Electromagnetismo 1

- ⚡O Teorema de Helmholtz
- ⚡Condições de contorno
- ⚡O potential elétrico
- ⚡Trabalho e energia

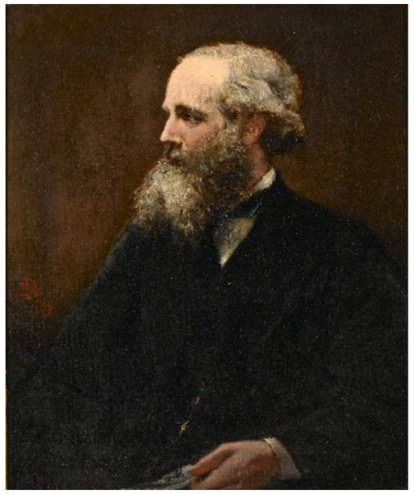
Equações de Maxwell

Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}$$

Lei de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{1}}{\epsilon_{\mathbf{0}}} \rho$$



Lei de Gauss p/ $\overrightarrow{B}$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Lei de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_{\mathbf{0}} \, \mu_{\mathbf{0}} \frac{\partial \, \mathbf{E}}{\partial \, \mathbf{t}} = \mu_{\mathbf{0}} \, \mathbf{J}$$

Eq. da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \mathbf{0}$$

Força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{F} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

Lei de Gauss & Eletrostática

- A equação mais básica do Eletromagnetismo é a **Lei de Gauss**:

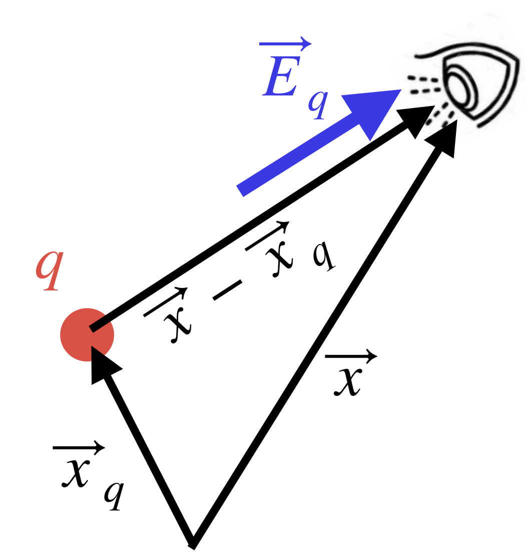
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) \quad , \quad \text{com } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad .$$

- Nós vimos, na aula passada (e vocês já viram isso nas disciplinas de Física básica) que a solução é:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad .$$

- Além disso, podemos expressar a densidade de carga (uma ***distribuição***) como uma soma de cargas pontuais:

$$\rho(\vec{x}) = \sum_i q_i \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$



- Para uma ***carga pontual*** o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E}_q = -\vec{\nabla}\phi_q(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_q|}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{x} - \vec{x}_q}{|\vec{x} - \vec{x}_q|^3}$$

- Porém, antes de começar a dar exemplos disso, como podemos saber se a solução acima é **única**?

O Teorema de Helmholtz

- Dito de outro modo, dada **apenas** a equação:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) \quad ,$$

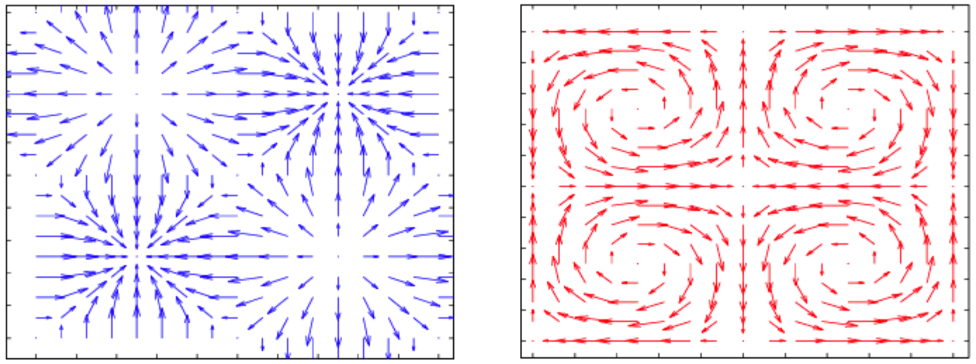
é possível encontrar uma **solução que seja única**?

- A resposta é… não!! Na verdade, nós podemos adicionar a qualquer campo $\vec{E}$ que seja solução, um outro campo $\vec{H}$ que resolve a **equação homogênea**, $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$, ou seja,

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \vec{H} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) + 0 \ .$$

- Entretanto, se especificarmos não apenas o **divergente** do campo, mas também o seu **rotacional**, daí as equações têm (basicamente…) uma ***solução única***!

- Em outras palavras, para qualquer campo $\vec{F}$, uma vez que especificamos:



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = S_{\rm div}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{S}_{\rm rot} \ ,$$

então, aí sim, há uma **solução única para** $\vec{F}$. Quem diz isso é o **Teorema de Helmholtz.**

O Teorema de Helmholtz

- Nós vamos mostrar que, dado o par de equações:

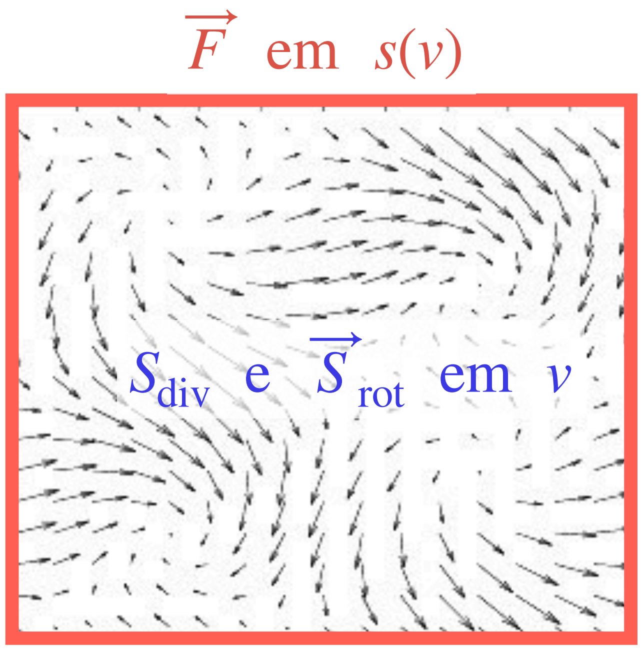
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = S_{\text{div}} \quad \text{and} \quad \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{S}_{\text{rot}} \ ,$$

então a **solução única** para o campo vetorial $\vec{F}$ é dada por:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Psi + \vec{\nabla}\times\vec{T} \ , \quad \text{onde}$$

$$\Psi = \frac{1}{4\pi}\int_v d^3x' \, \frac{S_{\text{div}}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi}\oint_{s(v)} d\vec{s}' \cdot \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \ , \quad \text{e}$$

$$\vec{T} = \frac{1}{4\pi}\int_v d^3x' \, \frac{\vec{S}_{\text{rot}}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi}\oint_{s(v)} d\vec{s}' \times \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$



- Portanto, é necessário especificar não só as **fontes** do divergente e do rotacional **no volume** v, mas também o ***comportamento do próprio campo*** ($\vec{F}$) na **borda** (a superfície s que engloba o volume)! Isso pode parecer esquisito, mas as razões para isso ficarão claras mais adiante.

O Teorema de Helmholtz

- Para demonstrar esse teorema vamos começar recordando um dos resultados da aula passada:

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad , \text{ de forma que}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

- Isso permite que nós possamos utilizar as propriedades da função δ de Dirac e re-escrever o campo na seguinte forma:

$$F(\vec{x}) = \int_v d^3x'\,\vec{F}(\vec{x}')\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\int_v d^3x'\,\vec{F}(\vec{x}')\,\vec{\nabla}_x^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_x^2\int_v d^3x'\,\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

- Por outro lado, nós sabemos que $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$, portanto essa equação fica:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_x\left(\underbrace{\vec{\nabla}_x\cdot\int_v d^3x'\,\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{①}\right) + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_x\times\left(\underbrace{\vec{\nabla}_x\times\int_v d^3x'\,\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{②}\right)$$

O Teorema de Helmholtz

- O primeiro termo pode ser "trabalhado" até ficar numa forma mais graciosa:

$$① = \int_v d^3x' \, \vec{\nabla}_x \cdot \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int_v d^3x' \, \vec{F}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int_v d^3x' \, \vec{F}(\vec{x}') \cdot \left(-\vec{\nabla}_{x'}\right) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$= -\int_v d^3x' \, \vec{\nabla}_{x'} \cdot \left[\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right] + \int_v d^3x' \left[\vec{\nabla}_{x'} \cdot \vec{F}(\vec{x}')\right] \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Integral por partes

$$= -\oint_{s(v)} d\vec{s}' \cdot \left[\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right] + \int_v d^3x' \left[S_{\text{div}}(\vec{x}')\right] \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad = 4\pi \, \Psi \qquad !!!$$

- De forma inteiramente análoga, você pode mostrar (***mostre!***) que:

$$② = \int_v d^3x' \, \vec{\nabla}_x \times \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$= -\oint_{s(v)} d\vec{s}' \times \left[\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right] + \int_v d^3x' \left[\vec{S}_{\text{rot}}(\vec{x}')\right] \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad = 4\pi \, \vec{T} \qquad !!!$$

O Teorema de Helmholtz

- Portanto, chegamos ao resultado que:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_x ① + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_x \times ②$$

$$\Rightarrow \ \vec{F}(\vec{x}) = -\ \vec{\nabla}_x \Psi + \vec{\nabla}_x \times \vec{T}$$

- O caso mais familiar é a **eletrostática** , com ***condições de contorno*** tais que $\vec{E} \to 0$ quando $x \to \infty$. Temos então que $S_{\text{div}} \to \rho/\epsilon_0$, $\vec{S}_{\text{rot}} \to 0$, e $\Psi \to \phi$, com o resultado:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\ \vec{\nabla}_x \phi = -\ \vec{\nabla}_x \left[\frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right]$$

- Na **magnetostática** , também sob as condições de contorno $\vec{B} \to 0$ quando $x \to \infty$, temos que $S_{\text{div}} \to 0$, $\vec{S}_{\text{rot}} \to \mu_0 \vec{J}$ e $\vec{T} \to \vec{A}$ (o *potencial-vetor*), com o resultado:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla}_x \times \vec{A} = \vec{\nabla}_x \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right]$$

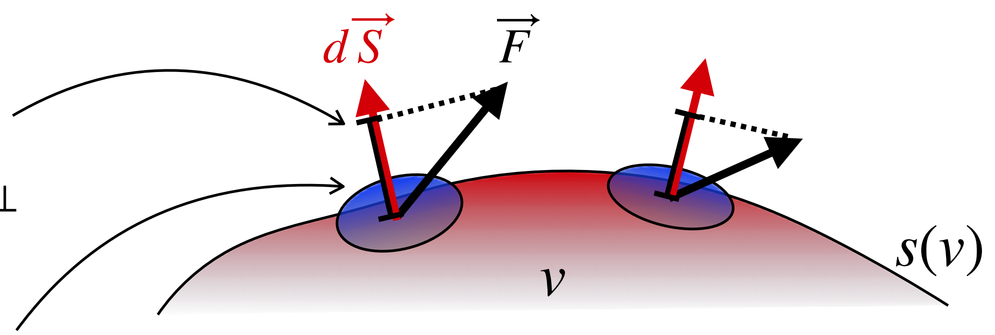
Condições de contorno

- O Teorema de Helmholtz ressalta o fato de que sempre, **sempre**, ***SEMPRE*** precisamos especificar as **condições de contorno** dos campos:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Psi + \vec{\nabla} \times \vec{T} \quad , \quad \text{com}$$

$$\Psi = \frac{1}{4\pi}\int_v d^3x' \, \frac{S_{\text{div}}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi}\oint_{s(v)} d\vec{s}' \cdot \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \Longleftarrow \quad \vec{F}_\perp$$

$$\vec{T} = \frac{1}{4\pi}\int_v d^3x' \, \frac{\vec{S}_{\text{rot}}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi}\oint_{s(v)} d\vec{s}' \times \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \Longleftarrow \quad \vec{F}_{||}$$



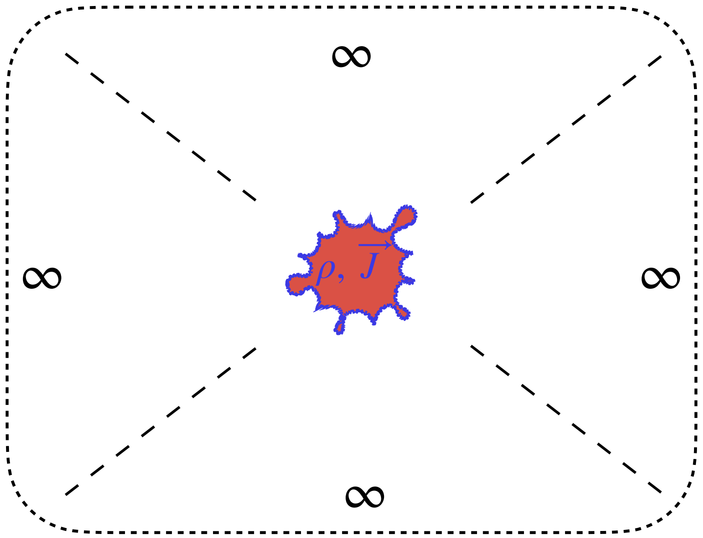
- Note que nós podemos adicionar quaisquer constantes aos "potenciais": $\Psi \to \Psi + c\,,\ \vec{T} \to \vec{T} + \vec{d}$

- Portanto, além da fonte ($\vec{S}_{div}$) é necessário também conhecer a **componente perpendicular à superfície** (e paralela a $d\vec{S}$) do campo para especificar a ***componente relacionada ao divergente*** Ψ ($\to \phi$);

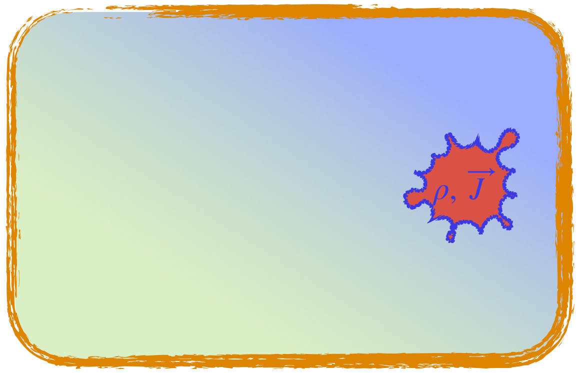
- Similarmente, além da fonte ($\vec{S}_{rot}$), a componente **paralela à superfície** (perpendicular a $d\vec{S}$) precisa ser especificada para determinar a **componente rotacional** $\vec{T}$ ($\to \vec{A}$).

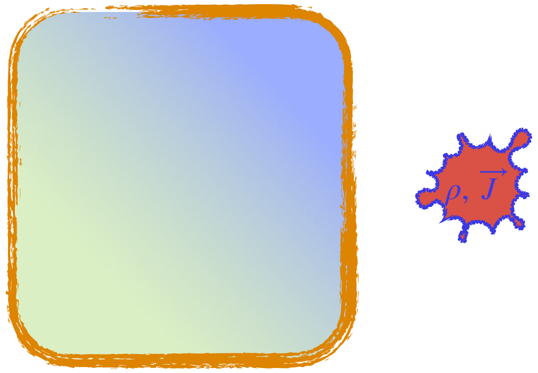
Condições de contorno

- A situação mais simples é aquela na qual devemos encontrar os campos electromagnéticos numa vizinhança de fontes (cargas e correntes) que estejam ***completamente isoladas***. Nesse caso temos que o volume $v \to \mathbb{R}^3$, e a “borda" é empurrada "para o infinito", então naturalmente tomamos $\vec{F} \to 0$ em $|\vec{x} - \vec{x}'| \to \infty$.



- Uma outra situação comum é quando colocamos as fontes na vizinhança de **condutores, isolantes ou meios magnéticos**, que limitam de alguma forma o valor dos campos electromagnéticos nas superfícies (internas ou externas) desses materiais.





O potencial elétrico

- Quando temos cargas elétricas estáticas, as Equações de Maxwell se reduzem a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

- Na ausência de condições de contorno não-triviais (ou seja, se $\vec{E} \to 0$ com $x \to \infty$), a solução é simplesmente:

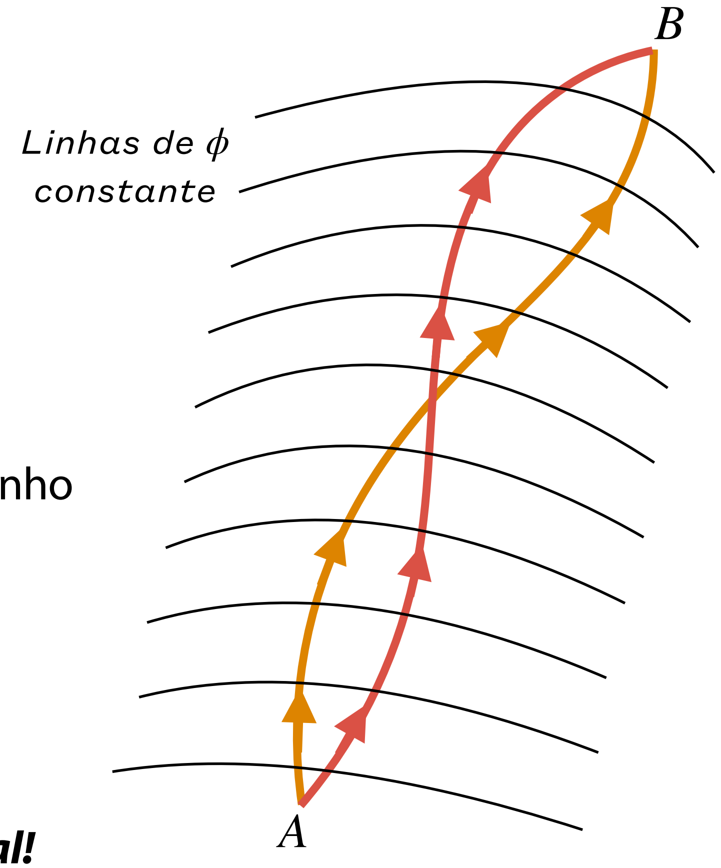
$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi \quad ,$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

- Nesse caso, o campo eletrostático é o ***gradiente*** de uma ***função escalar*** (ϕ).
- Uma das propriedades do gradiente é que, se integramos um gradiente ao longo de um caminho $d\vec{l}$, podemos pensar no gradiente como $\vec{\nabla} \to \hat{l}\, d/dl$, e então:

$$\int_A^B d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}\phi = \phi(B) - \phi(A) \quad ,$$

ou seja, a integral do gradiente retorna a ***diferença da função entre os pontos final e inicial!***



O potencial elétrico

- Essa propriedade está ligada à noção de **trabalho** feito pelo campo elétrico. Para ver isso, vamos tomar a ***Força de Lorentz***:

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

- No caso em que temos apenas um campo elétrico, o **trabalho feito pelo campo sobre uma carga pontual** q é dado por:

$$W_{AB} = \int_A^B d\vec{l} \cdot (q\,\vec{E}) \;= -\,q \int_A^B d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}\phi \;= -\,q\,\Delta\phi_{AB}$$

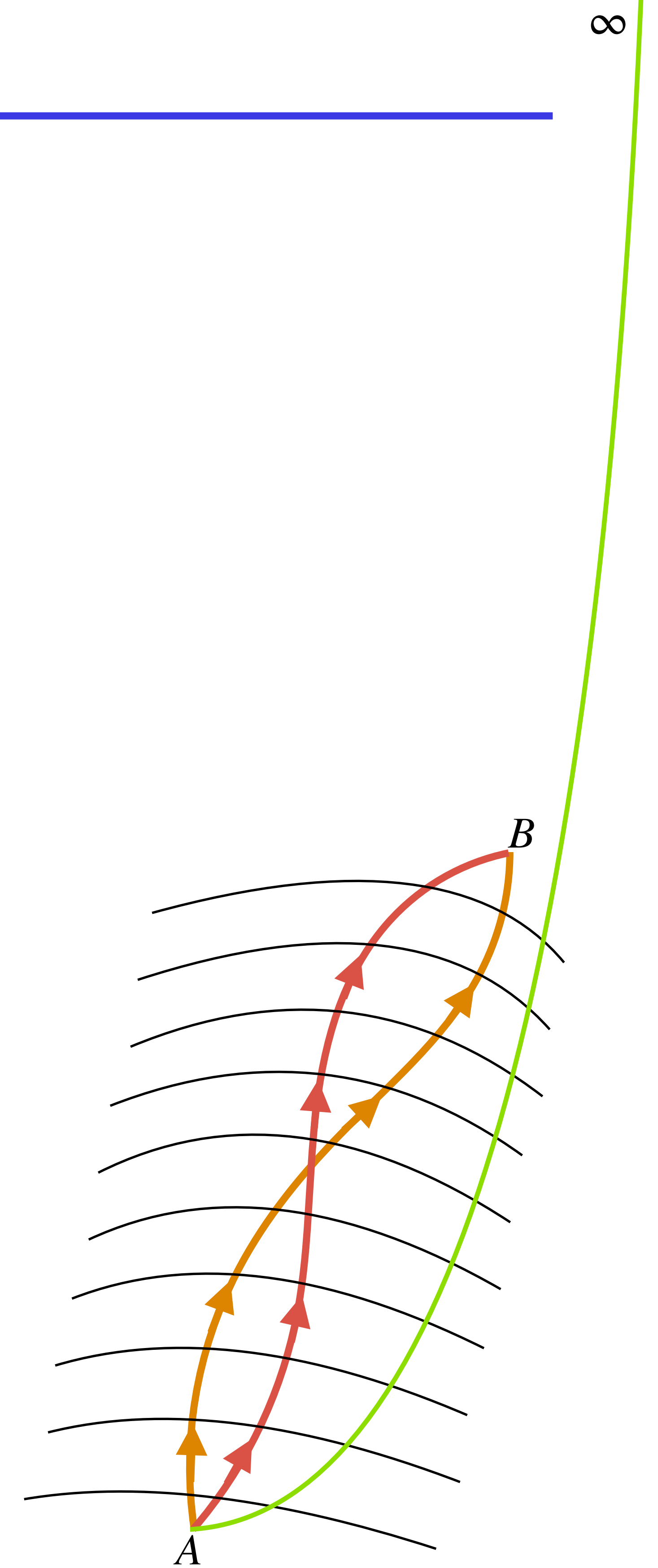
$$\Rightarrow \quad W_{AB} = q\,\left(\phi_A - \phi_B\right)$$

- Em particular, o trabalho necessário para mover essa carga até o ***infinito*** é dada por:

$$W_{A\to\infty} = q\,\phi_A$$

- Isso significa que podemos **associar uma energia potential a qualquer ponto**:

$$W_{A\to\infty} \;\to\; U(\vec{x}_A) \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F}(\vec{x}_A) = -\left[\vec{\nabla}U\right]_{\vec{x}_A} = -\,q\left[\vec{\nabla}\phi\right]_{\vec{x}_A} = q\,E(\vec{x}_A)$$



Unidades

- Neste momento nós temos que discutir a questão de **unidades**.
- **Lei de Coulomb:**

$$\vec{F}_{q_1 q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\hat{r}}{r^2} \quad , \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\mathbb{C}^2}{N m^2} \quad , \quad 1\mathbb{C} = 6.2 \times 10^{18}\, e$$

- **Campo Elétrico:**

$$\vec{F}_q = q\vec{E} \quad \Rightarrow \quad [E] = \frac{N}{\mathbb{C}}$$

- **Potencial Elétrico:**

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad [\phi] = [E]m = \frac{N m}{\mathbb{C}} = \mathrm{V} \ \text{(Volt)}$$

$$1\ \mathrm{V} = \frac{N m}{\mathbb{C}} = \frac{N m/s}{\mathbb{C}/s} = \frac{W}{A} \quad \text{(Watts/Ampère)} \quad , \quad \text{com} \quad [E] = \frac{\mathrm{V}}{m}$$

- Exemplo: uma **faísca** produz campos de magnitudes $10^3 - 10^4\ \mathrm{V}/m$

Alguns exemplos

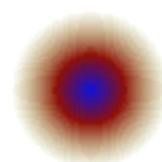
Coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \hat{\theta}\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\, r^2 E_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\, \sin\theta\, E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}\right]$$

- Vamos esquentar os motores lidando com algumas situações bem simples.
- **#1:** Primeiro, vamos calcular o campo elétrico de uma configuração ***esfericamente simétrica*** de cargas, $\rho(r)$.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\nabla^2\phi = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \quad , \quad \rho(r) \;\rightarrow$$



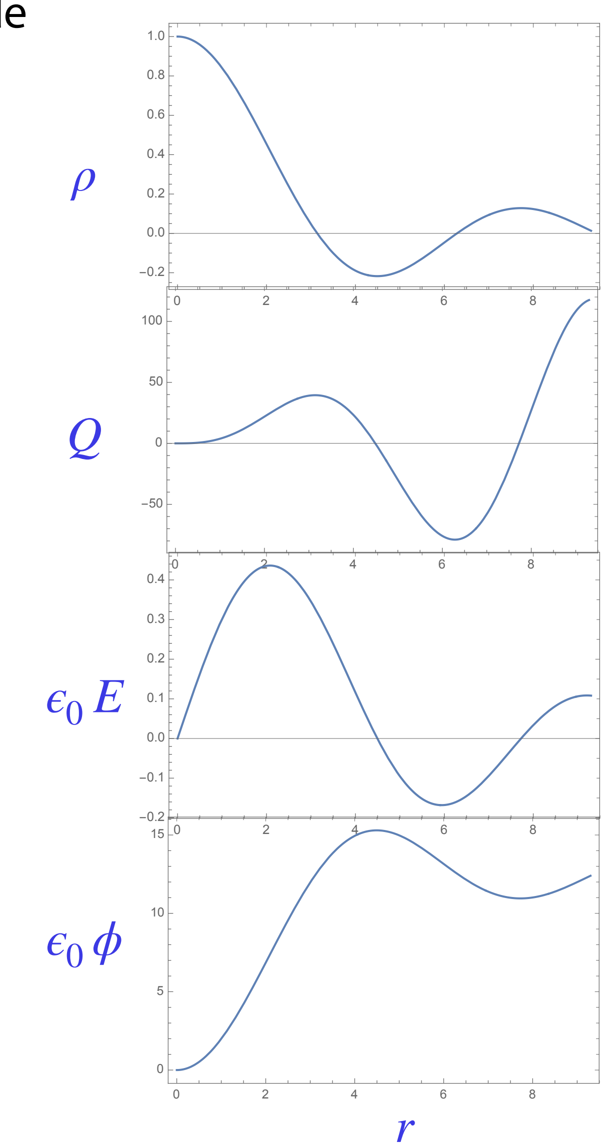
- Usando a simetria esférica, tomamos a forma integral da Lei de Gauss numa esfera de raio r:

$$\oint_r d\vec{S}\cdot\vec{E} = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} \quad ,$$ o que nos permite determinar:

$$4\pi\, r^2\, E_r(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} \quad , \quad \text{onde} \quad Q(r) = 4\pi\int_0^r dr'\, r'^2\, \rho(r')$$

- Podemos também calcular o potencial, usando o fato que, com a simetria esférica, temos:

$$-\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) = E_r(r) \quad \Longrightarrow \quad \phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^r dr'\,\frac{Q(r')}{r'^2}$$



Alguns exemplos

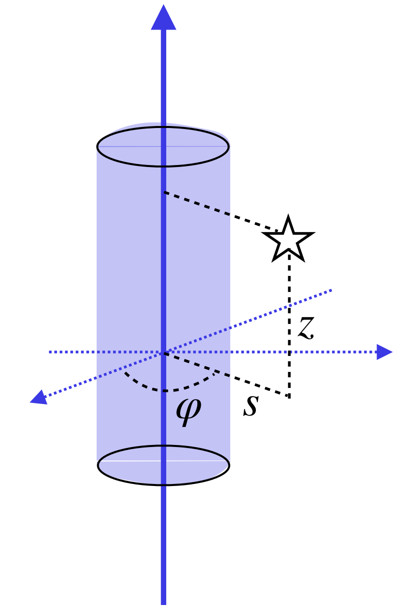
Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}\phi = \boxed{\hat{s}\frac{\partial\phi}{\partial s}} + \hat{\varphi}\frac{1}{s}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{s}\frac{\partial\, s\, E_s}{\partial s} + \frac{1}{s}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- **#2:** Vamos agora lidar com um exemplo com ***simetria axial*** (cilíndrica) [notação: $s \to \rho$] :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\nabla^2\phi = \frac{\rho(s)}{\epsilon_0} \quad , \quad \text{ou seja, a densidade de carga não depende nem de } z \text{ nem de } \varphi$$

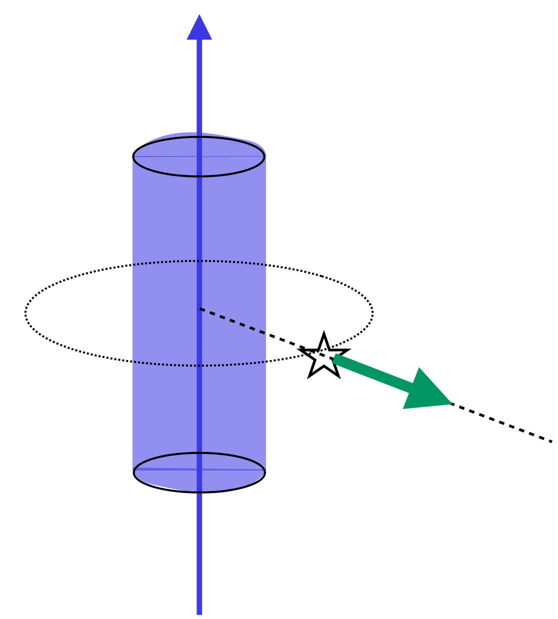


- Usando a simetria axial no volume de um cilindro de raio s, escrevemos a Lei de Gauss como:

$$\oint_s d\vec{S}\cdot\vec{E} = \frac{Q(s)}{\epsilon_0} \quad , \quad \text{com} \quad \vec{E} = \hat{s}\,E_s$$

- Note que neste caso tanto o volume quanto a carga dentro desse volume podem **divergir!**
- Mesmo assim, o **campo não se torna infinito.** Vamos tomar o caso de um **cilindro muito longo,** de altura Z, para o qual desprezamos a contribuição do topo e da base do cilindro:

$$(2\pi s\, Z)\, E_s = \frac{Z}{\epsilon_0}2\pi\int_0^s ds'\, s'\,\rho(s'), \equiv \frac{Z\,\pi}{\epsilon_0}\lambda(s) \quad \Longrightarrow E_s = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\lambda(s)}{2\,s}$$



- O potencial pode ser calculado da mesma forma que antes:

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial s}}\phi(s) = E_s(s) \quad \Longrightarrow \quad \phi(s) = -\frac{1}{2\epsilon_0}\int_0^s ds'\,\frac{\lambda(s')}{s'}$$

- Note que, a menos que a densidade linear de cargas $\lambda \to 0$ for $s \to \infty$, temos $|\phi| \to \infty$!! Por que??…

Alguns exemplos

Coordenadas Cartesianas:

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- **#3:** simetria planar/Cartesiana
- Neste caso assumimos que a densidade de carga depende apenas de uma das dimensões (digamos, z), $\rho = \rho(z)$
- Usando a simetria simetria no plano $x - y$, a Lei de Gauss no volume de um "tijolo" de lados $x - y - z$ temos:

$$\oint_s d\vec{S}\cdot\vec{E} = \frac{Q(z)}{\epsilon_0} \quad , \quad \text{com } \vec{E} = \hat{z}\,E_z$$

- Novamente, o volume (e as cargas) podem **divergir**, já que a área total do plano x-y diverge. Entretanto, o **campo não deve explodir em nenhum ponto** (desde que ρ seja finito).
- Agora temos de especificar cuidadosamente qual é o volume fechado que estamos considerando.
- Aqui vamos assumir que o volume vai de $z = -\infty$ até uma posição z. Vamos expressar a área no plano $x - y$ como sendo A, o que torna a integral acima:

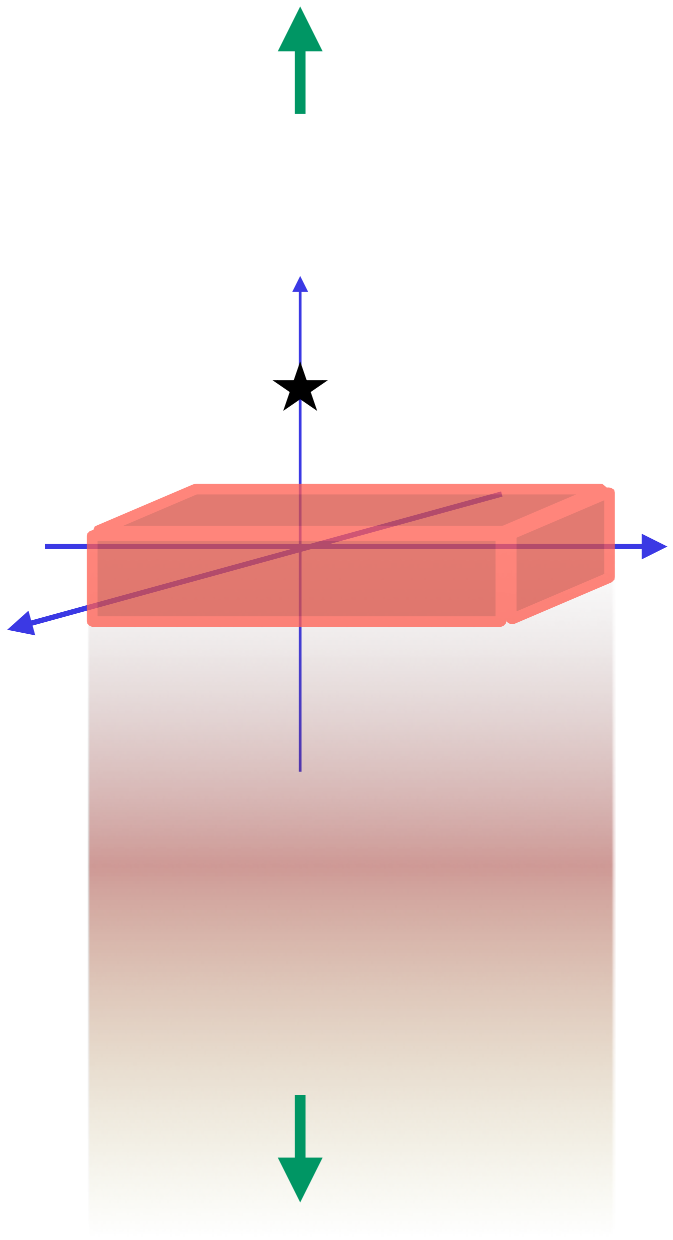
$$A\,[E_z(z) - E_z(z \to -\infty)] = \frac{A}{\epsilon_0}\int_{-\infty}^{z} dz'\,\rho(z') = \frac{A}{\epsilon_0}\,\sigma(z) \quad ,$$

onde definimos a ***densidade de carga por unidade de área*** σ.

- Usando essa definição, obtemos que:

$$E_z + E_{z,\infty} = \frac{\sigma(z)}{\epsilon_0}$$, onde definimos o campo em $z \to -\infty$ em termos do campo em $z \to +\infty$:

$$E_z(z \to -\infty) \equiv -E_{z,\infty}$$



Alguns exemplos

Coordenadas Cartesianas:

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- Agora, vamos assumir que a carga está limitada a uma certa região acima e abaixo do plano $z = 0$, de tal forma que metade da carga está acima, e metade da carga está abaixo do plano, e a densidade superficial total é $\sigma_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \rho(z)$

- Nesse caso não há diferença entre "acima" e "abaixo", podemos tomar o limite $z \to +\infty$ e escrever:

$$E_{z,\infty} - E_{z,-\infty} = 2\,E_{z,\infty} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

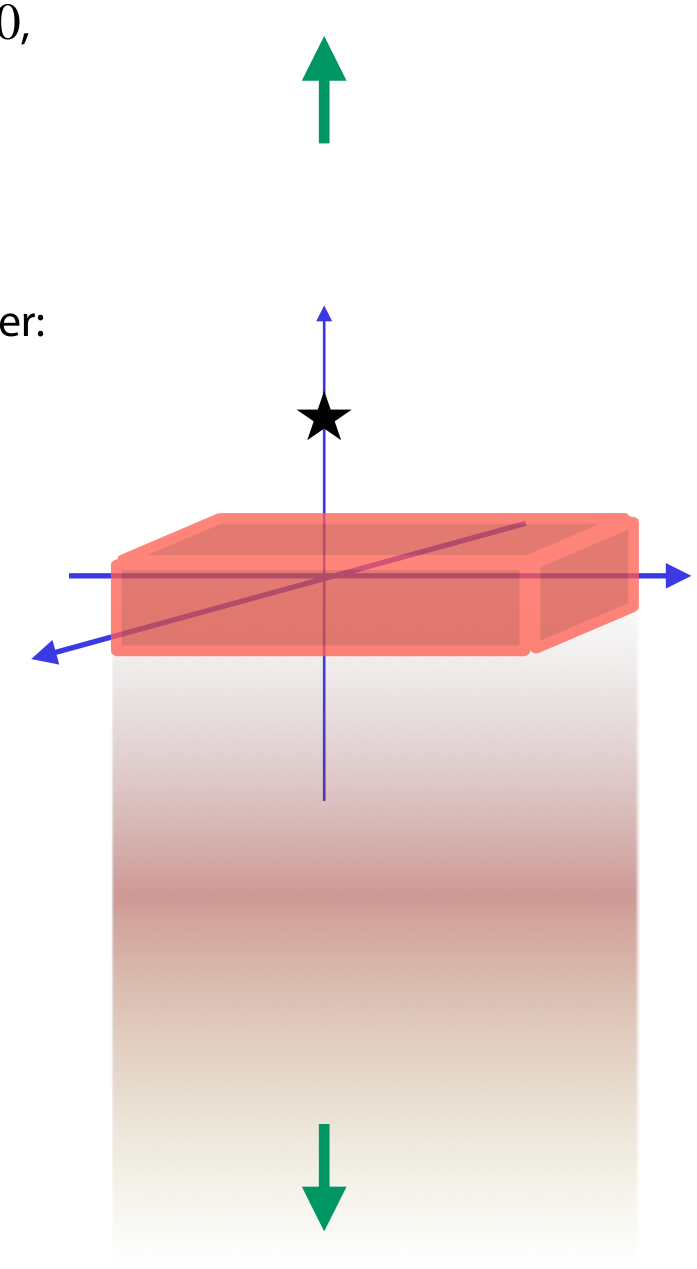
$$\Longrightarrow E_z = \frac{\sigma(z)}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\int_{-\infty}^{z} dz'\rho(z') - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz'\rho(z')\right]$$

- Agora, note que podemos escrever essa expressão na forma:

$$E_z = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z} dz'\rho(z') + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z} dz'\rho(z') - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz'\rho(z')\right]$$

$$\Longrightarrow E_z = \frac{1}{2\,\epsilon_0}\left[\int_{-\infty}^{z} dz'\rho(z') - \int_{z}^{\infty} dz'\rho(z')\right]$$

, que é a nossa expressão mais geral



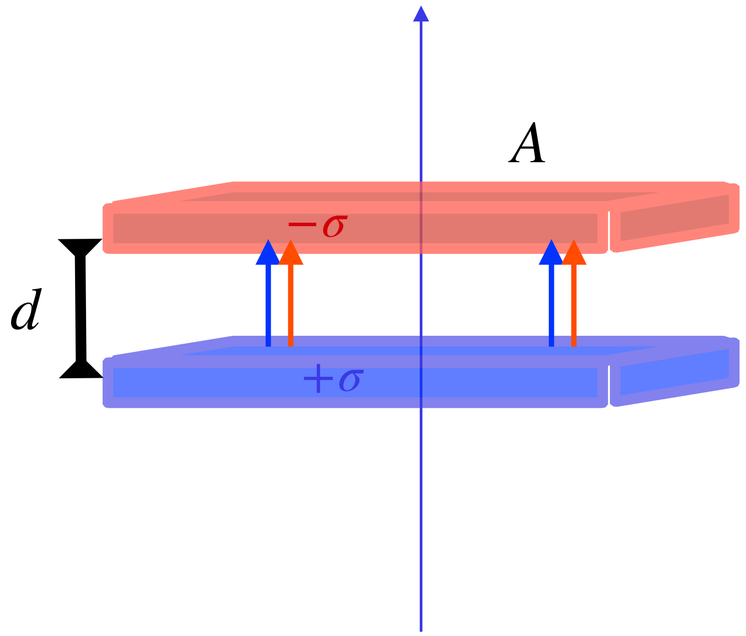
Alguns exemplos

- A aplicação mais simples da fórmula acima é um par de planos com cargas iguais e opostas — ou seja, um ***capacitor*** . Nesse caso temos, na região ***entre*** as placas:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) = + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad ,$$

enquanto na região **fora** do capacitor temos:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) = 0 \quad .$$



- Portanto, temos o campo dentro do capacitor:

$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- O potencial elétrico é, portanto:

$$\phi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + c \quad , \quad \text{e a diferença de potencial é} \quad \Delta\phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{q}{A\,\epsilon_0} d$$

Capacitância:

$$C = \frac{q}{\Delta\phi} = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

Potencial e energia potencial

- A força de um campo elétrico $\vec{E}$ numa carga q é dada por:

$$\vec{F} = q\,\vec{E} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F} = -\vec{\nabla}U = q\,(-\vec{\nabla}\varphi) \qquad U = q\,\varphi$$

- Portanto, a ***energia potencial*** de uma carga dentro desse capacitor é:

$$dU = dq\,\Delta\phi = dq\,\frac{q}{C}$$

- À medida que adicionamos mais cargas ao capacitor (trazendo as cargas desde $\pm\infty$ até as placas), a energia aumenta como:

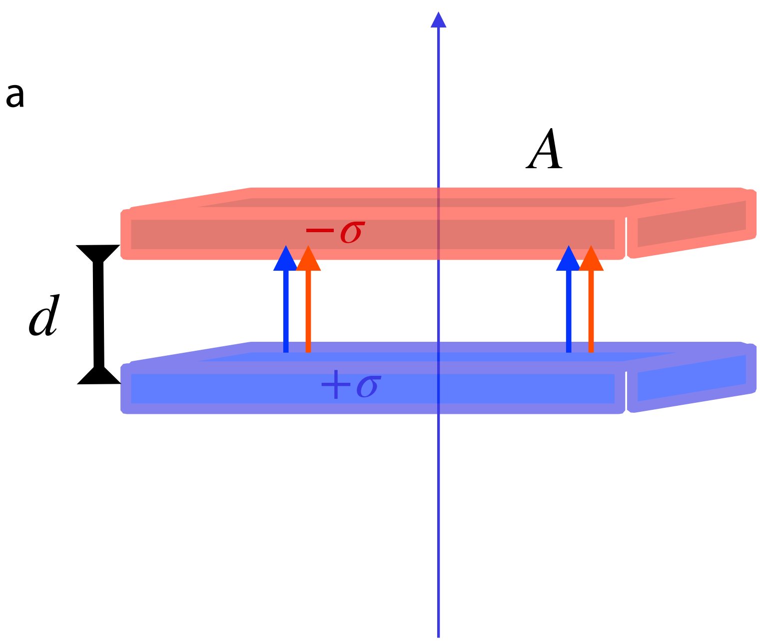
$$U(q) = \int_0^q dq \frac{q}{C} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

- Mas $E = q/(A\epsilon_0)$, portanto $q = E\,A\epsilon_0$, então escrevemos:

$$U(q) = \frac{1}{2}\frac{E^2\,A^2\epsilon_0^2}{\frac{A\epsilon_0}{d}} = \frac{1}{2}\epsilon_0\,(A\,d)\,E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\,V\,E^2$$

- Isso significa que a **densidade de energia** do campo elétrico é:

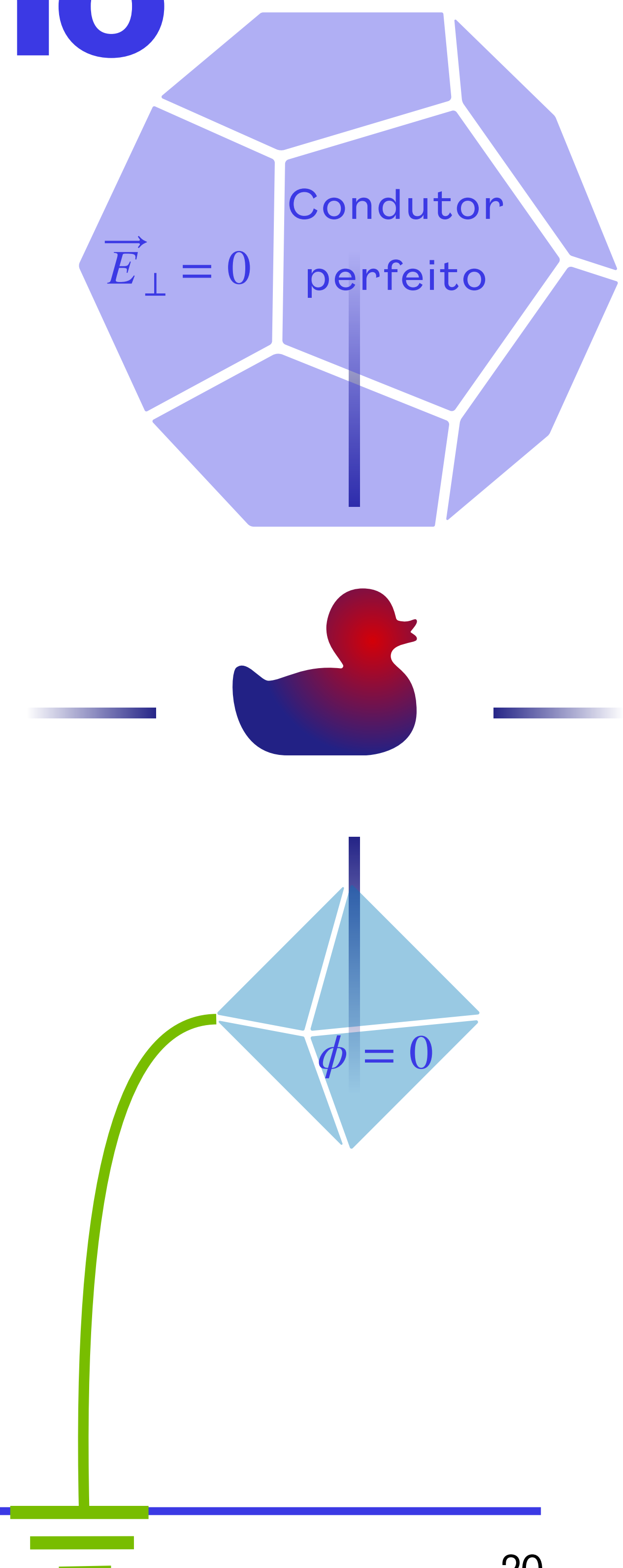
$$\rho_E = \frac{1}{2}\epsilon_0\,E^2$$



Capacitance:

$$C = \frac{q}{\Delta\phi} = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

Condições de contorno



- Nos exemplos tratados acima nós consideramos apenas distribuições de cargas que eram de alguma forma **limitadas** em uma ou mais dimensões, de forma que o **o campo vai a zero no infinito**.
- Nas próximas aulas vamos explorar problemas nos quais introduzimos **condições de contorno não-triviais**, que vinculam os campos sobre alguma superfície.
- Existem ***dois tipos*** de condições de contorno (C.C.) para um campo escalar numa dada superfície:

$$\text{C.C. de Dirichlet}: \quad \text{especificar } \phi_S$$

$$\text{C.C. Neumann}: \quad \text{especificar } \left(\overrightarrow{\nabla}_\perp \phi \right)_S$$

- A razão pela qual necessitamos dessas C.C. remontam à nossa demonstração do Teorema de Helmholtz, e estão encapsuladas no fato de que, dada a Equação de Poisson:

$$\nabla^2 \phi(\overrightarrow{x}) = -\frac{\rho(\overrightarrow{x})}{\epsilon_0} \quad ,$$

as soluções ϕ desta equação são ***degeneradas*** — ou seja, podemos sempre ***adicionar*** a elas uma solução da equação homogênea (a Equação de Laplace):

$$\phi \to \phi' = \phi + \phi_h \quad , \quad \text{com} \quad \nabla^2 \phi_h(\overrightarrow{x}) = 0 \quad , \quad \text{que} \quad \nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi' = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Condições de contorno e funções harmônicas

- As soluções homogêneas da Eq. de Poisson (ou seja, soluções da Eq. de Laplace) não são únicas. De fato, podemos construir um *espaço funcional* dessas funções, chamadas ***funções harmônicas***.

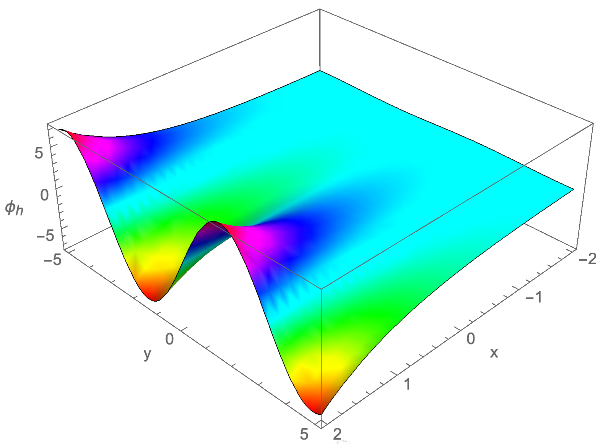
- Aqui um exemplo de solução com simetria planar, além de outras em $\mathbb{R}^3$:

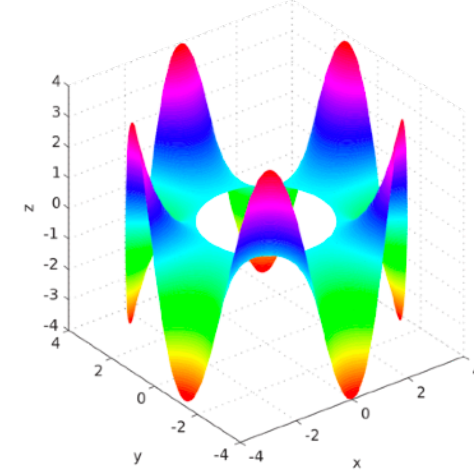
$$\phi_h \to e^{ax}e^{iay} - e^{ax}e^{-iay} \to e^{ax}\,\mathrm{sen}\,ay$$

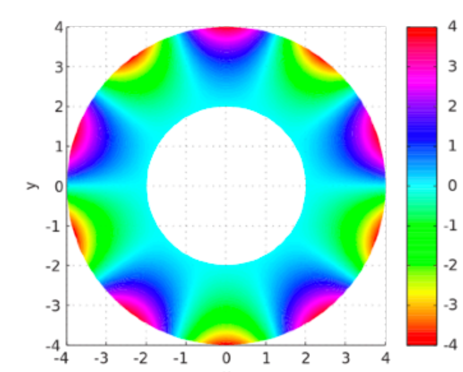
- Existe um número infinito de soluções como essa!

- Qualquer combinação de funções harmônicas pode ser adicionada ao potencial, e elas têm o papel de "ajustar" as C.C.

- Se tudo isso parece muito complicado, não se preocupe: nós vamos prestar a devida atenção e toma cuidado com as C.C. de modo natural e intuitivo, sem que você precise calcular explicitamente essas funções harmônicas!







Próxima aula:

- Equações de Laplace e de Poisson
- Separação de variáveis
- Problemas em coordenadas Cartesianas

- Leitura:

  Griffiths, Cap. 2 e 3

  Jackson, Cap. 1 e 2