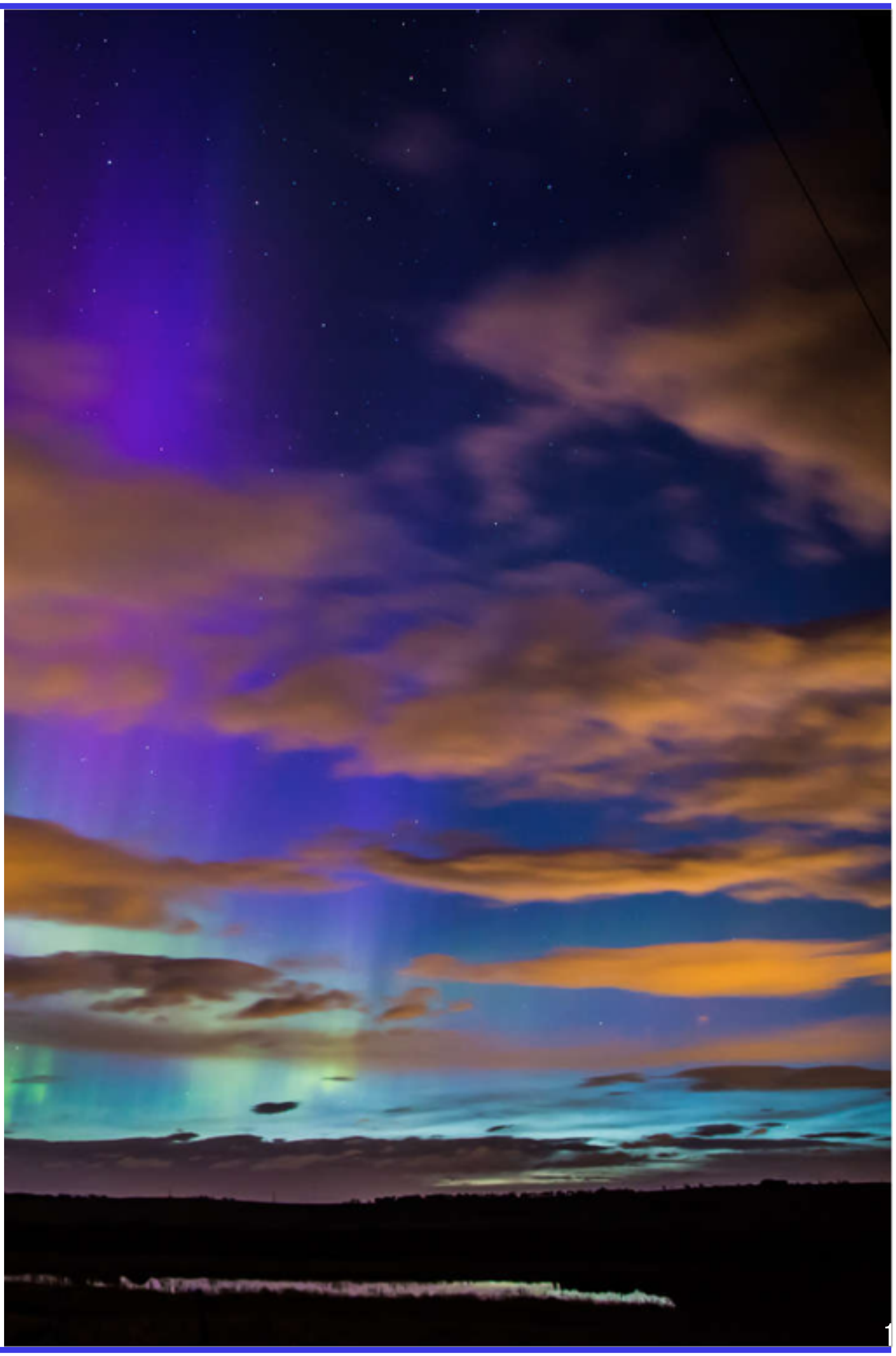
Eletromagnetismo 1

Aula 0:

- Apresentação do curso
- Revisão: operadores diferenciais
- O Teorema de Green
- A função *delta* de Dirac



Apresentação do curso

- Aulas **ao vivo pelo Zoom**, sempre **gravadas** e disponibilizadas quase que imediatamente (eu *não* passo lista de presença: assista *se* e *quando* quiser)
- Monitoria: Danilo; sessões todas as semanas (vamos marcar um dia/hora **agora!**)
- Listas de exercício a cada duas semanas, valendo nota (10%)
- Critério de avaliação:

$$N_f = 0.3\,P_1 + 0.3\,P_2 + 0.3\,P_3 + 0.1\,L$$

Obs: a prova Sub é *fechada*

- Todas as informações, listas, avisos etc., no Moodle da disciplina:

https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=91263

Apresentação do curso

- Programa (aproximado!)

  Parte 1: Eletrostática

Aula #	Tópico
16/8	Introdução ao curso; revisão de identidades vetoriais; a função Delta de Dirac em 1, 2 e 3 Dimensões; Lei de Gauss
19/8	Teorema de Helmholtz; O potencial elétrico; condições de contorno; trabalho e energia
24/8	Equações de Poisson e Laplace; analogia com Eq. do calor; solução formal pelo método da Função de Green; condições de contorno e método das imagens.
27/8	Soluções da Equação de Laplace; método da separação de variáveis; transformadas de Fourier
31/8	Mais sobre separação de variáveis; método do relaxamento; problema da fita infinita (2D) e Exemplo 3.5 do Griffiths; demonstrações no Mathematica
3/9	Coordenadas Esféricas; exemplos, expansão multipolar; problema do cone e campo de uma "ponta"
14/9	Coordenadas esféricas e expansão multipolar: exemplos e exercícios
17/9	Meios dielétricos: polarização, cargas de polarização
21/9	Meios dielétricos lineares; Lei de Gauss em dielétricos; condições de contorno; problemas
24/9	Mais exercícios com dielétricos; energia em meios dielétricos; capacitância; forças internas; problemas
28/9	Prova

Apresentação do curso

- Programa (aproximado!)

Parte 2: Magnetostática e indução

1/10	Magnetostática: Força de Lorentz; corrente e densidade de corrente; equação da continuidade; correntes estacionárias; equivalência da Lei de Biot-Savart e da Lei de Ampère na magnetostática
5/10	Aplicações das leis de Ampère e Biot-Savart; problemas resolvidos; demonstações
8/10	O Potencial Vetor; condições de contorno; expansão multipolar e aplicações
15/10	Dipolos magnéticos; força e torque magnéticos; campos magnéticos na matéria: paramagnetismo, diamagnetismo, ferromagnetismo. Correntes de magnetização; Leis de Maxwell em materiais magnéticos; o campo auxiliar H
19/10	Correntes de magnetização; Leis de Maxwell em materiais magnéticos; o campo auxiliar H
22/10	A Lei de Faraday e a conexão com transformações de coordenadas; Lei de Lenz; difusão magnética e a "pele" dos materiais
26/10	Exemplos do campo elétrico induzido pela Lei de Faraday; soluções explícitas; indutância de circuitos; a energia do campo magnético derivada de um modo alternativo
29/10	Circuitos RLC: Resistência, Indutância, Capacitância. Circuitos em série e em paralelo. Aplicações: circuitos ajustáveis, filtros, osciladores, multiplicadores de voltagem. Impedância.
2/11	As Leis de Maxwell: a Corrente de Deslocamento de Maxwell; potenciais; transformações de calibre, invariância de calibre; Os calibres de Lorentz e de Coulomb.
5/11	Leis de Maxwell em meios materiais; condições de contorno; supercondutividade
9/11	**Prova**

Apresentação do curso

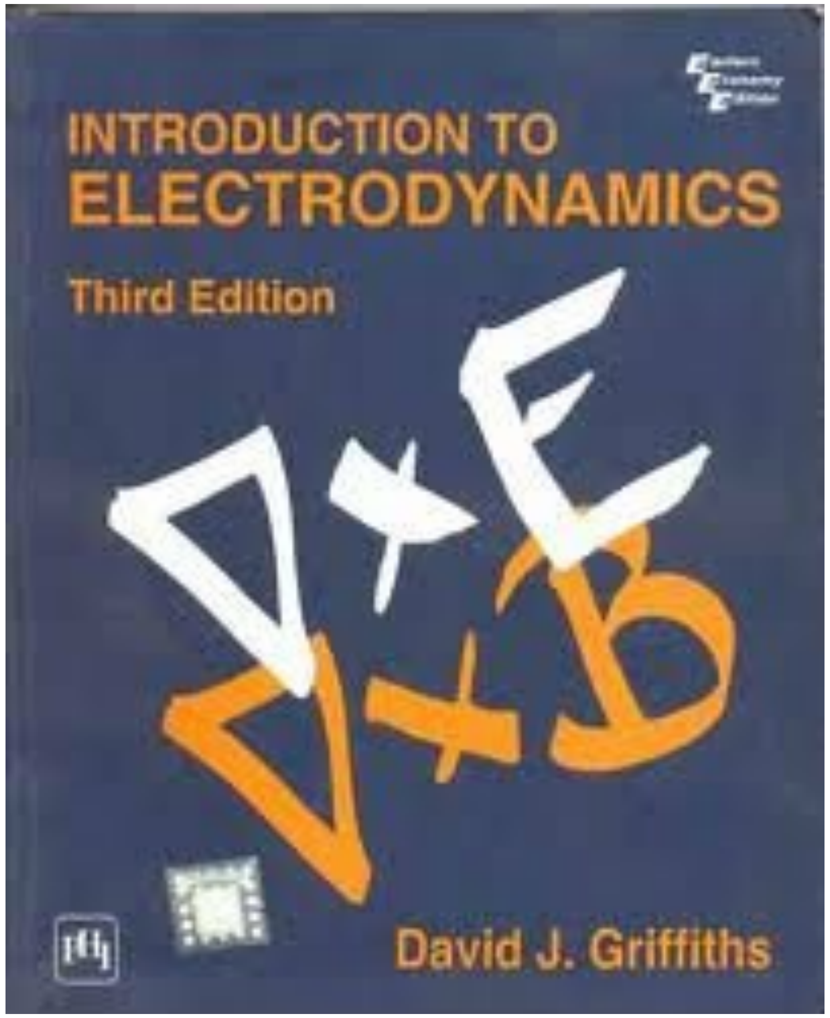
- Programa (aproximado!)

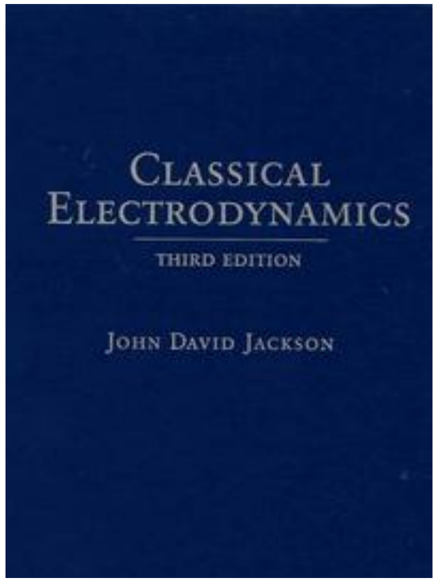
Parte 3: Eletrodinâmica, ondas e radiação

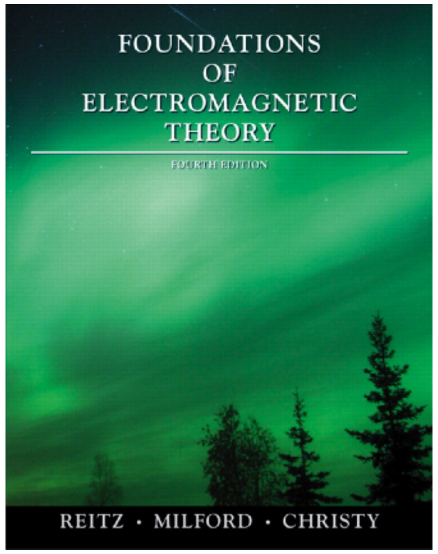
12/11	Leis de conservação; teorema de Poynting; tensor de momento-energia
16/11	A função de Green do Eletromagnetismo: os potenciais retardados
19/11	A equação de onda como consequência das Equações de Maxwell; relação com potenciais retardados; radiação de uma carga acelerada
23/11	Radiação eletromagnética; radiação de dipolo elétrico; ondas planas e polarização das ondas
26/11	Ondas planas monocromáticas; polarização linear, circular e elíptica; energia e momento da onda monocromática
30/12	Reflexão e transmissão de ondas: incidência normal e incidência oblíqua; Lei de Snell; Lei de Fresnel
3/12	Pacotes de onda; relações de incerteza; velocidade de grupo e velocidade de fase
7/12	Prova
14/12	Sub (FECHADA)

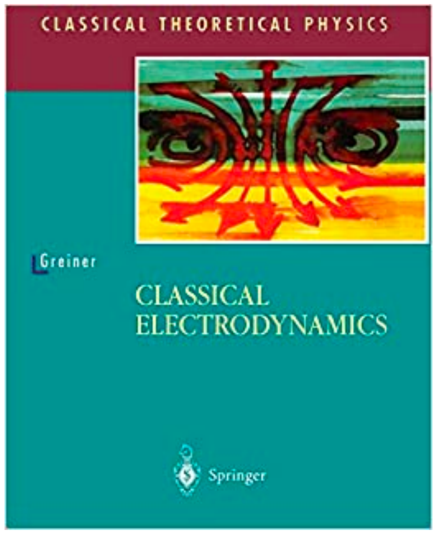
Apresentação do curso

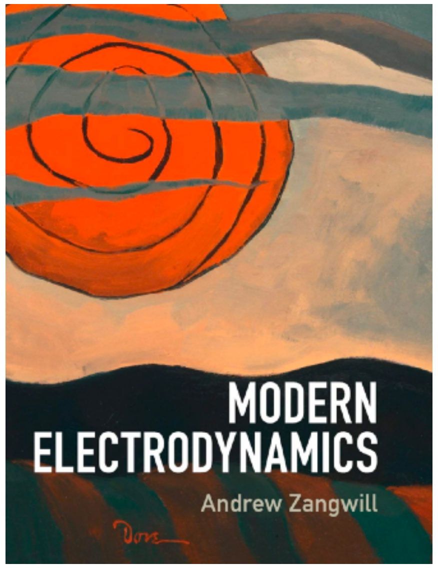
- Livros-texto











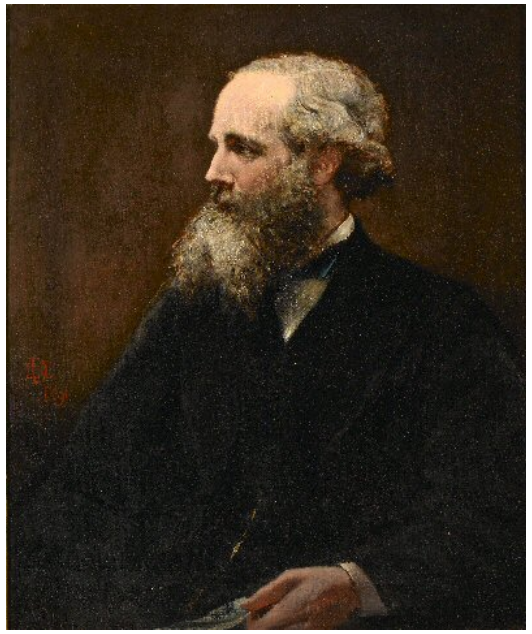
Recomendações gerais

- Eletromagnetismo é uma das disciplinas ***mais desafiadoras*** da sua graduação. Se você se contentar em simplesmente assistir as aulas e fazer burocraticamente as listas, terá dificuldades…
- Reserve no mínimo ***6h-8h extras por semana*** para estudar a matéria desta disciplina: você deve reproduzir as contas feitas durante as aulas, ler os textos indicados, fazer com cuidado os exercícios das listas e outros dos livros-texto, etc.
- Busque ***mais do que somente um único livro-texto***: tenha ***pelo menos dois*** que você possa consultar regularmente. Apenas o Griffiths não basta!
- Sempre ***leia*** as seções dos livros-texto que eu recomendei ***antes das aulas***. Sem isso, o seu esforço durante as aulas aumenta muito, dificultando a compreensão do material durante o curto espaço de tempo das aulas.

Nosso objeto de estudo

Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}$$



Lei de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Lei de Gauss p/ $\vec{B}$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Lei de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \, \mu_0 \, \frac{\partial \, \mathbf{E}}{\partial \, \mathbf{t}} = \mu_0 \, \mathbf{J}$$

Eq. da continuidade

$$\frac{\partial \, \rho}{\partial \, t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \mathbf{0}$$

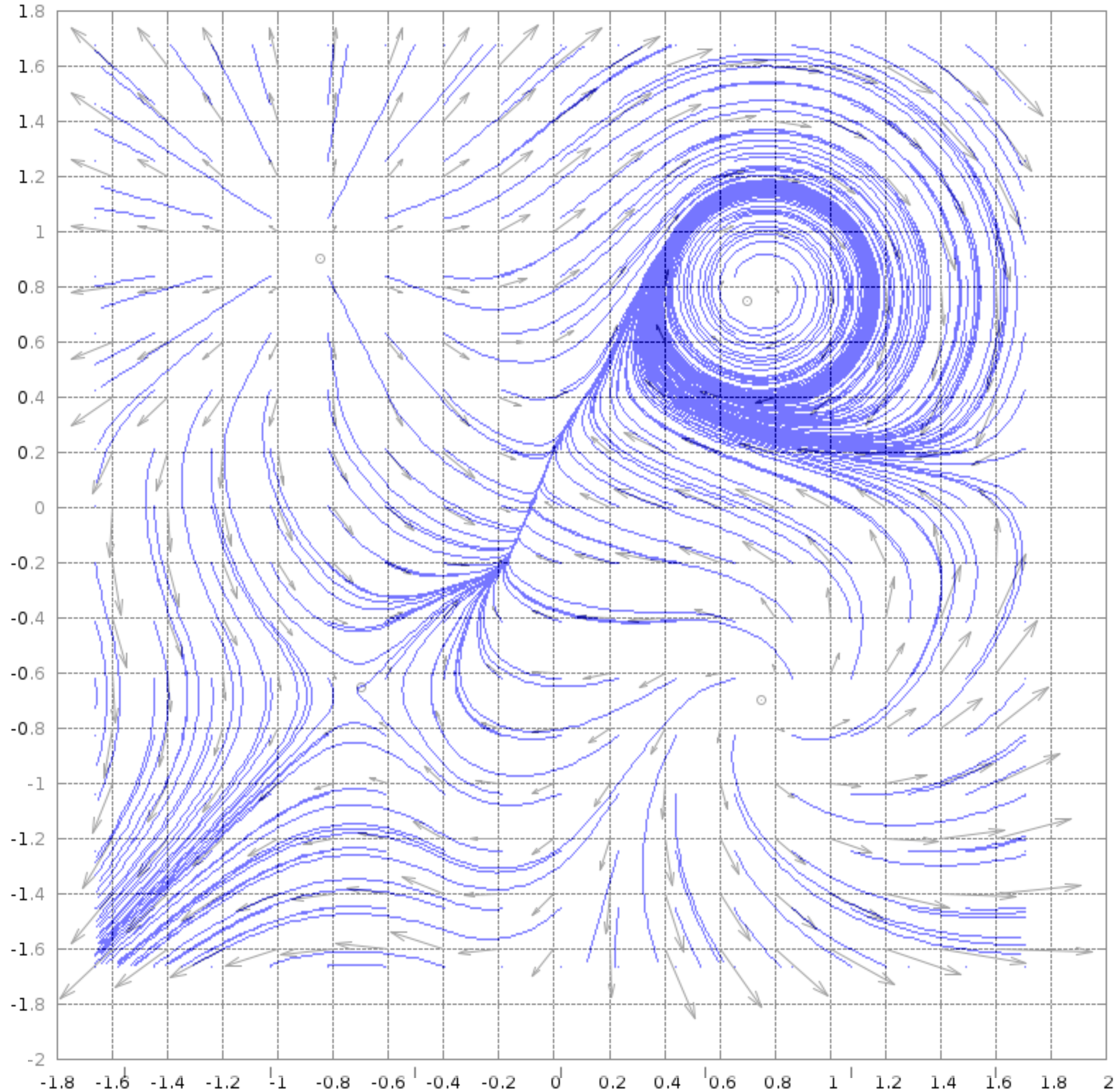
Força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q \, (\mathbf{F} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Noção fundamental:

Campo

Vetorial



Identidades do cálculo vetorial

- O operador diferencial mais fundamental é o ***gradiente***. Dada uma função ***escalar*** $f(x,y,z) = f(\vec{x})$, temos:

$$\vec{\nabla} f = \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

- O operador "nabla" ($\vec{\nabla}$) também pode ser aplicado num **campo vetorial**. Ou seja, dado um campo $\vec{A}(x,y,z) = \hat{x}\,A_x + \hat{y}\,A_y + \hat{z}\,A_z$, que também pode ser representado pelas suas componentes $\vec{A} = \left\{A_x, A_y, A_z\right\}$, temos o ***divergente***:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z\right)$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}\cdot\left\{A_x, A_y, A_z\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}\cdot\left\{A^1, A^2, A^3\right\}$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial A^i}{\partial x^i}$$

NOTEM QUE ESSAS SÃO AS EXPRESSÕES PARA COORDENADAS <u>CARTESIANAS</u>! EM OUTROS SISTEMAS DE COORDENADAS OS OPERADORES DO CÁLCULO VETORIAL PODEM TER EXPRESSÕES BEM DIFERENTES!

- Frequentemente eu vou me referir à posição como $\vec{x}$ ou como $\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$

Identidades do cálculo vetorial

- Além do divergente, podemos aplicar derivadas vetoriais num campo vetorial de modo a extrair a “vorticidade" desse campo. Nesse caso temos o ***rotacional:***

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \times \left\{ A_x, A_y, A_z \right\} = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^i} A^k$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

NOTEM QUE ESSAS EXPRESSÕES SÓ VALEM PARA COORDENADAS <u>CARTESIANAS</u>! EM OUTROS SISTEMAS DE COORDENADAS OS OPERADORES DO CÁLCULO VETORIAL PODEM TER EXPRESSÕES BEM DIFERENTES!

- Finalmente, temos também o operador ***Laplaciano***, que pode agir tanto num campo escalar quanto num campo vetorial:

$$\vec{\nabla}^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \hat{x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x + \hat{y} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_y + \hat{z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} \right] \vec{A}$$

Identidades do cálculo vetorial

- Esses operadores obedecem têm uma série de propriedades, e obedecem uma grande variedade de relações — veja uma lista quase completa neste link da Wikipedia .
- Vocês devem **revisar esses operadores e suas propriedades**, usando esse link ou seu livro-texto favorito .
- Propriedade distributiva:

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

- Regra do produto:

$$\vec{\nabla}(fg) = g \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} g \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{A} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad , \quad \vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = \vec{\nabla} f \times \vec{A} + f \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- Produtos cruzados:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

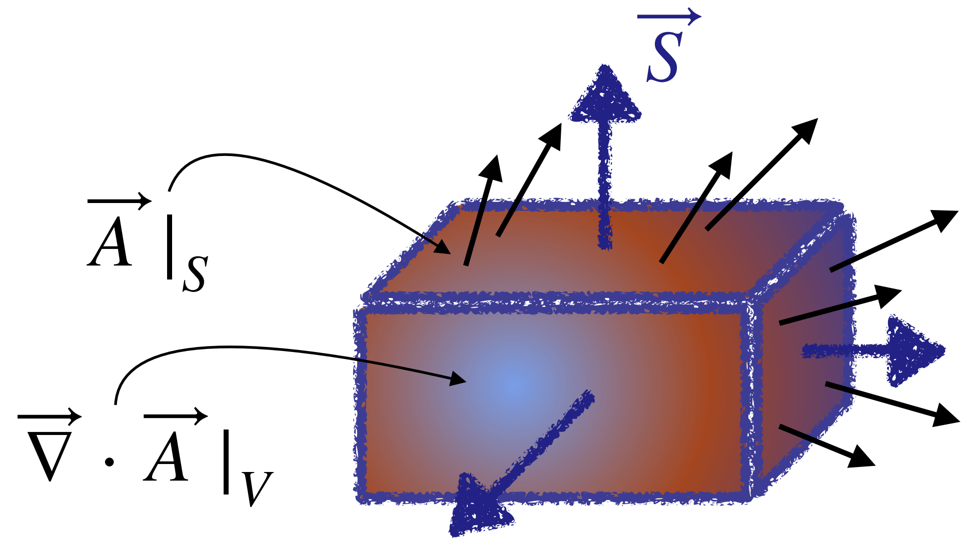
- Gradiente do produto escalar:

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

- Divergente, rotacional e Laplaciano:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

Teoremas do Cálculo Vetorial

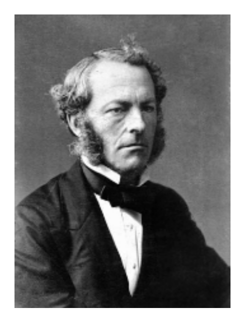


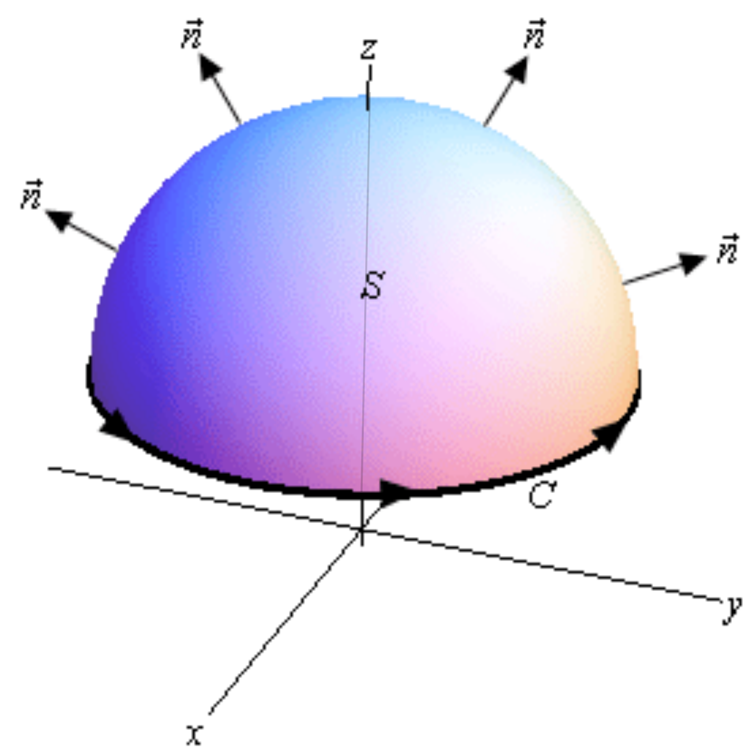
- Um dos principais teoremas do cálculo é o ***Teorema do Divergente*** (ou, ***Teorema de Gauss***):

$$\int_V dV\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \oint_{\vec{S}(V)} d\vec{S}\cdot\vec{A}$$

- Um outro resultado fundamental é o ***Teorema de Stokes*** (também conhecido como Kelvin-Stokes):

$$\int_{\vec{S}} d\vec{S}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} = \oint_{\vec{C}(S)} d\vec{l}\cdot\vec{F}$$





- Note que, em 3 dimensões espaciais, as ***superfícies 2D*** ($\vec{S}$) são ***orientadas:*** vetor normal $\hat{n} \to d\vec{S} = \hat{n}\,dS$.

- Além disso, os ***circuitos*** ($\vec{C}$) também são orientados!

Teoremas do Cálculo Vetorial

- Outros teoremas úteis/interessantes:

$$\int_S d\vec{S} \times \vec{\nabla} f = \oint_{\vec{C}(S)} d\vec{l}\, f$$

$$\int_V dV\, \vec{\nabla} f = \oint_{S(V)} d\vec{S}\, f$$

$$\int_V dV\, \vec{\nabla} \times \vec{A} = \oint_{S(V)} d\vec{S} \times \vec{A}$$

$$\int_V dV \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \vec{B} = \oint_{S(V)} \left(d\vec{S} \cdot \vec{A} \right) \vec{B}$$

O Teorema de Green

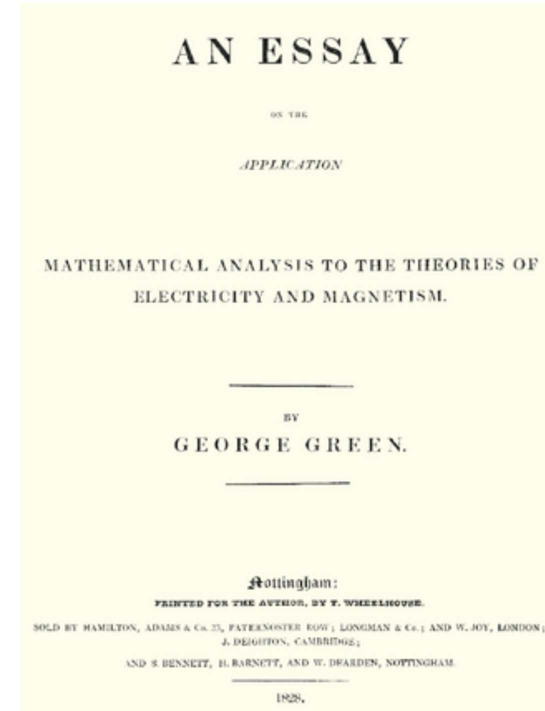
- O Teorema de Green, originalmente, é um resultado em 2D, que relaciona uma integral de linha num circuito fechado a uma integral de superfície. Dadas duas funções escalares f e g (em 2D), temos:

$$\int_S d^2x \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) = \oint_{\vec{C}(S)} \left(g\, dx + f\, dy \right) .$$

- Esse teorema é, na verdade, um caso especial do ***Teorema de Kelvin-Stokes***:

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = \oint_{\vec{C}(S)} d\vec{l} \cdot \vec{F} .$$

Prova: tome o plano $x - y$, e identifique $f \to F_y$, $g \to F_x$.


AN ESSAY

ON THE

APPLICATION

MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF ELECTRICITY AND MAGNETISM.

BY

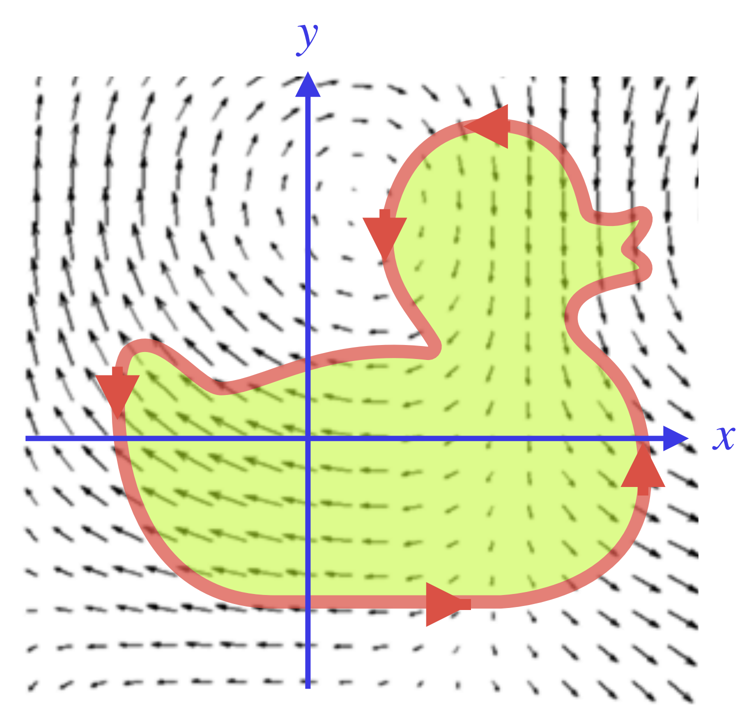
GEORGE GREEN.

Nottingham:

PRINTED FOR THE AUTHOR, BY T. WHEELHOUSE.

SOLD BY HAMILTON, ADAMS & Co. 33, PATERNOSTER ROW; LONGMAN & Co.; AND W. JOY, LONDON; J. DEIGHTON, CAMBRIDGE; AND S. BENNETT, H. BARNETT, AND W. DEARDEN, NOTTINGHAM.

1828.



Os Teoremas de Green e de Gauss

- O Teorema de Green em sua forma usual é a seguinte identidade:

$$\int d^3x \, \left(f\,\nabla^2 g - g\,\nabla^2 f\right) = \oint d\vec{S} \cdot \left(f\,\vec{\nabla} g - g\,\vec{\nabla} f\right),$$

onde f e g são funções escalares da posição $\vec{x}$

- A demonstração é muito fácil: basta usar o Teorema do Divergente,

$$\int d^3x\, \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \oint d\vec{S} \cdot \vec{A} \quad , \quad \text{com} \quad \vec{A} = f\,\vec{\nabla} g - g\,\vec{\nabla} f$$

O Teorema de Green e a Agrimensura

- Vamos considerar o Teorema de Green numa "panqueca" no plano $z = 0$, com area A e altura (pequena!) h .
- Claramente, o volume da panqueca é $V = A\, h$.
- Agora, vamos escolher funções f e g tais que $f\, \nabla^2 g - g\, \nabla^2 f = 1$. Então, pelo Teorema de Green temos que:

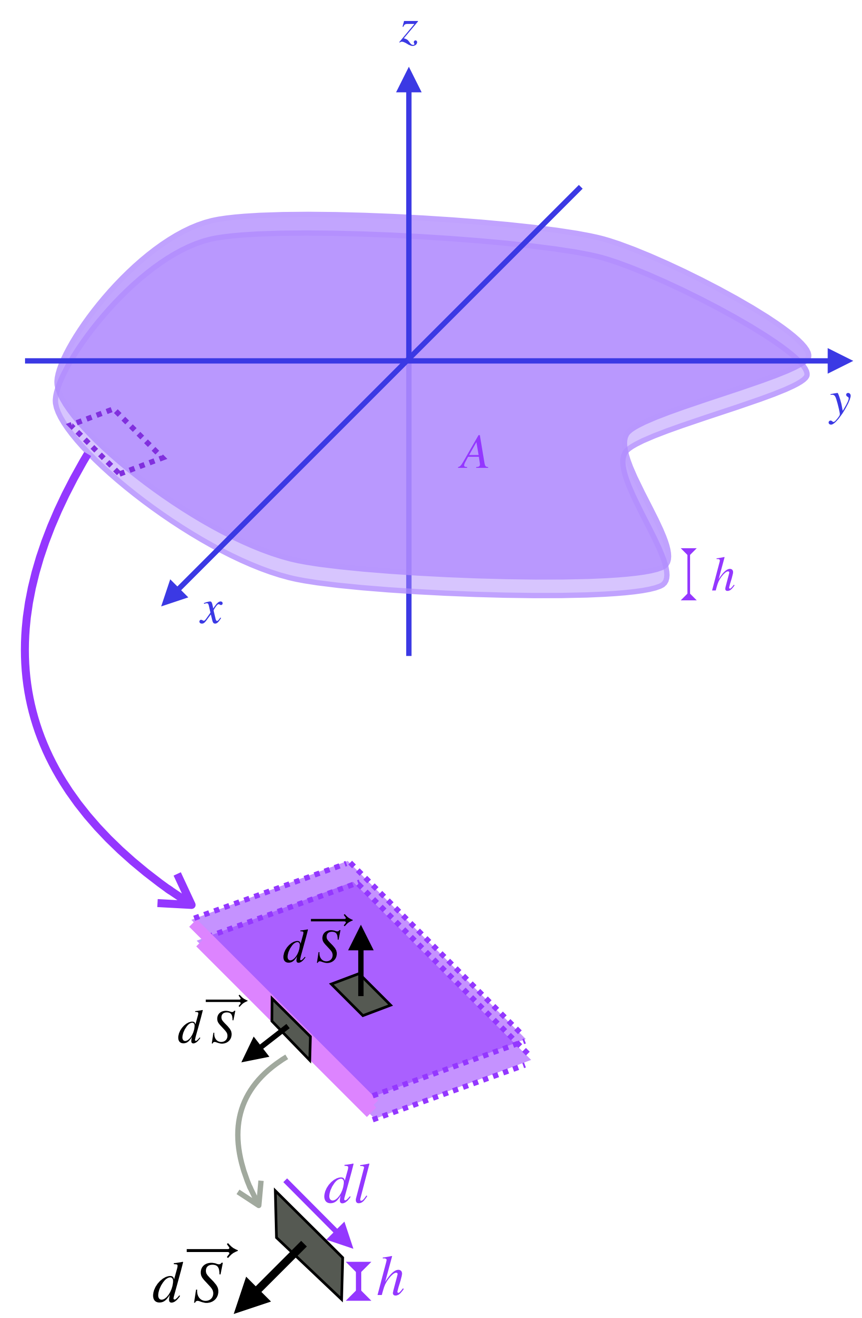
$$\int d^3x \, \left(f\, \nabla^2 g - g\, \nabla^2 f\right) = V = \oint d\vec{S} \cdot \left(f\, \vec{\nabla} g - g\, \vec{\nabla} f\right)$$

- Agora, suponha que podemos tomar:

$f\, \vec{\nabla} g - g\, \vec{\nabla} f \perp \hat{z}$, de tal forma que

$d\vec{S} \cdot \left(f\, \vec{\nabla} g - g\, \vec{\nabla} f\right) \neq 0$ ***apenas*** na **borda** , onde

$dS = h\, dl$



* Agrimensura

O Teorema de Green e a Agrimensura

- Em particular, podemos escolher f e g de tal forma que:

$$f\,\nabla^2 g - g\,\nabla^2 f = 1 \quad \text{e} \quad f\,\vec{\nabla} g - g\,\vec{\nabla} f = \frac{1}{2}\vec{\rho}$$

- Isso significa que:

$$A\,h = \oint d\vec{S}\cdot\left(f\,\vec{\nabla} g - g\,\vec{\nabla} f\right) = \int_{borda} \frac{d\vec{S}\cdot\vec{\rho}}{2}$$

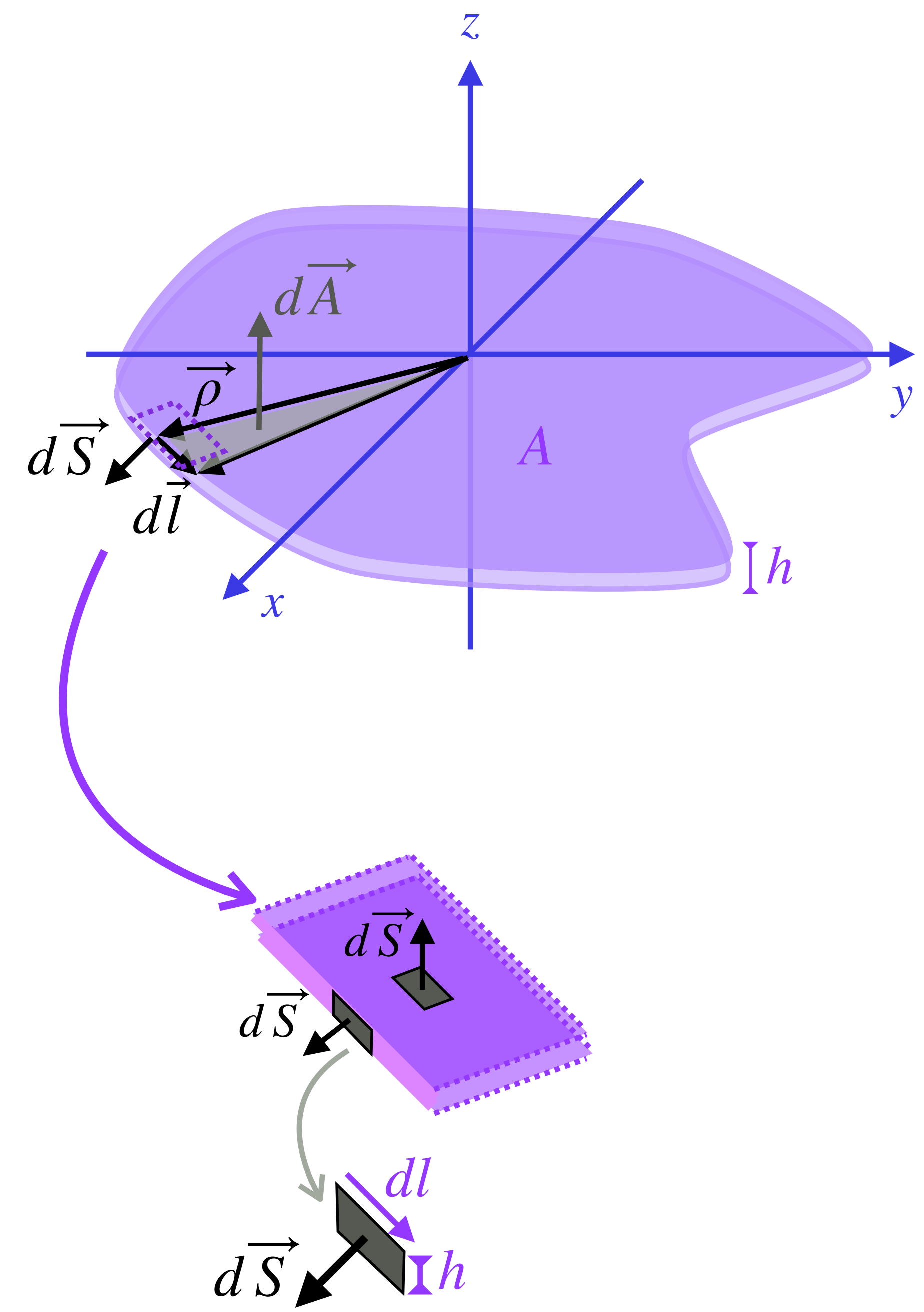
- Como $d\vec{S} = -\,h\,\hat{z}\times d\vec{l}$, podemos escrever:

$$A\,h = -\,h\int_{borda} \frac{(\hat{z}\times d\vec{l})\cdot\vec{\rho}}{2} = -\,h\int_{borda} \frac{\hat{z}\cdot(d\vec{l}\times\vec{\rho}\,)}{2}$$

- Claramente, a área do triângulo na figura ao lado é $\frac{1}{2}d\vec{l}\times\vec{\rho} = -\,dA\,\hat{z}$!

Portanto,

$$A = \hat{z}\cdot\oint\frac{\vec{\rho}\times d\vec{l}}{2}\,,$$ o que de fato é evidente!



O Teorema de Green e a Agrimensura

- Relembrando, os nossos requerimentos eram:

$$f\,\nabla^2 g - g\,\nabla^2 f = 1 \quad \text{e} \quad f\,\vec{\nabla} g - g\,\vec{\nabla} f = \frac{1}{2}\vec{\rho}$$

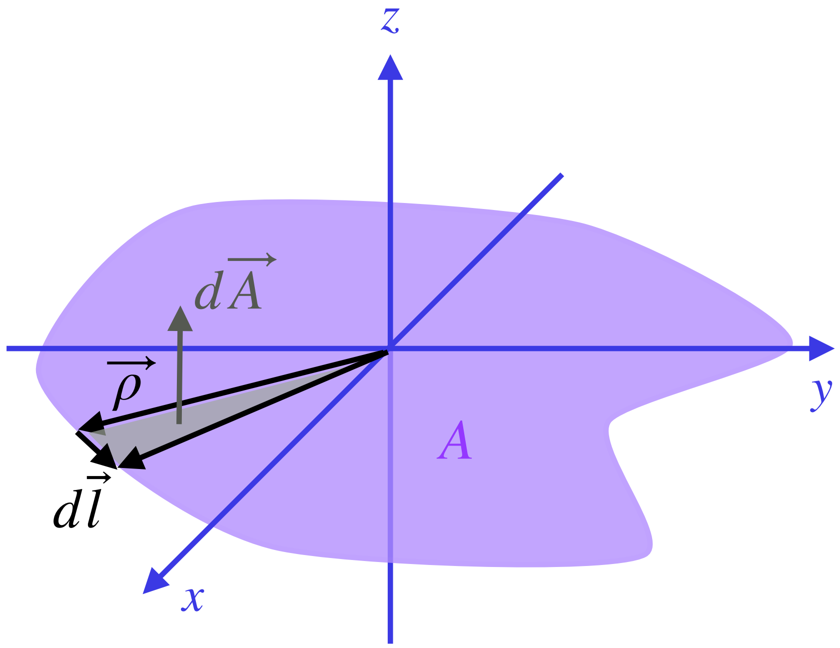
- Uma escolha possível é:

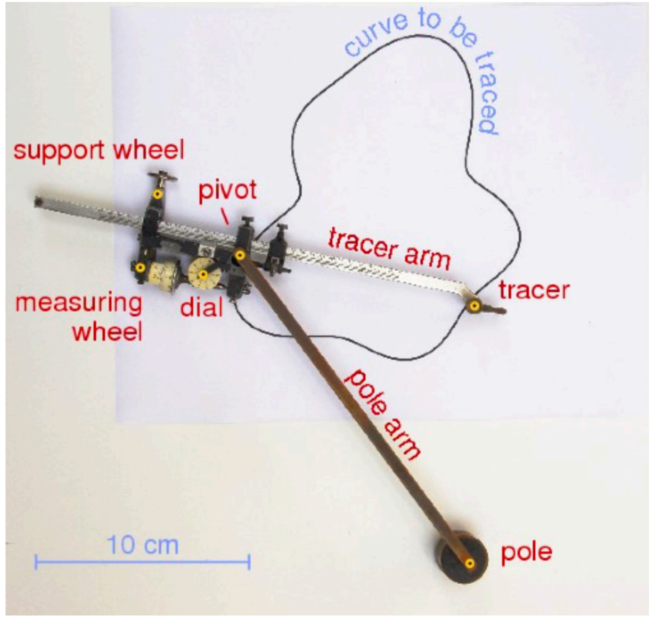
$$f = 1 \quad \text{e} \quad g = \frac{x^2+y^2}{4} = \frac{\rho^2}{4}$$

- Outras escolhas são possíveis. Note, por exemplo, que podemos fazer o escalonamento: $f \to \alpha f \;,\; g \to g/\alpha$.

- A escolha da origem também é arbitrária — ela poderia até mesmo ser ***fora*** do "terreno"! (Verifique!)

- Esse resultado nos permite construir máquinas simples* , capazes de medir a área dentro de uma curva fechada apenas seguindo o caminho ao redor daquela curva (o perímetro do terreno).





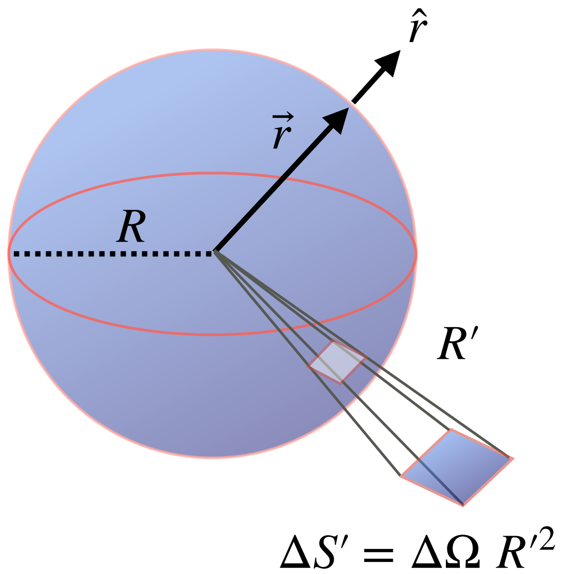
* http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-surveying-two

A função *delta* (δ) de Dirac

- Considere a seguinte função: $\vec{A} = \dfrac{\vec{r}}{r^3} = \dfrac{\hat{r}}{r^2}$. Vamos integrar essa função numa superfície que é uma ***casca esférica*** de raio R, centralizada na origem ($r = 0$):

$$\oint d\vec{S} \cdot \vec{A} = \oint (dS\,\hat{r}) \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = \oint dS\,\frac{1}{R^2} = 4\pi$$

Ou seja, isso nos retorna o ***ângulo sólido*** da esfera inteira, $\int d^2\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \,\operatorname{sen}\theta = 4\pi$

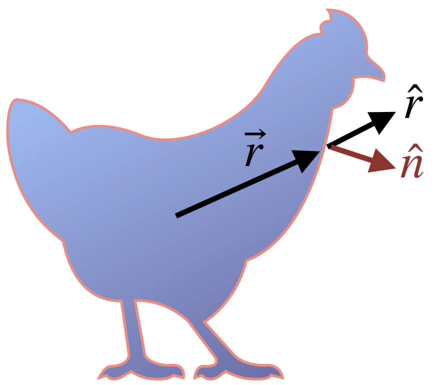


- OK, agora vamos fazer o seguinte: vamos pegar um pedacinho da nossa casca esférica de raio R, de ângulo sólido $\Delta\Omega$, e deslocar ele para um **outro raio** R', de forma que:

$$\oint d\vec{S} \cdot \vec{A} = \oint (dS\,\hat{r}) \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = \int_{4\pi-\Delta\Omega} dS\,\frac{1}{R^2} + \int_{\Delta\Omega} dS\,\frac{1}{R'^2}$$

$$= (4\pi - \Delta\Omega)R^2\,\frac{1}{R^2} + \Delta\Omega\,R'^2\,\frac{1}{R'^2} \;=\; 4\pi \quad !!!!$$

- Agora faça isso com quantos pedacinhos você quiser — o resultado ainda será o mesmo. Portanto, podemos deformar essa esfera de ***qualquer modo*** que quisermos, que sempre vamos obter o resultado que:



$$\oint d\vec{S} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = 4\pi$$

*[Porém, note que se a origem está **fora** da superfície, a integral dá **zero**! Cheque!!]*

A função *delta* (δ) de Dirac

- Agora vamos aplicar o Teorema do Divergente a essa função: $\int d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \oint d\vec{S} \cdot \vec{A}$

- Vimos que, no caso da função $\vec{A} = \vec{r}/r^3 = \hat{r}/r^2$ o ***lado direito*** dessa equação acima nos retorna :

$$\oint d\vec{S} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = 4\pi \quad , \quad$$ *independente* da forma dessa superfície.

- Agora considere o lado esquerdo do Teorema:

$$\int d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \int d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

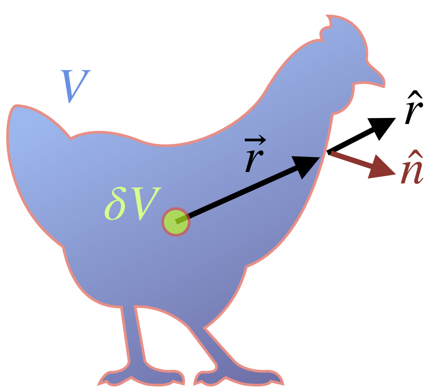
- Vamos desenvolver a derivada acima, usando $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) \to 0 \quad , \quad \text{se } r \neq 0$$

Mas a expressão é ***indefinida*** se $r = 0$!

- Vamos então separar a vizinhança δV em torno da origem, o que nos permite escrever:

$$\int_V d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \cancel{\int_{V-\delta V} d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}} + \int_{\delta V} d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 + \int_{\delta V} d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi$$



A função *delta* (δ) de Dirac

- Portanto, chegamos à conclusão que a função:

$$f(\vec{r}) \;=\; \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

obedece a propriedade que:

$$f(\vec{r}) \;\to\; 0 \quad \text{se} \quad \vec{r} \neq 0 \quad , \quad \text{e}$$

$$f(\vec{r}) \;\to\; \infty \quad \text{se} \quad \vec{r} \to 0 \quad , \quad \text{mas de modo que}$$

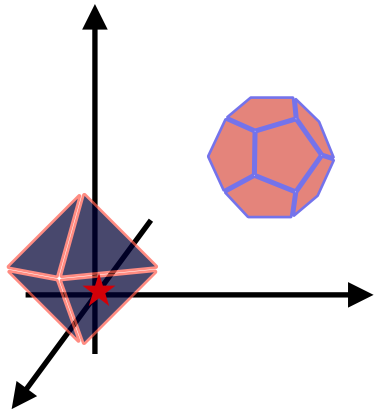
$\int_{\delta V} d^3x \, f(\vec{r}) = 4\pi$ em qualquer vizinhança δV *infinitesimalmente pequena* ao redor da origem !

- Por conveniência, vamos absorver o fator de 4π e definir uma nova função, chamada ***função delta de Dirac***:

$$\delta(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

- Essa função (que na verdade pertence à classe das ***distribuições***) obedece:

$$\int_V dV \, \delta(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \vec{0} \in V \\ 0 & \text{se} \quad \vec{0} \notin V \end{cases}$$



A função *delta* (δ) de Dirac

- Podemos pensar na função Delta de Dirac como um "impulso", uma *concentração infinitamente grande,* localizada numa região infinitesimalmente *pequena*.

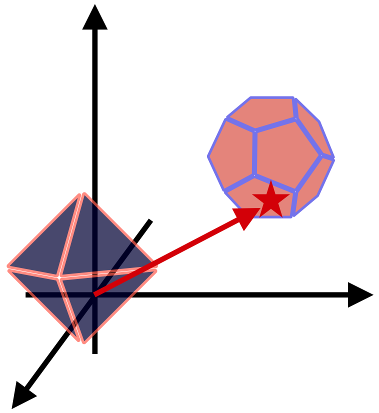
- Podemos colocar esse impulso numa posição qualquer — não apenas na origem. Para isso, basta escrever:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \overrightarrow{0}) \quad \rightarrow \quad \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

o que coloca o impulso na posição $\vec{r}\,'$ em vez da origem.

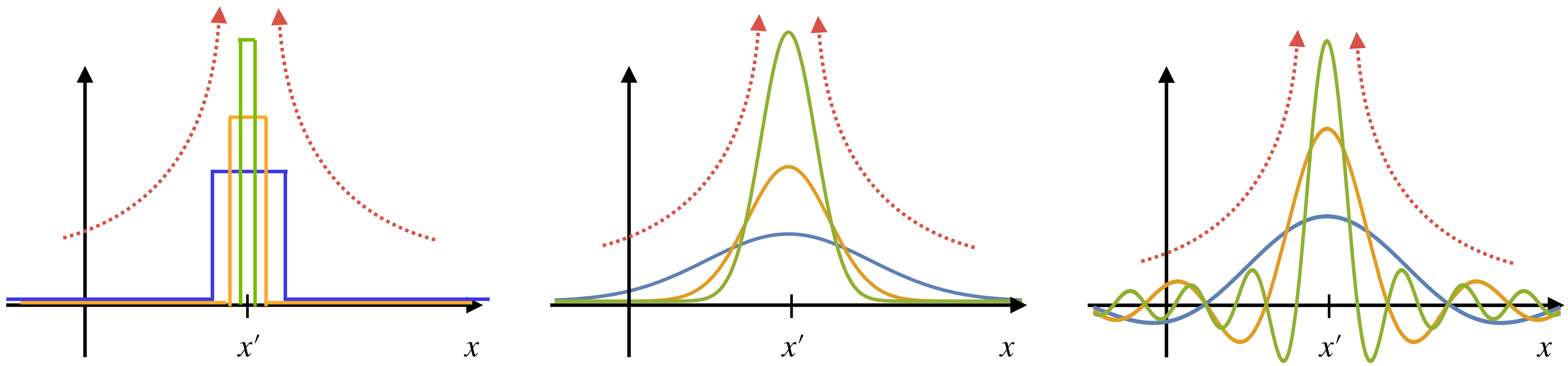
- Escrevemos então, de um modo geral, que:

$$\int_V dV \, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \vec{r}\,' \in V \\ 0 & \text{se} \quad \vec{r}\,' \notin V \end{cases}$$



A função *delta* (δ) de Dirac

- A função Delta de Dirac pode ser definida em qualquer número de dimensões: 1, 2, 3,… N.
- Em uma dimensão, podemos pensar na função $\delta(x-x')$ em termos de ***limites***, partindo de uma variedade de funções:



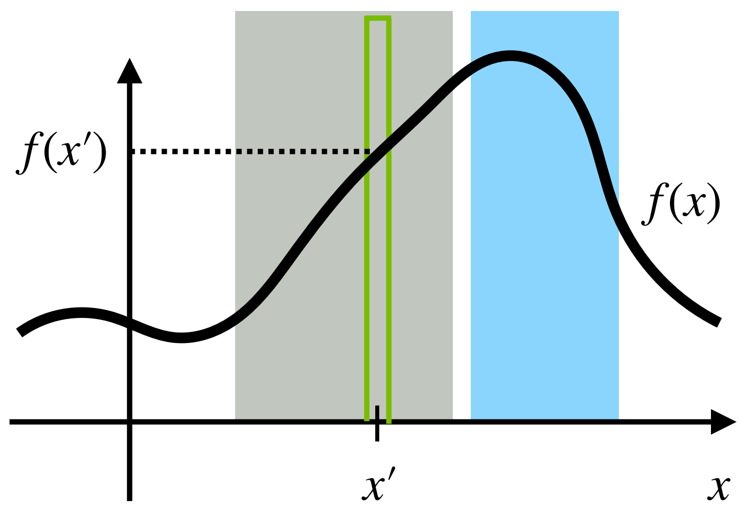
- Note, entretanto, que ***sempre*** temos uma função normalizada à unidade:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta(x-x') = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x_1 < x' < x_2 \\ 0 & \text{se} \quad x' < x_1 \text{ ou} x' > x_2 \end{cases}$$

- Note também que $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$

A função *delta* (δ) de Dirac

- A função δ de Dirac tem uma outra propriedade “mágica”: se multiplicarmos essa função por qualquer outra função, obtemos o valor daquela função apenas no ponto onde a δ é diferente de zero, ou seja:



- Ou seja: $$\int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta(x - x')\, f(x) = \begin{cases} f(x') & \text{se} \quad x_1 < x' < x_2 \\ 0 & \text{se} \quad x' < x_1 \text{ ou} x' > x_2 \end{cases}$$

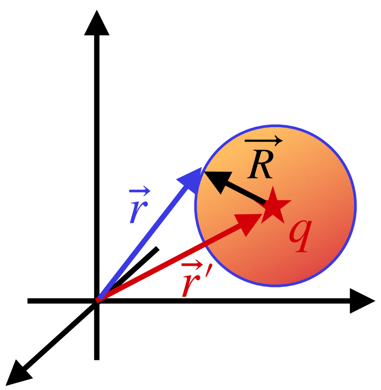
A Lei de Gauss e a função δ de Dirac

- Finalmente, chegamos no ponto em que podemos fazer uma conexão com o Eletromagnetismo. Vamos nos recordar da Lei de Gauss para a Eletrostática (assumindo que estamos no vácuo):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Usando o ***Teorema do Divergente***, temos que:

$$\int_V d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \int_V d^3x \, \frac{\rho}{\epsilon_0} = \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{E}$$



- Vamos considerar uma ***carga pontual*** q, numa posição $\vec{r}\,'$, e que esteja ***dentro*** do volume V, de modo que:

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{E}$$

- ***Escolhendo*** um volume que corresponde a uma ***esfera centrada em*** $\vec{r}\,'$, temos que a ***superfície*** $S(V)$ é uma ***casca esférica*** (que, conforme as convenções, deve ser ***orientada para fora***). Um ponto qualquer na superfície dessa casca esférica é $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$, e o vetor normal é $\hat{n} = \vec{R}/R$.

- Como por ***simetria*** o campo deve ser uma função apenas de $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$, chegamos no resultado usual:

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \left(4\pi R^2 \hat{n}\right) \cdot \vec{E}(\vec{R}) \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{n}}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

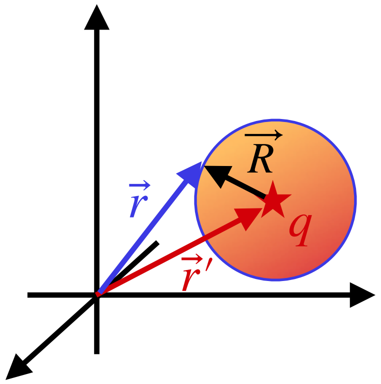
A Lei de Gauss e a função δ de Dirac

- Agora, vamos tomar esse campo elétrico da carga pontual e tirar o seu divergente, para obter a densidade de carga correspondente:

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

- Mas isso é exatamente a mesma conta que fizemos anteriormente na derivação da função δ de Dirac — a única diferença é que deslocamos a origem de $\vec{0} \to \vec{r}'$:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\,\delta(\vec{r}) \quad \leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 4\pi\,\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$



- Portanto, obtemos que a densidade de carga de uma ***carga pontual*** q, numa posição $\vec{r}'$, é dada simplesmente por:

$$\rho = q\,\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

- A função δ de Dirac é uma ***noção fundamental***, extremamente útil não só no Eletromagnetismo, mas em todas as áreas da Física.

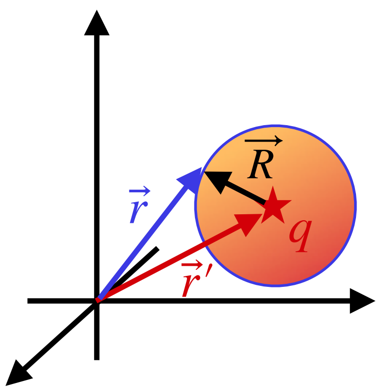
A Lei de Gauss e a Eletrostática

- Usando essa ferramenta, a equação básica da Eletrostática, a Lei de Gauss, fica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) \quad , \quad \text{onde } \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad .$$

- Considere que uma densidade de cargas qualquer não é nada mais do que uma coleção de cargas pontuais,

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$



- Sendo assim, temos que o campo elétrico dessa distribuição é:

$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

- Agora, note que:

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = - \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

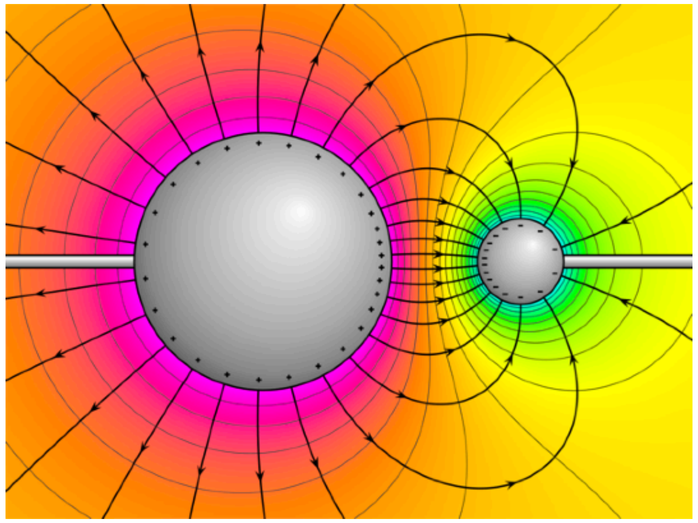
- Esse resultado significa que o potencial eletrostático pode ser escrito como:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{4\pi \, \epsilon_0} \int d^3 r' \, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

A Lei de Gauss e a Eletrostática

- Os resultados mais importantes desta aula estão nestes últimos slides.
- Primeiro, encontramos a ***função δ de Dirac***, que, entre outras expressões, pode ser escrita como:

$$\delta(\vec{r}\,) \;=\; \frac{1}{4\pi}\,\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} \;=\; \frac{1}{4\pi}\,\vec{\nabla}\cdot\left[-\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right] \;=\; -\,\frac{1}{4\pi}\,\vec{\nabla}^2\frac{1}{r}$$



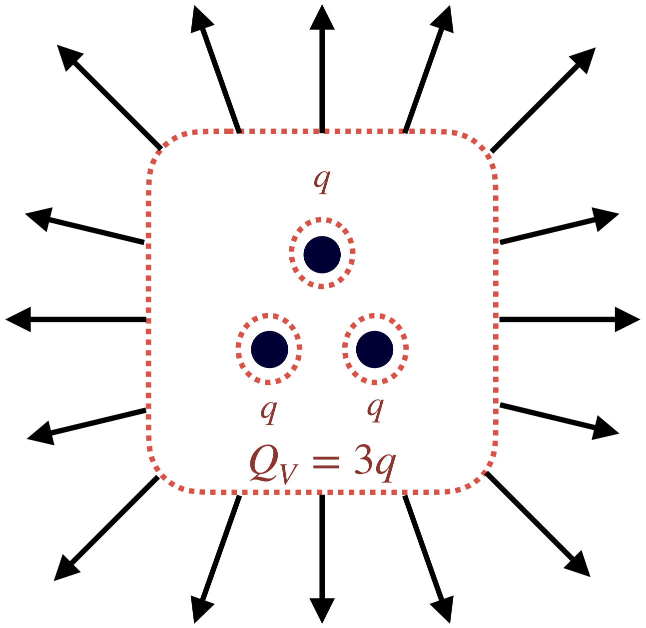
- Uma ***densidade de carga qualquer*** pode ser escrita como:

$$\rho(\vec{r}\,) = \sum_i q_i\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

- Esse resultado significa que podemos escrever o campo elétrico nas formas:

$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\,\vec{r} - \vec{r}_i\,|^3} \quad , \quad \text{ou} \quad \vec{E} = -\,\vec{\nabla}\,\phi \quad , \quad \text{com:}$$

$$\phi(\vec{r}\,) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{|\,\vec{r} - \vec{r}_i\,|} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\,\vec{r} - \vec{r}\,'\,|}$$



- Usando a função δ de Dirac é fácil também obter a ***forma integral*** da Lei de Gauss:

$$\int_V d^3r\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \oint_{S(V)} d\vec{S}\cdot\vec{E} = \int_V d^3r\,\frac{\rho}{\epsilon_0} = Q_V$$

Próxima aula:

- O Teorema de Helmholtz
- O potencial elétrico e a energia do campo elétrico
- Condições de contorno

Leitura:

- **Griffiths, Capítulos 1 e 2**
- Jackson, Cap. 1
- Zangwill, Cap. 1