Números Reais

- Axiomas 1-6: Operações Algébricas
- Axiomas 7-9. Axiomas de ordem
- Axioma 10: completeza

Antes introduzimos os inteiros e racionais

Conjunto indutivo $S \subset \mathbb{R}$ é indutivo se satisfaz:

(i) $1 \in S$; (ii) $\forall x \in S$ temos $x+1 \in S$.

Exemplos: $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$ são indutivos.

Def. Chamamos de inteiro positivo o nº real que pertence a todo conjunto indutivo de $\mathbb{R}$.

Denotamos por P o conjunto formado por todos os inteiros positivos

- Se $S \subset \mathbb{R}$ é indutivo, então $P \subset S$.

$p \in P$ p inteiro positivo $\rightarrow$ $p \in \hat{S}$ $\forall \hat{S} \subset \mathbb{R}$ indutivo. $\therefore p \in S$

Exercício

- $P = \bigcap_{S \subset \mathbb{R}} S$ tal que S é indutivo.
- P também é indutivo.

Inteiros negativos: $-P = \{-x \in \mathbb{R} : x \in P\}$ é o conj. dos inteiros negativos.

Números Inteiros: É o subconjunto

$$\mathbb{Z} = P \cup \{-P\} \cup \{0\}.$$

O quociente dos números inteiros é chamado de racionais

$$\mathbb{Q} = \{ p/q \in \mathbb{R} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ com } q \neq 0\}.$$

- $\mathbb{Q}$ satisfaz os nove axiomas introduzidos até o momento.

Def: Todo conjunto que satisfaz os Axiomas 1-9 é chamado corpo ordenado.

OBS: Os nove axiomas até agora introduzidos não podem provar que $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = 2$ (por exemplo).

Axioma 10

Antes algumas definições:

Seja $S \subset \mathbb{R}$ não vazio e suponha que $\exists\, B \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \leq B \quad \forall\, x \in S.$$

- B é chamado cota superior de S e S é limitado superiormente por B.
- Se $B \in S$ dizemos que B é o maior elemento de S ou o elemento maximal de S. $B = \max S$
- Se S não possui cota superior dizemos que S é ilimitado superiormente

Exemplos

1) $S_1 = \mathbb{R}^+$ não é limitado superiormente.

$B \geq x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$

$B \geq 0 \rightsquigarrow B \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow \begin{cases} B+1 \in \mathbb{R}^+ \\ B+1 > B \end{cases}$ $\lightning$.

2) $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ $\quad 1 = \max S_2$.

3) $S_3 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ $\quad 1$ é cota superior mas $1 \notin S_3$.

OBS: S_2 e S_3 possuem várias cotas superiores.

Def. Dizemos que $B \in \mathbb{R}$ é a menor cota superior de $S \subset \mathbb{R}$ não vazio se:

(i) B é cota superior.

(ii) B é a menor cota superior. (Se C é cota superior de S então $C \geq B$.)

Teo. A menor cota superior de um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é única.

dem. Se B_1 e B_2 são menor cota superior de S então $B_1 = B_2$.

Com efeito, como B_1 é a menor cota superior de S, temos $B_1 \leq B_2$. Por outro lado, B_2 também é menor cota superior de S $\Longrightarrow$ $B_2 \leq B_1$. $\therefore B_1 = B_2$ ■

Def. Se B é a menor cota superior de $S \subset \mathbb{R}$ dizemos que B é supremo de S. Notação: $B = \sup S$.

Axioma 10 Todo conj. não vazio $S \subset \mathbb{R}$ ltdo superiormente possui supremo.

OBS:
- Enfatizamos que $\sup S$ pode não pertencer a S.
- Nos exemplos 2 e 3 acima temos

$1 = \sup S_i$ $\quad i = 2$ e 3.

$\sup S_2 \in S_2$ mas $\sup S_3 \notin S_3$.

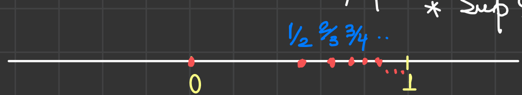
Exemplo 4) $S = \{1 - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n = 1, 2, \dots\}$

$1 - \frac{1}{n} < 1 \quad \forall n = 1, 2, \dots$ $\Longrightarrow$ S é ltdo superiormente.

$\therefore$ Pelo Axioma 10 $\exists \sup S$.

Quem é $\sup S$?

* $\sup S = 1$ (A ver!)



* $1 \notin S$.

Analogamente podemos introduzir os conceitos:

- limitado inferiormente; $\exists L \in \mathbb{R}$ tq. $x \geq L \ \forall x \in S$

- cota inferior;
- mínimo de S ou elemento minimal de S. Se $L \in S$

Def. L é a maior cota inferior de S se:

(i) $L \leq x \quad \forall x \in S$,

(ii) L é a maior cota inferior. Se T é cota inferior e L é a maior cota inferior $\Rightarrow L \geq T$.

Def Se L é a maior cota inferior de S dizemos que L é o ínfimo de S. Notação: $\boxed{L = \inf S}$.

OBS. Como sup também temos que ínfimo é único. (Verifique!)

Teo. Todo conj. ltdo inferiormente possui ínfimo

dem. Seja S ltdo inferiormente. Então $-S = \{-x \in \mathbb{R} : x \in S\}$ é ltdo superiormente. Pelo Axioma 10 $\exists \sup(-S)$.

$$L \ \inf S = -\sup(-S).$$

Se $L \leq x \ \forall x \in S$
$\Rightarrow -L \geq -x \ \forall x \in S$
i.e. $-L \geq x \ \forall x \in -S$

$\sup(-S) \geq x \ \forall x \in -S$

$\Rightarrow -\sup(-S) \leq -x \ \forall x \in -S$

i.e. $-\sup(-S) \leq x \ \forall x \in S$.

Portanto $-\sup(-S)$ é cota inferior para S.

Suponha $\exists T > -\sup(-S)$
$\Rightarrow -T < \sup(-S)$ é cota superior para $-S$ ↯

Logo $-\sup(-S) = \inf S$. ∎

Exercício: Mostre que $S = \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n = 1, 2, \dots \right\}$ possui ínfimo e supremo.

Sugestão: Use o binômio de Newton.