LCF0586 – Gestão de Recursos Florestais

Aula 09 – Roteiro para formulação de problemas de Programação Linear

A programação linear como ferramenta de modelagem matemática

A modelagem matemática pode ser resumida como a arte de representar situações reais através de expressões matemáticas. Ou seja, assim como um escultor usa a argila para representar formas humanas, ou um pintor usa a aquarela para registrar o que sente ao admirar uma paisagem, podemos usar a matemática para criar uma abstração (ou modelo) de um problema ou processo real.

As expressões matemáticas que usamos nesses casos representam em geral uma aproximação da realidade e, por isso mesmo, nos referimos as essas expressões como um modelo. A programação linear pode ser usada nesse sentido, ou seja, pode ser usada como meio para gerar uma abstração (modelo) de um problema real.

Neste curso, o nosso objetivo será mostrar como a programação linear pode ser usada para expressar o mais comum dos problemas que um gestor enfrenta: a otimização do uso de recursos limitados.

Entretanto, antes de usarmos a programação linear como técnica de modelagem para problemas desse tipo, é necessário desenvolver a habilidade de converter problemas reais em modelos de programação linear. Assim como um bom escultor se apoia em técnicas para dar forma à argila, e um bom pintor requer técnicas apuradas para tornar a sua pintura expressiva, precisamos de uma abordagem que nos ajude a usar a PL para modelar a realidade. Essa abordagem será apresentada na próxima seção como um roteiro, que refina a “arte” da modelagem matemática com programação linear.

Um roteiro para transformar problemas reais em problemas de programação linear

Nesta seção apresentamos uma sequencia de passos que devem ser seguidos quanto temos problemas que se mostram potenciais candidatos à programação linear. É importante lembrar que a programação linear nos apóia na resolução de certos problemas, e que nem todos os problemas reais podem ser modelados através da programação linear. Como saberemos se um problema pode ou não ser modelado através da programação linear? Em geral, os problemas que se beneficiam da modelagem com PL buscam, a partir de diferentes estratégias, atingir certo objetivo da forma mais eficiente possível.

Haverá indícios de que o problema não pode ser modelado como um problema de programação linear, se algum dos seguintes passos não puder ser efetivamente aplicado.

1. Qual objetivo orienta o problema? Que resultado se pretende alcançar?

   Geralmente busca-se *otimizar um resultado* econômico (máxima receita líquida, ou mínimo custo, ou nível máximo de geração de empregos etc.). É essencial que apenas um objetivo possa ser destacado como o mais importante. (*Obs.: Se múltiplos objetivos precisarem ser considerados simultaneamente, teremos que recorrer a outra técnica matemática de modelagem chamada “programação por metas”*)

2. Quais são as alternativas disponíveis que contribuem para o atendimento do objetivo?

   Procura-se com esta questão identificar as *diferentes maneiras de gerar resultados* mais, ou menos, ótimos. Por exemplo, estratégias diferentes de uso do solo representam diferentes alternativas de exploração econômica de uma determinada região. Dependendo de como se usa o solo na região, e de seus respectivos níveis, resultam níveis totais de emprego na região diferentes.

3. Associe cada alternativa a uma variável de decisão (incógnita x_i).

   As alternativas devem ser expressas como variáveis matemáticas. No exemplo do planejamento do uso do solo em uma região, cada possibilidade de uso do solo deve ser associada a uma *variável de decisão*. Por exemplo, o uso agrícola poderia ser representado pela variável x_1, a destinação para fins de conservação pela variável x_2 etc.

4. Defina a unidade de medida que será usada para quantificar os níveis de cada variável de decisão.

   As variáveis matemáticas devem expressar unidades mensuráveis. Assim sendo, para as variáveis x_1 e x_2 do item anterior, a unidade de mensuração apropriada poderia ser *hectares* com agricultura e com conservação, respectivamente.

5. Quantifique a contribuição unitária (ci) de cada alternativa para com o objetivo.

   É essencial definir quanto cada unidade da variável x_i contribui para o objetivo. No exemplo do planejamento regional, c_1 poderia expressar quanto cada hectare dedicado à agricultura contribui para o emprego total na região.

6. Defina matematicamente a função $Z = \sum c_i x_i$ que quantifica o objetivo (resultado final).

   Determina-se simplesmente que o resultado final é calculado pela soma das contribuições de cada alternativa. Ou seja, no nosso exemplo, o resultado final é simplesmente o resultado da soma de empregos gerados pela agricultura ($c_1 x_1$) mais os empregos gerados pela conservação ($c_2 x_2$).

7. Identifique as quantidades que estabelecem tetos (limitações), pisos ou metas (compromissos).

   A partir deste passo, tratamos das restrições que limitam os níveis das variáveis de decisão. Por exemplo, a região estudada tem uma área máxima que estabelece o *teto* máximo para a agricultura e a conservação ($x_1 + x_2 <=$ *área máxima total*); digamos que a comunidade local deseje um *piso* para a atividade de conservação na região ($x_2 >=$ *área mínima exigida para conservação*); assim como talvez seja desejável gastar exatamente o tempo anual disponível da equipe de monitoramento ambiental ($m_1 x_1 + m_2 x_2 =$ *tempo total disponível na região para monitoramento, onde* m_1 *e* m_2 representam horas de monitoramento por hectare exigidas pela agricultura e pela conservação, respectivamente).

8. Escreva as quantidades representando tetos, pisos ou metas numa coluna à direita.

   Esta etapa ajuda a definir o que se convencionou chamar o *RHS* (*right hand side*) do problema. Dispor esses valores numa coluna à direita, um em cada linha, garante que todas as restrições serão identificadas e expressas corretamente. No nosso exemplo:

<=	*área total da região*
>=	*área mínima exigida para conservação*
=	*tempo total disponível para monitoramento*

9. À esquerda dos valores dessa coluna, apresente as respectivas expressões matemáticas que afetam os tetos, pisos ou metas, da seguinte forma:

$$\sum a_{ip} x_i \geq \text{piso}_p$$
$$\sum a_{it} x_i \leq \text{teto}_t$$
$$\sum a_{im} x_i = \text{meta}_m$$

   Onde a_{ij} são coeficientes das atividades que quantificam os efeitos unitários de cada alternativa para com os *tetos* ($j=t$), *pisos* ($j=p$) ou *metas* ($j=m$).

   Define-se assim o que se convenciona chamar o *LHS* (*left hand side*) do problema. No nosso exemplo:

$$x_1 + x_2 <= \textit{área total da região}$$
$$x_2 >= \textit{área mínima exigida para conservação}$$
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = \textit{tempo total disponível para monitoramento}$$

10. Declare a direção desejada para o objetivo (máximo ou mínimo) e confira se o resultado matemático resulta no seguinte sistema:

$$\begin{array}{lrl} \text{Maximizar (ou Minimizar)} & Z = & \sum c_i x_i \\ \text{sujeito a:} & \sum a_{ip} x_i \geq & \textit{piso}_p \\ & \sum a_{it} x_i \leq & \textit{teto}_t \\ & \sum a_{im} x_i = & \textit{meta}_m \\ & \textit{sendo todo } x_i \geq & 0 \end{array}$$