UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – PIRASSUNUNGA

ZEB0562

CÁLCULO NUMÉRICO

PROF. DR. JOSÉ A. RABI

DEPTO. ENGENHARIA DE BIOSSISTEMAS

ZEB0562 – TÓPICO 05: PARTE 4/5

AJUSTE DE CURVAS: COMPLEMENTOS

- MÍNIMOS QUADRADOS: GENERALIZAÇÃO

  ↓

  FUNÇÕES POLINOMIAIS

- LINEARIZAÇÃO DE DADOS NÃO LINEARES

  ↓

  FUNÇÃO EXPONENCIAL E LEI DE POTÊNCIA

Generalização: funções polinomiais

- Ajustar função polinomial (de grau m) $f(x) = \sum a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ contra (x_i, y_i)
  - Obter $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ minimizando: $q = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2$

$\partial q / \partial a_k = 0$ $\downarrow$ **$k = 0, 1, 2, \ldots, m$**

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{m+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \cdots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^m \end{bmatrix}$$

Generalização: funções polinomiais

- Ajustar função polinomial $f(x) = \sum a_k x^k$ contra $(x_i\,, y_i)$
  - Exemplo: ajuste de função quadrática $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} S_1 & S_x & S_{xx} \\ S_x & S_{xx} & S_{xxx} \\ S_{xx} & S_{xxx} & S_{xxxx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_y \\ S_{yx} \\ S_{yxx} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A} = \begin{bmatrix} S_1 & S_x & S_{xx} \\ S_x & S_{xx} & S_{xxx} \\ S_{xx} & S_{xxx} & S_{xxxx} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_0} = \begin{bmatrix} S_y & S_x & S_{xx} \\ S_{yx} & S_{xx} & S_{xxx} \\ S_{yxx} & S_{xxx} & S_{xxxx} \end{bmatrix} \\ &\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} S_1 & S_y & S_{xx} \\ S_x & S_{yx} & S_{xxx} \\ S_{xx} & S_{yxx} & S_{xxxx} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} S_1 & S_x & S_y \\ S_x & S_{xx} & S_{yx} \\ S_{xx} & S_{xxx} & S_{yxx} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{\det(\mathbf{A_0})}{\det(\mathbf{A})} \\ a_1 &= \frac{\det(\mathbf{A_1})}{\det(\mathbf{A})} \\ a_2 &= \frac{\det(\mathbf{A_2})}{\det(\mathbf{A})} \end{aligned}$$

Linearização de dados experimentais

- Dados experimentais com comportamento não linear
  - Artifício matemático: mudança de variáveis $\rightarrow$ logaritmos
  - Exemplo 1: comportamento descrito por função exponencial

$$\phi(x) = k e^{ax} \quad \begin{cases} k = ? \\ a = ? \end{cases}$$

$$\ln(\phi) \downarrow \qquad \ln(ke^{ax}) = \ln(k) + \ln(e^{ax})$$

$$\boxed{y(x) = b + ax} \quad ; \quad y = \ln(\phi) \quad , \quad b = \ln(k)$$

mínimos quadrados $\begin{cases} \text{coeficiente angular: } \boldsymbol{a} \\ \text{coeficiente linear: } \boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{k = e^{b}} \end{cases}$

Linearização de dados experimentais

- Dados experimentais com comportamento não linear
  - Artifício matemático: mudança de variáveis $\rightarrow$ logaritmos
  - Exemplo 2: comportamento descrito por ‘lei de potência’

$$\phi(z) = k z^a \quad \begin{cases} k = ? \\ a = ? \end{cases}$$

$$\ln(\phi) \quad \downarrow \quad \ln(kz^a) = \ln(k) + \ln(z^a)$$

$$\boxed{y(x) = b + ax} \quad ; \quad y = \ln(\phi) \quad , \quad b = \ln(k) \quad , \quad x = \ln(z)$$

mínimos quadrados
- **coeficiente angular:** $\boldsymbol{a}$
- **coeficiente linear:** $\boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{k = e^b}$