trabalho de Streefland (1986, 1991) sobre o ensino e aprendizagem das fracções e que se insere na corrente matemática designada por Matemática Realista. Esta teoria de Educação Matemática tem vindo a ser desenvolvida nos últimos 35 anos aproximadamente, no Instituto Freudenthal na Holanda. É uma teoria em constante construção mas que teve o seu ponto de partida na ideia de Freudenthal da Matemática como actividade humana. Para ele a Matemática é em primeira instância uma actividade, tendo vindo a constituir um corpo organizado de conhecimentos, no entanto a essência da Matemática não são as estruturas matemáticas mas sim o processo que conduz a essas estruturas. Segundo Freudenthal, a Matemática deveria ser assim também para os alunos, uma actividade. Estes deveriam aprender Matemática, através do fazer Matemática, matematizando assuntos da realidade do dia-a-dia e matematizando a sua própria actividade[3]. No fundo, através de um processo de matematização progressiva, deveria ser dado aos alunos a oportunidade de reinventar a Matemática. Assim como a actividade de matemáticos excepcionais resultou na Matemática que conhecemos hoje, a actividade dos alunos pode resultar na construção de Matemática (Gravemeijer, 2005). Esta é também a visão de Fosnot & Dolk (2002), que se referem aos alunos como 'pequenos matemáticos'.

Finalmente, e dado o exposto, gostaríamos de deixar uma ideia no ar: porque não introduzir as fracções já no 1º ciclo? Utilizando esta abordagem, é possível trabalhar de forma informal, e muito naturalmente, muitos dos conceitos que hoje são abordados apenas no 2º ciclo, o que constituiria uma boa base para um trabalho posterior mais formal no 5o e 6o anos. Se precisamos de dar tempo aos alunos para construir os conceitos, descobrir relações, antes de introduzir as regras e procedimentos, e sendo esta abordagem tão intuitiva para os alunos, não será desejável iniciar o trabalho desta maneira mais cedo? Deixamos assim aqui um convite à discussão sobre este assunto.

Notas

* No âmbito do Projecto *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares*.

1 No programa do 1º ciclo em vigor as fracções aparecem como operadores partitivos aplicados a um conjunto discreto.

2 Esta experiência foi realizada em 3 turmas.

3 Note que não é necessário portanto que se parta sempre de contextos reais, do dia-a-dia. A palavra realista tem a ver com o papel essencial dos contextos reais, por um lado, mas refere-se também ao facto do ponto de partida dever ser o que é sentido pelo aluno como real, aquilo que sabe, podendo ser portanto um contexto da Matemática, desde que seja algo real para o aluno.

Referências

Streefland, L. (1986). Rational analysis of realistic mathematics education as a theoretical source for Psychology. Fractions as a paradigm. *European Journal of Psychology of Education*, *1*, (2), 67-82.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education, a Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? *Actas Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas*, 83-101.

Fosnot, C.T. & Dolk, M. (2002). *Young Mathematicians at work — Constructing Fractions, Decimals, and Percents*. Heinemann.

Cecília Monteiro, Escola Superior de Educação de Lisboa
Hélia Pinto, Escola Superior de Educação de Leiria
Nisa Figueiredo, Instituto Freudenthal, Holanda