

**ZEB0562**  
**CÁLCULO NUMÉRICO**



**PROF. DR. JOSÉ A. RABI**  
**DEPTO. ENGENHARIA DE BIOSISTEMAS**

# SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES: JACOBI



- SOLUÇÃO ITERATIVA: MÉTODO JACOBI
- DIAGONAL DOMINANTE → ESTABILIDADE
- EXEMPLO DE IMPLEMENTAÇÃO: ORDEM 4
- IMPLEMENTAÇÃO VIA PLANILHA MS EXCEL

# Método iterativo: Jacobi

- Solução do sistema  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  por métodos iterativos
  - Aplicação → matrizes com número elevado de elementos
  - Sequência de aproximações  $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)})$  para a solução do sistema a partir de uma aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$
  - Repetição do ciclo computacional até obter acurácia desejada
  - Uso somente de valores calculados no nível iterativo anterior
- Implementação computacional (dada  $k$ -ésima iteração)

$$x_1^{(k)} = [b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}] / a_{11}$$

$$x_2^{(k)} = [b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}] / a_{22}$$


⋮

$$x_n^{(k)} = [b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k-1)}] / a_{nn}$$



# Método iterativo: Jacobi


- Exemplo numérico: sistema linear de ordem 4


$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 10 \\ - & 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -25 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & & & & = & 22 \end{array}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Diagonal dominante: maiores coeficientes (em módulo)
  - Linha 3 → coeficiente “+ 5” → isolar  $x_2$
  - Linha 4 → coeficiente “+ 4” → isolar  $x_1$
  - Linha 1 → coeficiente “– 3” → isolar  $x_3$
  - Linha 2 → coeficiente “+ 2” → isolar  $x_4$  (por exclusão)

# Método iterativo: Jacobi

- Diagonal dominante → rearranjo do sistema linear


$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - 3x_3 &= 22 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= -25 \\ x_1 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ -2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Isolando cada variável → formulação dos cálculos iterativos

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= (x_2^{(k-1)} + 3x_3^{(k-1)} + 22) / 4 \\ x_2^{(k)} &= (3x_1^{(k-1)} - x_3^{(k-1)} - x_4^{(k-1)} - 25) / 5 \\ x_3^{(k)} &= (-x_1^{(k-1)} - x_4^{(k-1)} + 1) / (-3) \\ x_4^{(k)} &= (2x_2^{(k-1)} + x_3^{(k-1)} + 10) / 2 \end{aligned}$$

# Método iterativo: Jacobi

– 1ª iteração:

$$x_1^{(1)} = (x_2^{(0)} + 3x_3^{(0)} + 22) / 4 = 6.500$$

$$x_2^{(1)} = (3x_1^{(0)} - x_3^{(0)} - x_4^{(0)} - 25) / 5 = -4.800$$

$$x_3^{(1)} = (-x_1^{(0)} - x_4^{(0)} + 1) / (-3) = 0.333$$

$$x_4^{(1)} = (2x_2^{(0)} + x_3^{(0)} + 10) / 2 = 6.500$$

– 2ª iteração:

$$x_1^{(2)} = (x_2^{(1)} + 3x_3^{(1)} + 22) / 4 = 4.550$$

$$x_2^{(2)} = (3x_1^{(1)} - x_3^{(1)} - x_4^{(1)} - 25) / 5 = -2.467$$

$$x_3^{(2)} = (-x_1^{(1)} - x_4^{(1)} + 1) / (-3) = 4.000$$

$$x_4^{(2)} = (2x_2^{(1)} + x_3^{(1)} + 10) / 2 = 0.3667$$

– Solução exata  $\rightarrow x_1 = 8$  ,  $x_2 = -2$  ,  $x_3 = 4$  ,  $x_4 = 5$

