Existência de Raízes

Raiz Quadrada

Teo. Todo $a \geq 0$ possui raiz quadrada $\sqrt{a}$.

- $a = 0 \Rightarrow \sqrt{a} = 0$.

$x^2 = a$ $\quad \sqrt{a}$ $\quad -\sqrt{a}$

- Para $a > 0$, $\sqrt{a} = \sup S$ com $S = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 \leq a\}$.
- Por definição $\sqrt{a} \geq 0$ e $\sqrt{a} = a^{1/2}$.

$\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 = a < 0$

Raízes de ordem maior

Axioma 10 também pode ser utilizado para mostrar que

- se n é ímpar $\exists! \, x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n = a$.

$x := a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ $\quad$ $a \in \mathbb{R}$ qualquer

- se n é par e $a > 0$ $\exists! \, x > 0$ tq $x^n = a$.

$x := a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

OBS: • $a = 0 \Rightarrow \sqrt[n]{0} = 0 \quad \forall n$ inteiro positivo.

• n par $\Rightarrow x^n = x^{2k} = (x^2)^k \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercícios: 1) Verifique que a equação $x^n = a$ para $a > 0$ possui exatamente duas raízes reais se n é um inteiro positivo par.

2) Mostre que $(x^n)^m = x^{nm} \quad \forall n, m$ inteiros positivos

Assim, se $r = \frac{m}{n}$, m, n inteiros positivos

$$x^r = x^{m/n} := \sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{1/n}$$

Sempre que $\sqrt[n]{x^m}$ estiver definida.

Dado $x \neq 0$ definimos $x^{-r} := \frac{1}{x^r}$ sempre que x^r estiver bem definido.

Exercício: Mostre que $\forall r, s \in \mathbb{Q}$ temos

(i) $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$ (ii) $(x^r)^s = x^{rs}$

(iii) $(xy)^r = x^r y^r$. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Indução Matemática

Teo. (Princípio da Indução Matemática)

Seja S um subconjunto dos inteiros positivos $\mathbb{P}$ satisfazendo.

(i) $1 \in S$

(ii) Se $k \in S$ então $k+1 \in S$.

Então todos os inteiros positivos estão em S.

dem. Note que S é indutivo. Logo $S \supset \mathbb{P}$. ∎

OBS: Veja que $S = \mathbb{P}$.

Exemplos:

1) Mostre que $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3}$ n inteiro positivo

$\mathbb{N}$

$S = \{ n \in P \text{, desigualdade é verdadeira} \}$

$\underline{? \; S = P}$

(i) $n = 1 \in S$ pois $(1-1)^2 = 0 < \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}$. ✓

(ii) Hipótese de indução suponha $k \in S$.

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (k-1)^2 < \frac{k^3}{3}.$$

Temos que mostrar que $\underline{n = k+1}$ também satisfaz a desigualdade, i.e.,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 < \frac{(k+1)^3}{3}.$$

Com efeito:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (k-1)^2 + k^2 < \frac{k^3}{3} + k^2$$

Basta provar $\frac{(k+1)^3}{3} > \frac{k^3}{3} + k^2$ para concluir a prova.

$$(k+1)^3 = (k^2 + 2k + 1)(k+1) = k^3 + 2k^2 + k + k^2 + 2k + 1$$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

$$\therefore \frac{(k+1)^3}{3} = \frac{k^3}{3} + k^2 + k + \frac{1}{3} > \frac{k^3}{3} + k^2 \quad k \text{ inteiro positivo.}$$

OBS: Algumas afirmações (propriedades) $A(n)$ são válidas $\forall\, n \geq n_1 > 1$. Nesse caso usa-se indução

$$\tilde{A}(n) = A(n + n_1 - 1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Princípio da Boa Ordenação

Todo subconjunto não vazio de inteiros positivos possui um elemento minimal

Def: $T \subset \mathbb{P}$, $t_0 \in T$ é minimal se $t_0 \in T$ e $t \geq t_0\ \forall t \in T$.

Teo. O princípio da boa ordenação é equivalente a indução matemática.

dem. $(\Rightarrow)$ Seja $S \subset \mathbb{P}$ indutivo. Temos que mostrar que $S = \mathbb{P}$ ou $S \supset \mathbb{P}$. Suponha por absurdo que $S \neq \mathbb{P}$.
$B = \mathbb{P} - S \neq \phi$, $B \subset \mathbb{P} \Rightarrow$ pelo Princípio da Boa ordenação B possui elemento minimal b. Se b é minimal em B, $b - 1 \in S$. Com S é indutivo $b - 1 + 1 = b \in S$ $\#$.

$(\Leftarrow)$ $T \subset \mathbb{P}$ queremos mostrar que T possui elemento minimal. Suponha por absurdo que T não possui elemento minimal. Seja $S \subset \mathbb{P}$ o conjunto satisfazendo $s \in S$ se $s < t\ \forall t \in T$

$S \neq \emptyset$ De fato, $1 \in S$ já que T não possui elemento minimal

Além disso, dado $k \in S$, temos que $k+1 \in S$.

Note que se S é indutivo, então $S = \mathbb{P} \supset T$ $\not\downarrow$.

Se $k+1 \notin S$ $\exists\, t_1 \in T$ tq $t_1 \leq k+1$.

Como T não possui elemento minimal $\exists\, t_2 \in T$ tal que $t_2 < t_1 \leq k+1 \rightsquigarrow k \geq t_2$ $\not\downarrow$ já que $k \in S$

$\blacksquare$