UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – PIRASSUNUNGA

ZEB0562
CÁLCULO NUMÉRICO

PROF. DR. JOSÉ A. RABI

DEPTO. ENGENHARIA DE BIOSSISTEMAS

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

USP

FZEA

SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES: GAUSS-SEIDEL

- SOLUÇÃO ITERATIVA: MÉTODO GAUSS-SEIDEL
- DIAGONAL DOMINANTE $\rightarrow$ ESTABILIDADE
- EXEMPLO DE IMPLEMENTAÇÃO: ORDEM 4
- IMPLEMENTAÇÃO VIA PLANILHA MS EXCEL

Método iterativo: Gauss-Seidel

- Solução do sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por métodos iterativos
  - Aplicação $\rightarrow$ matrizes com número elevado de elementos
  - Sequência de aproximações ($\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$) para a solução do sistema a partir de uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$
  - Repetição do ciclo computacional até obter acurácia desejada
  - Uso de valores recém calculados no <u>mesmo nível iterativo</u>

- Implementação computacional (dada *k*-ésima iteração)

$$x_1^{(k)} = [b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)}] \;/\; a_{11}$$

$$x_2^{(k)} = [b_2 - a_{21}x_1^{(k)} \quad - a_{23}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)}] \;/\; a_{22}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k)} = [b_n - a_{n1}x_1^{(k)} \quad - a_{n2}x_2^{(k)} \quad - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}] \;/\; a_{nn}$$

Método iterativo: Gauss-Seidel

- Exemplo numérico: sistema linear de ordem 4

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & & & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
 & & -2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 10 \\
-3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -25 \\
4x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 22
\end{array} \quad , \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Diagonal dominante: maiores coeficientes (em módulo)
  - Linha 3 $\rightarrow$ coeficiente "$+ 5$" $\rightarrow$ isolar x_2
  - Linha 4 $\rightarrow$ coeficiente "$+ 4$" $\rightarrow$ isolar x_1
  - Linha 1 $\rightarrow$ coeficiente "$- 3$" $\rightarrow$ isolar x_3
  - Linha 2 $\rightarrow$ coeficiente "$+ 2$" $\rightarrow$ isolar x_4 (por exclusão)

Método iterativo: Gauss-Seidel

- Diagonal dominante $\rightarrow$ rearranjo do sistema linear

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 22 \\ -3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -25 \\ x_1 & & & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & -2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 10 \end{array} \quad , \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - Isolando cada variável $\rightarrow$ formulação dos cálculos iterativos

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= (\quad x_2^{(k-1)} + 3x_3^{(k-1)} + 22) \; / \; 4 \\ x_2^{(k)} &= (\quad 3x_1^{(k)} - x_3^{(k-1)} - x_4^{(k-1)} - 25) \; / \; 5 \\ x_3^{(k)} &= (\quad -x_1^{(k)} - x_4^{(k-1)} + 1) \; / \; (-3) \\ x_4^{(k)} &= (\quad 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 10) \; / \; 2 \end{aligned}$$

Método iterativo: Gauss-Seidel

– 1ª iteração:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= (\quad x_2^{(0)} + 3x_3^{(0)} + 22) / 4 = 6.500 \\
x_2^{(1)} &= (\ 3x_1^{(1)} - x_3^{(0)} - x_4^{(0)} - 25) / 5 = -1.500 \\
x_3^{(1)} &= (\ -x_1^{(1)} - x_4^{(0)} + 1) / (-3) = 2.167 \\
x_4^{(1)} &= (\quad 2x_2^{(1)} + x_3^{(1)} + 10) / 2 = 4.583
\end{aligned}$$

– 2ª iteração:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= (\quad x_2^{(1)} + 3x_3^{(1)} + 22) / 4 = 6.750 \\
x_2^{(2)} &= (\ 3x_1^{(2)} - x_3^{(1)} - x_4^{(1)} - 25) / 5 = -2.300 \\
x_3^{(2)} &= (\ -x_1^{(2)} - x_4^{(1)} + 1) / (-3) = 3.444 \\
x_4^{(2)} &= (\quad 2x_2^{(2)} + x_3^{(2)} + 10) / 2 = 4.422
\end{aligned}$$

– Solução exata $\rightarrow x_1 = 8 \ , \ x_2 = -2 \ , \ x_3 = 4 \ , \ x_4 = 5$