

Conceitos sobre resposta em frequência

Flávio R. M. Pavan, Fábio B. Ferreira, Magno T. M. Silva e Flávio A. M. Cipparrone, 2017

1 Introdução

Na apostila “Regime permanente senoidal e Fasores”, foi apresentada uma breve explicação sobre a operação em regime permanente senoidal (RPS) de circuitos elétricos. Como a tensão da rede elétrica é senoidal e como grande parte dos sinais periódicos pode ser decomposta como soma de sinais senoidais, o estudo de circuitos em RPS possui grande relevância prática.

Nesta apostila, será abordado o conceito de resposta em frequência. Em Engenharia Elétrica, a resposta em frequência é largamente utilizada para compreender o comportamento em RPS de circuitos elétricos e de outros sistemas que sejam lineares e invariantes no tempo, como será visto em disciplinas posteriores. Além disso, sua compreensão pode ser útil para projetar circuitos elétricos com aplicações interessantes. Um problema prático que pode ser resolvido utilizando-se o conceito de resposta em frequência é apresentado a seguir. Uma solução para esse problema é proposta no final da apostila.

Exemplo de aplicação: eliminação do som da vuvuzela

A vuvuzela é uma corneta plástica, com comprimento de aproximadamente 65 cm, que pode produzir um som intenso com nota principal em aproximadamente 235 Hz, e primeiro sobretom em 465 Hz. Essa corneta tornou-se mundialmente conhecida após seu uso na Copa das Confederações da FIFA em 2009, antecipando a Copa do Mundo de 2010 na África do Sul. Lá, ela já vinha sendo amplamente usada por torcidas em partidas de futebol, tornando-se um símbolo do futebol sul-africano.



Com a popularização do uso da vuvuzela em 2009 e 2010, a intensidade do som que ela pode produzir chamou a atenção da comunidade de futebol internacional e levantou preocupações de saúde e de segurança. Os altos níveis de pressão sonora que ela pode atingir podem levar à perda permanente de audição após exposição continuada a pequenas distâncias. Jogadores de futebol reclamavam que o ruído incessante das cornetas atrapalhava a comunicação do time e a concentração dos jogadores durante as partidas. Já as empresas de transmissão de jogos tinham dificuldade em apresentar e narrar partidas com o som constante de vuvuzelas ao fundo.

Problema: Você é contratado por uma emissora de televisão para desenvolver um circuito elétrico simples que consiga eliminar o som das vuvuzelas da torcida que se sobrepõem a um sinal de voz do narrador que transmite uma partida. Considere que esse sinal de áudio foi proporcionalmente convertido para uma tensão elétrica, e que o som da vuvuzela é um tom (senoide pura) de 235 Hz. Você deve fornecer a topologia do circuito a ser utilizado, bem como os valores dos seus componentes.

2 Resposta em frequência

Considere um circuito elétrico linear e invariante no tempo em RPS, alimentado por um sinal cossenoidal $u(t)$. Essa alimentação ou excitação é considerada como a entrada (em inglês, *input*) do circuito. Mede-se uma tensão ou corrente qualquer do circuito $y(t)$, que será considerada como saída (em inglês, *output*). Em RPS, se a entrada do circuito linear e invariante no tempo é um sinal cossenoidal, sua saída também será cossenoidal e de mesma frequência da entrada. No entanto, dependendo do circuito, a amplitude ou a fase da saída podem variar em relação à entrada.

O efeito que um circuito elétrico (ou filtro analógico) tem sobre a amplitude e a fase do sinal cossenoidal de entrada, para cada frequência de excitação considerada, é denominado *resposta em frequência*. Denotando-se \widehat{U} e \widehat{Y} , respectivamente, como os fasores correspondentes à entrada e à saída em uma dada frequência angular de excitação ω , a resposta em frequência é definida como

$$H(j\omega) = \frac{\widehat{Y}}{\widehat{U}}. \quad (1)$$

Em outras palavras, a resposta em frequência é dada pela razão entre o fasor do sinal cossenoidal de saída e o fasor do sinal cossenoidal de entrada. É importante ressaltar que:

- A resposta em frequência é uma função que depende da frequência angular ω de excitação, que corresponde à frequência de operação em regime permanente senoidal do circuito. Isso ocorre porque o fasor de saída \widehat{Y} depende de ω , apesar de a notação usada em (1) não deixar essa dependência explícita.
- A variável ω é real e não negativa (dada, no Sistema Internacional, em rad/s), enquanto a resposta em frequência $H(j\omega)$ é uma função *complexa*. Dessa forma, é usual considerá-la e representá-la graficamente em módulo e fase, ou seja,

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg\{H(j\omega)\}}. \quad (2)$$

- Um mesmo circuito elétrico pode apresentar diferentes funções de resposta em frequência, dependendo de quais de suas grandezas elétricas são consideradas como entrada e saída.
- O motivo de se representar a resposta em frequência como $H(j\omega)$, com $j\omega$ no argumento de $H(\cdot)$, ficará mais claro durante o estudo de funções de rede e teoremas de redes lineares em Circuitos Elétricos.

A escolha das grandezas elétricas a serem consideradas como entrada e saída na composição da resposta em frequência pode variar. Na Tabela 1, são apresentadas quatro dessas possibilidades e as suas respectivas unidades no Sistema Internacional (SI).

Tabela 1: Possíveis escolhas de entrada e saída para a composição da resposta em frequência.

Saída	tensão	corrente	tensão	corrente
Entrada	corrente	corrente	tensão	tensão
Unidade de $H(j\omega)$ no SI	ohm (Ω)	adimensional	adimensional	siemens (S)

3 Frequência de corte e escala em decibels

Considere novamente um circuito linear e invariante no tempo em RPS, com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$. Mantendo-se a potência média da cossenoide de entrada $u(t)$ constante e variando-se a frequência angular de excitação $\omega \geq 0$, nota-se que a potência média da cossenoide $y(t)$ irá variar, dependendo do valor da resposta em frequência em cada ω . Em algumas situações, pode ser útil conhecer a frequência angular em que a potência média da saída vale metade do seu valor máximo, mantendo-se a potência média da entrada constante. Essa frequência é conhecida como *frequência de corte* e é denotada por ω_c .

Tomando o módulo de ambos os lados da Equação (1), chega-se a

$$|H(j\omega)| = \frac{|\widehat{Y}|}{|\widehat{U}|} = \frac{Y_m}{U_m}, \quad (3)$$

em que Y_m e U_m são as amplitudes dos sinais cossenoidais $y(t)$ e $u(t)$, respectivamente. Elevando-se ambos os lados da equação obtida ao quadrado, chega-se a

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{Y_m^2}{U_m^2}. \quad (4)$$

A máxima potência média* de $y(t)$ é proporcional ao máximo valor de Y_m^2 , que vale

$$Y_{m,\max}^2 = U_m^2 \max_{\omega \geq 0} |H(j\omega)|^2, \quad (5)$$

Na frequência ω_c , Y_m^2 deverá valer a metade de seu valor máximo. Sendo assim,

$$\frac{Y_{m,\max}^2}{2} = U_m^2 |H(j\omega_c)|^2. \quad (6)$$

Dividindo-se (6) por (5), chega-se a

$$\frac{1}{2} = \frac{|H(j\omega_c)|^2}{\max_{\omega \geq 0} |H(j\omega)|^2}. \quad (7)$$

Isolando-se $|H(j\omega_c)|$ na expressão obtida, resulta

$$\boxed{|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{\max}}, \quad (8)$$

em que[†]

$$H_{\max} = \max_{\omega \geq 0} |H(j\omega)|. \quad (9)$$

Desse modo, na frequência de corte, em que a potência média de saída cai pela metade de seu valor máximo, a resposta em frequência deverá corresponder ao seu respectivo valor máximo dividido por $\sqrt{2}$. Isso ocorre pois a resposta em frequência é uma relação entre grandezas elétricas como tensões ou correntes, enquanto potências médias são proporcionais a tensões ou

*A potência média de uma tensão ou corrente senoidal corresponde à potência média que um resistor de 1Ω dissipa sob sua ação.

[†]No caso geral, vamos considerar que H_{\max} é igual ao supremo da imagem da função $|H(j\omega)|$ para $\omega \geq 0$.

correntes elevadas ao quadrado. Assim, um fator de $1/2$ entre potências médias corresponde a um fator de $1/\sqrt{2}$ entre tensões ou correntes.

Dispondo-se da frequência de corte de uma dada resposta em frequência, definem-se as faixas de frequência (ou bandas) de passagem e rejeição do filtro analógico. A banda será de passagem (ou banda passante) quando o módulo da resposta em frequência for maior do que o valor assumido na frequência de corte; e de rejeição, caso contrário.

Por fim, é importante notar que, em diversas aplicações, pode ser útil representar o módulo da resposta em frequência com uma escala em decibels (dB). O módulo da resposta em frequência em dB é dado por

$$\boxed{|H(j\omega)| \text{ (dB)} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|.} \quad (10)$$

Uma das vantagens do uso dessa escala logarítmica é facilitar a visualização de grandes variações da resposta em frequência em um dado intervalo de frequências (ou banda). Na frequência de corte, tem-se que

$$|H(j\omega_c)| \text{ (dB)} = 20 \log_{10} |H(j\omega_c)| = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} H_{\max} \right) \approx 20 \log_{10} H_{\max} - 3 \text{ dB}. \quad (11)$$

Assim, se o módulo da resposta em frequência estiver em dB, identifica-se a frequência de corte ω_c como o valor de frequência em que há uma diminuição ou queda de 3 dB em relação ao valor máximo do módulo da resposta em frequência, também em dB. Trata-se de um resultado importante e que deve ser enfatizado: uma queda de 3 dB no valor máximo do módulo da resposta em frequência representa que a potência média da saída caiu pela metade (mantendo-se a potência média da entrada constante).

Exemplo 1 – Circuito R, C (filtro passa-baixas)

Considere o circuito da Figura 1, operando em regime permanente senoidal.

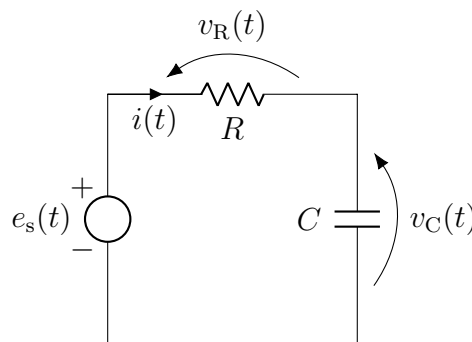


Figura 1: Circuito R, C série alimentado por um gerador ideal de tensão senoidal.

Determine expressões e gráficos para o módulo e a fase da resposta em frequência desse circuito considerando-se $v_C(t)$ como saída e $e_s(t)$ como entrada, ou seja,

$$H(j\omega) = \frac{\widehat{V}_C}{\widehat{E}_s}. \quad (12)$$

Resolução: Inicialmente, reescrevemos o circuito dado em RPS, como mostrado na Figura 2. Note que as funções no tempo foram convertidas para fasores e a impedância de cada componente do circuito foi indicada.

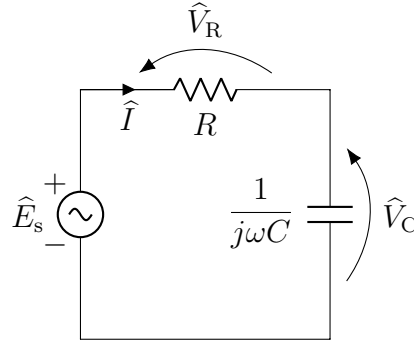


Figura 2: Circuito R, C série da Figura 1 em RPS.

Aplicando-se a 2ª Lei de Kirchhoff ao circuito, tem-se

$$\hat{E}_s = \hat{V}_R + \hat{V}_C. \quad (13)$$

Utilizando-se as relações constitutivas fasoriais do resistor e do capacitor, tem-se

$$\hat{V}_R = R\hat{I}, \quad (14)$$

$$\hat{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\hat{I}. \quad (15)$$

Substituindo-se essas relações em (13), chega-se a

$$\hat{E}_s = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\hat{I} \Rightarrow \hat{I} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}\hat{E}_s. \quad (16)$$

Agora, para relacionarmos \hat{E}_s com \hat{V}_C , basta substituímos a expressão encontrada para \hat{I} em (15), resultando em

$$\hat{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\hat{I} = \frac{1}{j\omega RC + 1}\hat{E}_s. \quad (17)$$

Finalmente, a expressão da resposta em frequência $H(j\omega)$ é dada por

$$H(j\omega) = \frac{\hat{V}_C}{\hat{E}_s} = \frac{1}{j\omega RC + 1}. \quad (18)$$

Nota-se que essa resposta em frequência é adimensional, pois consiste na razão entre duas tensões elétricas.

O módulo de $H(j\omega)$ é calculado como

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega RC + 1} \right| = \frac{|1|}{|j\omega RC + 1|} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}. \quad (19)$$

A partir da expressão obtida, nota-se que $|H(j0)| = 1$ e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)| = 0$. Além disso, $|H(j\omega)|$ é uma função decrescente, pois possui primeira derivada sempre negativa para $\omega > 0$.

Conclui-se que o comportamento do circuito da Figura 1, considerando-se $v_C(t)$ como saída e $e_s(t)$ como entrada, é de um filtro *passa-baixas*. Em outras palavras, o circuito deixa as baixas frequências da entrada passarem e atenua consideravelmente as suas frequências mais altas. Portanto,

$$H_{\max} = |H(j0)| = 1. \quad (20)$$

Com esse resultado, é possível encontrar a frequência de corte ω_c do filtro passa-baixas a partir de (8), fazendo-se

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{\omega_c^2 R^2 C^2 + 1}} \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{H_{\max}}_{=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}. \quad (21)$$

Como o filtro é passa-baixas, dizemos que $0 < \omega < \omega_c$ é a banda passante e que $\omega > \omega_c$ é a banda de rejeição.

Além disso, a expressão do módulo de $H(j\omega)$ em dB fica

$$|H(j\omega)| \text{ (dB)} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} = -10 \log_{10} (\omega^2 R^2 C^2 + 1). \quad (22)$$

Nota-se que

$$|H(j0)| \text{ (dB)} = 0 \text{ dB}$$

e que

$$|H(j\omega_c)| \text{ (dB)} = \left| H \left(j \frac{1}{RC} \right) \right| \text{ (dB)} = -10 \log_{10} 2 \approx -3 \text{ dB},$$

como era de se esperar.

Já a fase de $H(j\omega)$ é dada por

$$\begin{aligned} \arg \{H(j\omega)\} &= \arg \left\{ \frac{1}{j\omega RC + 1} \right\} = \arg\{1\} - \arg\{j\omega RC + 1\} \\ &= 0^\circ - \arctg \left(\frac{\omega RC}{1} \right) = -\arctg(\omega RC). \end{aligned} \quad (23)$$

Nota-se que $\arg \{H(j0)\} = 0^\circ$ e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg \{H(j\omega)\} = -90^\circ$. Além disso, na frequência de corte, temos

$$\arg \{H(j\omega_c)\} = \arg \left\{ H \left(j \frac{1}{RC} \right) \right\} = -\arctg(1) = -45^\circ.$$

Resumindo todos os resultados obtidos para esse filtro, na Figura 3 são mostrados gráficos de módulo e fase de $H(j\omega)$. Na Figura 4, é mostrado o gráfico do módulo de $H(j\omega)$ em dB.

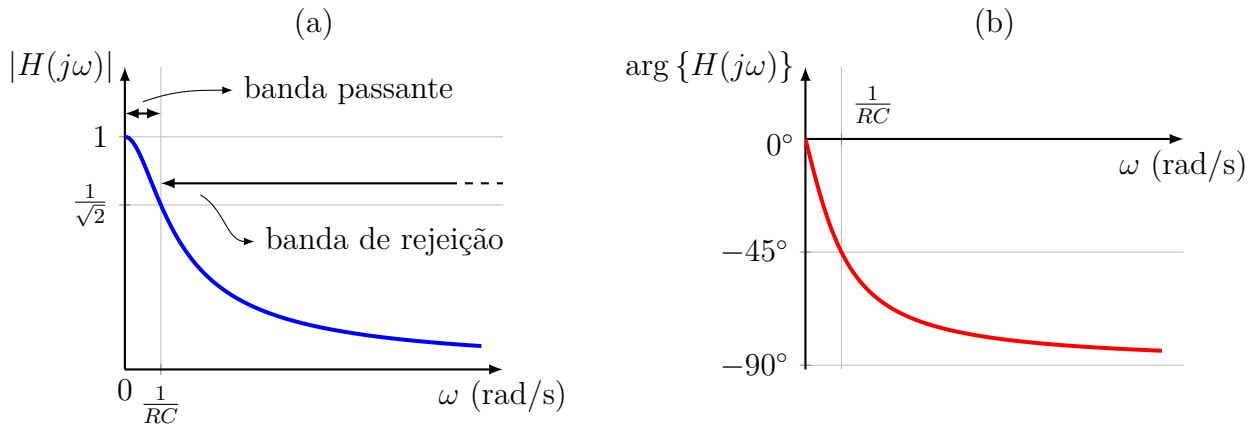


Figura 3: (a) Módulo e (b) fase da resposta em frequência $H(j\omega)$.

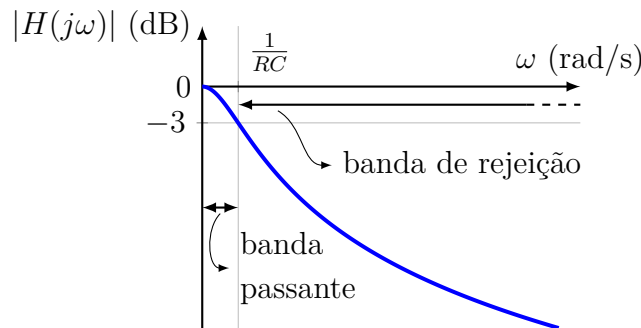


Figura 4: Módulo da resposta em frequência $H(j\omega)$ em dB.

Exemplo 2 – Circuito R, C (filtro passa-altas)

Considere novamente o circuito da Figura 1, operando em regime permanente senoidal. Determine expressões e gráficos para o módulo e a fase da resposta em frequência desse circuito considerando-se $v_R(t)$ como saída e $e_s(t)$ como entrada, ou seja

$$F(j\omega) = \frac{\hat{V}_R}{\hat{E}_s}. \quad (24)$$

Resolução: Partindo das contas feitas no Exemplo 1, relacionamos \hat{E}_s com \hat{V}_R substituindo (16) em (14), o que leva a

$$\hat{V}_R = R\hat{I} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}\hat{E}_s = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}\hat{E}_s. \quad (25)$$

Sendo assim, a expressão da resposta em frequência $F(j\omega)$ é dada por

$$F(j\omega) = \frac{\hat{V}_R}{\hat{E}_s} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}. \quad (26)$$

Nota-se que essa resposta em frequência é adimensional, assim como no caso do Exemplo 1.

O módulo de $F(j\omega)$ é dado por

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} \right| = \frac{|j\omega RC|}{|j\omega RC + 1|} = \frac{\omega RC}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}. \quad (27)$$

A partir da expressão obtida, nota-se que $|F(j0)| = 0$ e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |F(j\omega)| = 1$. Além disso, $|F(j\omega)|$ é uma função crescente, pois possui primeira derivada sempre positiva para $\omega > 0$. Conclui-se que o comportamento do circuito da Figura 1, considerando-se $v_R(t)$ como saída e $e_s(t)$ como entrada, é de um filtro *passa-altas*: o circuito deixa as altas frequências da entrada passarem e atenua consideravelmente as suas frequências mais baixas. Portanto,

$$F_{\max} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |F(j\omega)| = 1. \quad (28)$$

Prosseguimos encontrando a frequência de corte ω_c do filtro passa-altas a partir de (8), fazendo

$$|F(j\omega_c)| = \frac{\omega_c RC}{\sqrt{\omega_c^2 R^2 C^2 + 1}} \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{F_{\max}}_{=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}. \quad (29)$$

Como o filtro é passa-altas, dizemos que $\omega > \omega_c$ é a banda passante e que $0 < \omega < \omega_c$ é a banda de rejeição.

Adicionalmente, a expressão do módulo de $F(j\omega)$ em dB fica

$$|F(j\omega)| \text{ (dB)} = 20 \log_{10} \frac{\omega RC}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} = 20 \log_{10}(\omega RC) - 10 \log_{10}(\omega^2 R^2 C^2 + 1). \quad (30)$$

Nota-se ainda que

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} |F(j\omega)| \text{ (dB)} &= -\infty \text{ dB}, \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |F(j\omega)| \text{ (dB)} &= 0 \text{ dB}, \end{aligned}$$

e que

$$|F(j\omega_c)| \text{ (dB)} = \left| F\left(j \frac{1}{RC}\right) \right| \text{ (dB)} = -10 \log_{10} 2 \approx -3 \text{ dB}.$$

Já a fase de $F(j\omega)$ é dada por

$$\begin{aligned} \arg \{F(j\omega)\} &= \arg \left\{ \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} \right\} = \arg\{j\omega RC\} - \arg\{j\omega RC + 1\} \\ &= 90^\circ - \arctg\left(\frac{\omega RC}{1}\right) = 90^\circ - \arctg(\omega RC). \end{aligned} \quad (31)$$

Nota-se que $\arg \{F(j0)\} = 90^\circ$ e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg \{F(j\omega)\} = 0^\circ$. Além disso, na frequência de corte, temos

$$\arg \{F(j\omega_c)\} = \arg \left\{ F\left(j \frac{1}{RC}\right) \right\} = 90^\circ - \arctg(1) = 45^\circ.$$

Resumindo todos os resultados obtidos para esse filtro, na Figura 5 são mostrados gráficos de módulo e fase de $F(j\omega)$. Na Figura 6, é mostrado o gráfico do módulo de $F(j\omega)$ em dB.

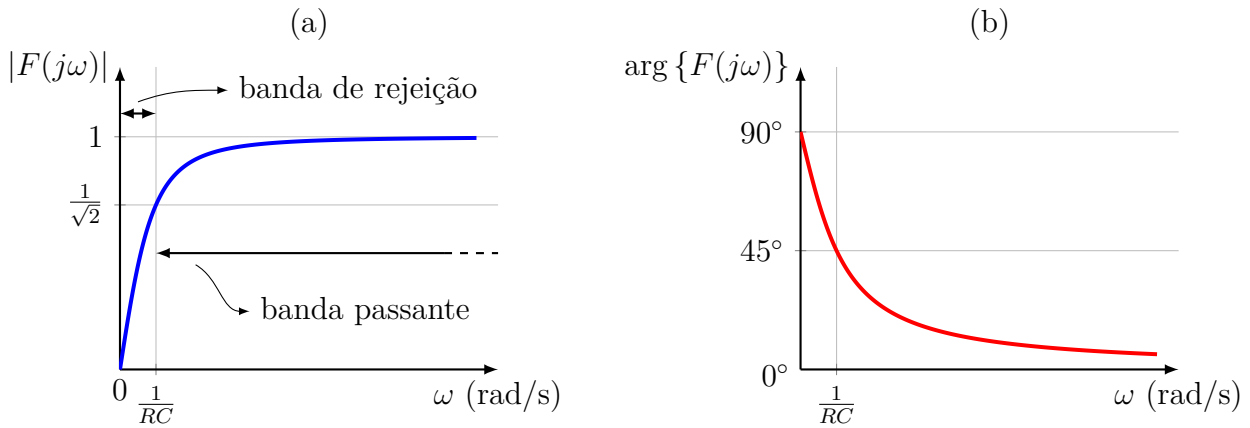


Figura 5: (a) Módulo e (b) fase da resposta em frequência $F(j\omega)$.

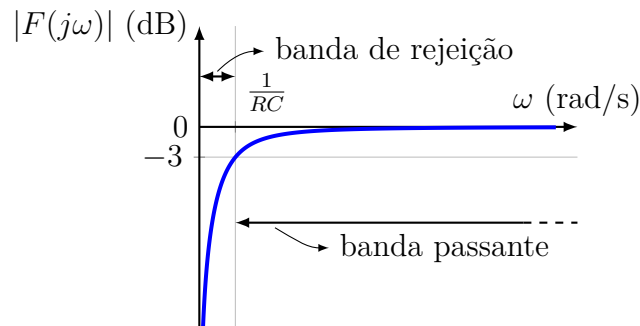


Figura 6: Módulo da resposta em frequência $F(j\omega)$ em dB.

Exemplo 3 – Circuito R, L, C paralelo (filtro passa-faixa)

Considere o circuito da Figura 7, operando em regime permanente senoidal.

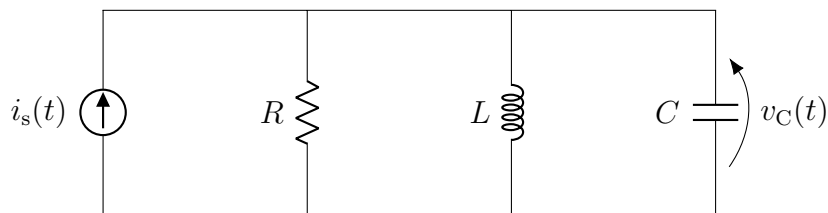


Figura 7: Circuito R, L, C paralelo alimentado por um gerador ideal de corrente senoidal.

Determine expressões e gráficos para o módulo e a fase da resposta em frequência desse circuito, considerando-se $v_C(t)$ como saída e $i_s(t)$ como entrada, ou seja,

$$Z(j\omega) = \frac{\widehat{V}_C}{\widehat{I}_s}. \quad (32)$$

Resolução: Começamos reescrevendo o circuito dado em RPS, como mostrado na Figura 8. Note que as funções no tempo foram convertidas para fasores e a *admitância* de cada componente do circuito foi indicada.

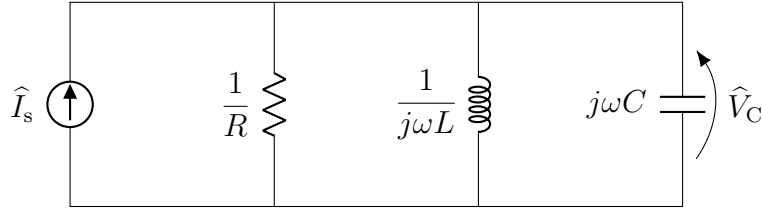


Figura 8: Circuito R, L, C paralelo da Figura 7 em RPS.

Lembrando que em paralelo as admitâncias se somam, a admitância da carga alimentada pelo gerador ideal de corrente é dada por

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right). \quad (33)$$

Com a carga associada, os fasores \hat{I}_s e \hat{V}_c estão associados pela lei de Ohm fasorial

$$\hat{V}_c = \frac{1}{Y(j\omega)} \hat{I}_s. \quad (34)$$

Logo, a resposta em frequência $Z(j\omega)$ é diretamente obtida e vale

$$Z(j\omega) = \frac{\hat{V}_C}{\hat{I}_s} = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{1}{\left[\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]} \quad (35)$$

Essa resposta em frequência possui unidade em ohms no SI, pois consiste na razão entre uma tensão e uma corrente. Além disso, é possível observar que $Z(j\omega)$ representa a impedância da carga alimentada pelo gerador de corrente.

O módulo de $Z(j\omega)$ é calculado como

$$|Z(j\omega)| = \left| \frac{1}{\left[\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]} \right| = \frac{|1|}{\left|\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}. \quad (36)$$

O módulo de $Z(j\omega)$ será máximo quando seu denominador for o menor valor possível, o que ocorre para a frequência ω_0 tal que

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (37)$$

Nesse caso,

$$Z(j\omega_0) = R = Z_{\max}. \quad (38)$$

Além disso, $\lim_{\omega \rightarrow 0} |Z(j\omega)| = 0$ e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |Z(j\omega)| = 0$. A frequência ω_0 é chamada de *frequência de ressonância* e nessa frequência o comportamento do circuito é resistivo, uma vez que o efeito do capacitor é anulado pelo efeito do indutor. É possível demonstrar que $|Z(j\omega)|$ é crescente para $0 < \omega < \omega_0$ e decrescente para $\omega > \omega_0$. Conclui-se que o comportamento do circuito da Figura 7, considerando-se $v_C(t)$ como saída e $i_s(t)$ como entrada, é de um filtro *passa-faixa*. Em outras palavras, o circuito deixa apenas uma faixa de frequências da entrada

passar, atenuando as demais frequências. A partir dessas observações, é possível encontrar as frequências de corte ω_{c1} inferior e ω_{c2} superior do filtro passa-faixa a partir de (8), fazendo-se

$$|Z(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega_c C - \frac{1}{\omega_c L}\right)^2}} \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{Z_{\max}}_{=R} = \frac{R}{\sqrt{2}}. \quad (39)$$

Após resolver a equação algébrica resultante em ω_c e impondo-se que $0 < \omega_{c1} < \omega_{c2}$, chega-se aos valores de frequência de corte

$$\omega_{c1} = -\frac{1}{2RC} + \frac{1}{2LC}\sqrt{\frac{L^2}{R^2} + 4LC} \quad \text{e} \quad \omega_{c2} = \frac{1}{2RC} + \frac{1}{2LC}\sqrt{\frac{L^2}{R^2} + 4LC}. \quad (40)$$

Como o filtro é passa-faixa, $0 < \omega < \omega_{c1}$ e $\omega > \omega_{c2}$ são as bandas de rejeição e $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$ é a banda passante.

A largura da banda passante B desse circuito é calculada como

$$\boxed{B = \omega_{c2} - \omega_{c1}}. \quad (41)$$

Para o filtro sob análise, temos

$$B = \frac{1}{2RC} + \frac{1}{2LC}\sqrt{\frac{L^2}{R^2} + 4LC} - \left[-\frac{1}{2RC} + \frac{1}{2LC}\sqrt{\frac{L^2}{R^2} + 4LC} \right] = \frac{1}{RC}. \quad (42)$$

Além disso, podemos calcular o índice de mérito Q_0 desse circuito na ressonância, dado por

$$\boxed{Q_0 = \frac{\omega_0}{B}}. \quad (43)$$

Trata-se de uma grandeza adimensional que mede o estreitamento de B : um circuito com Q_0 relativamente alto possui B relativamente baixa (em outras palavras, alta seletividade em frequência) e é altamente oscilatório no tempo. Para o filtro da Figura 7, o índice de mérito na ressonância vale

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{B} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (44)$$

Para terminar nossa análise da resposta em frequência, precisamos calcular a fase de $Z(j\omega)$. Ela vale

$$\arg\{Z(j\omega)\} = \arg\left\{ \frac{1}{\left[\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]} \right\} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} &= \arg\{1\} - \arg\left\{ \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \right\} \\ &= 0^\circ - \arctg\left[\frac{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\left(\frac{1}{R}\right)} \right] \\ &= -\arctg\left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right). \end{aligned} \quad (46)$$

Verifique que $\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg \{G(j\omega)\} = 90^\circ$, $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg \{G(j\omega)\} = -90^\circ$ e $\arg \{G(j\omega_0)\} = 0$.

Resumindo todos os resultados obtidos para esse filtro, na Figura 9 são mostrados gráficos de módulo e fase de $Z(j\omega)$.

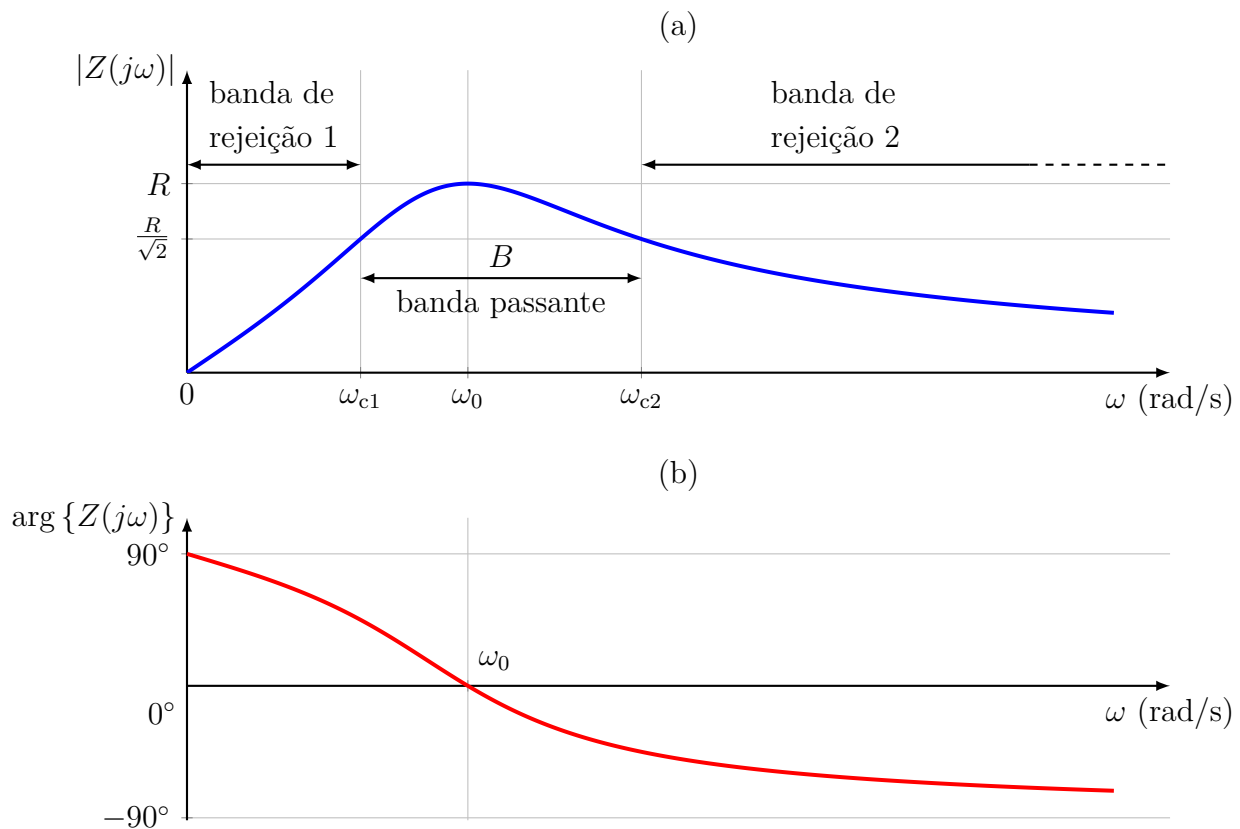


Figura 9: (a) Módulo e (b) fase da resposta em frequência $Z(j\omega)$.

Nota-se que, para $0 < \omega < \omega_0$, o circuito da Figura 7 é indutivo (a tensão está adiantada em relação à corrente), e para $\omega > \omega_0$, o circuito é capacitivo (a tensão está atrasada em relação à corrente). Para $\omega = \omega_0$, o circuito é resistivo (tensão e corrente estão em fase).

Finalmente, na Figura 10 são mostrados gráficos de $|Z(j\omega)|$ para diferentes valores de Q_0 , considerando-se $R = 1 \Omega$ fixo e variando-se C e L de modo a manter ω_0 constante.

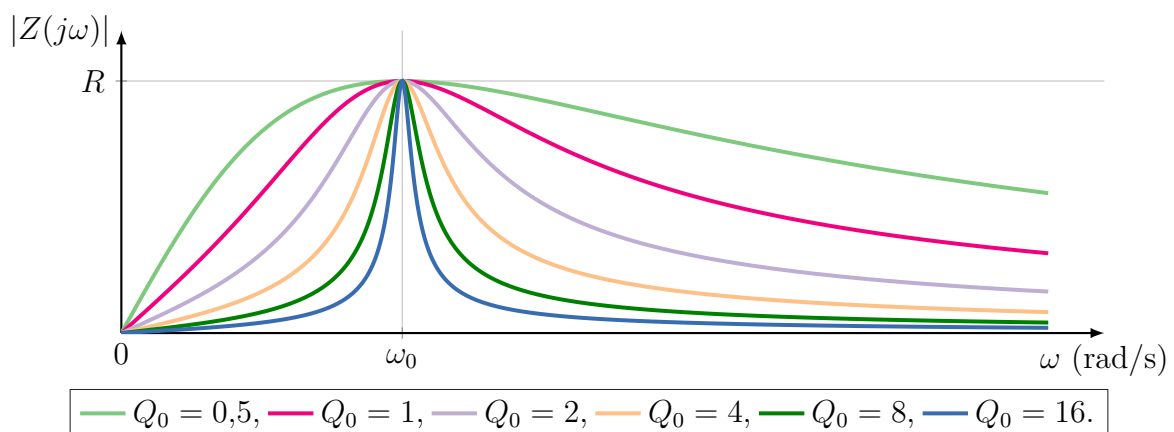


Figura 10: Efeito da variação do índice de mérito na ressonância Q_0 em $|Z(j\omega)|$.

Exemplo 4 – Filtro de rejeição

Considere o circuito da Figura 11, operando em regime permanente senoidal.

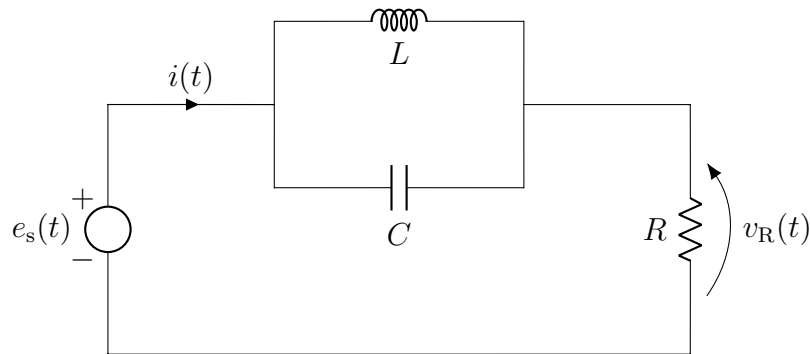


Figura 11: Circuito rejeita-faixa alimentado por um gerador ideal de tensão senoidal.

Pede-se: (a) Determine expressões e gráficos para o módulo e a fase da resposta em frequência desse circuito, considerando-se $v_R(t)$ como saída e $e_s(t)$ como entrada, ou seja,

$$M(j\omega) = \frac{\widehat{V}_R}{\widehat{E}_s}. \quad (47)$$

(b) Utilizando a *linearidade* do circuito elétrico, determine uma expressão para $v_R(t)$ sabendo-se que $R = 2\Omega$, $L = 1\text{ H}$ e $C = 3\text{ F}$, para uma entrada

$$e_s(t) = \frac{1}{2} + 5 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}} + 45^\circ\right) - 3 \sin\left(\frac{2t}{3} - 45^\circ\right), \quad -\infty < t < +\infty \quad (\text{V, s}). \quad (48)$$

Resolução: (a) Começamos reescrevendo o circuito dado em RPS, como mostrado na Figura 12. Note que as funções no tempo foram convertidas para fasores e a *impedância* de cada componente do circuito foi indicada. Seguindo-se um procedimento análogo para se determinar

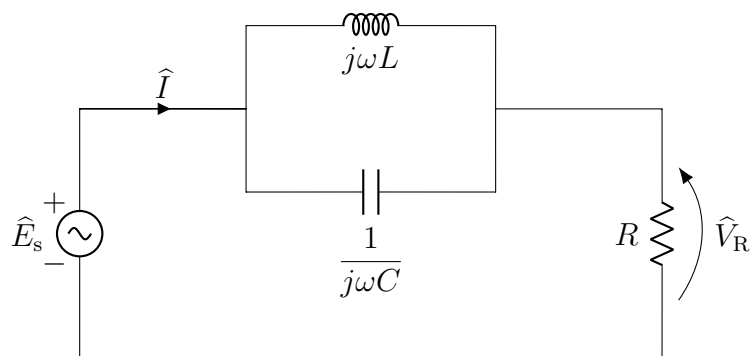


Figura 12: Circuito rejeita-faixa da Figura 11 em RPS.

a relação entre entrada e saída dos Exemplos 1 e 2, chega-se à expressão

$$\widehat{V}_R = \frac{R}{R + \left[\frac{\left(\frac{1}{j\omega C} j\omega L \right)}{\left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right)} \right]} \widehat{E}_s = \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}} \widehat{E}_s. \quad (49)$$

Desse modo,

$$M(j\omega) = \frac{\widehat{V}_R}{\widehat{E}_s} = \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}}. \quad (50)$$

Essa resposta em frequência é adimensional, pois consiste na razão entre duas tensões elétricas.

O módulo de $M(j\omega)$ vale

$$|M(j\omega)| = \left| \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}} \right| = \frac{|1 - \omega^2 LC|}{\left| 1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R} \right|} = \frac{|1 - \omega^2 LC|}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 \frac{L^2}{R^2}}}. \quad (51)$$

Nota-se que $0 \leq |M(j\omega)| \leq 1$ para todo $\omega \geq 0$ e que $|M(j0)| = 1$ e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |M(j\omega)| = 1$. Além disso, $|M(j\omega)|$ será nulo se e somente se

$$1 - \omega_0^2 LC = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (52)$$

Nesse caso, denominamos a frequência ω_0 como *frequência de rejeição*. Pode-se ainda demonstrar que $|M(j\omega)|$ é decrescente para $0 < \omega < \omega_0$ e crescente para $\omega > \omega_0$. Conclui-se que o comportamento do circuito da Figura 11, considerando-se $v_R(t)$ como saída e $e_s(t)$ como entrada, é de um filtro *rejeita-faixa* (ou filtro de rejeição). Em outras palavras, o circuito rejeita apenas uma faixa de frequências da entrada, deixando suas demais frequências passarem. Verifique que, como

$$M_{\max} = \max_{\omega \geq 0} |M(j\omega)| = |M(j0)| = 1, \quad (53)$$

as frequências de corte ω_{c1} inferior e ω_{c2} superior desse filtro são dadas por

$$\omega_{c1} = -\frac{1}{2RC} + \frac{1}{2LC} \sqrt{\frac{L^2}{R^2} + 4LC} \quad \text{e} \quad \omega_{c2} = \frac{1}{2RC} + \frac{1}{2LC} \sqrt{\frac{L^2}{R^2} + 4LC} \quad (54)$$

(lembre-se de impor $0 < \omega_{c1} < \omega_{c2}$). Como o filtro é rejeita-faixa, $0 < \omega < \omega_{c1}$ e $\omega > \omega_{c2}$ são as bandas passantes, e $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$ é a banda de rejeição.

A largura da banda de rejeição B desse circuito também vale

$$B = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{1}{RC}. \quad (55)$$

Além disso, seu índice de mérito Q_0 é dado por

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{B} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times RC = R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (56)$$

Note que os valores de B e Q_0 são os mesmos do filtro do Exemplo 3, porém as respostas em frequência são diferentes.

A fase de $M(j\omega)$ vale

$$\begin{aligned} \arg \{M(j\omega)\} &= \arg \left\{ \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}} \right\} \\ &= \arg \{1 - \omega^2 LC\} - \arg \left\{ 1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R} \right\}. \end{aligned} \quad (57)$$

Se $0 < \omega < \omega_0$, então $\arg\{1 - \omega^2 LC\} = 0^\circ$ e $\arg\left\{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}\right\} = \arctg\left(\frac{\omega L}{R - \omega^2 RLC}\right)$. Desse modo,

$$\arg\{M(j\omega)\} = -\arctg\left\{\frac{\omega L}{R - \omega^2 RLC}\right\}.$$

Se $\omega > \omega_0$, então $\arg\{1 - \omega^2 LC\} = -180^\circ$ e $\arg\left\{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}\right\} = 180^\circ + \arctg\left(\frac{\omega L}{R - \omega^2 RLC}\right)$. Sendo assim,

$$\arg\{M(j\omega)\} = -\arctg\left\{\frac{\omega L}{R - \omega^2 RLC}\right\}.$$

Verifique que $\arg\{M(j0)\} = 0^\circ$, $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg\{M(j\omega)\} = 0^\circ$, $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} \arg\{M(j\omega)\} = -90^\circ$ e $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0^+} \arg\{M(j\omega)\} = +90^\circ$.

Resumindo todos os resultados obtidos para esse filtro, na Figura 13 são mostrados gráficos de módulo e fase de $M(j\omega)$.

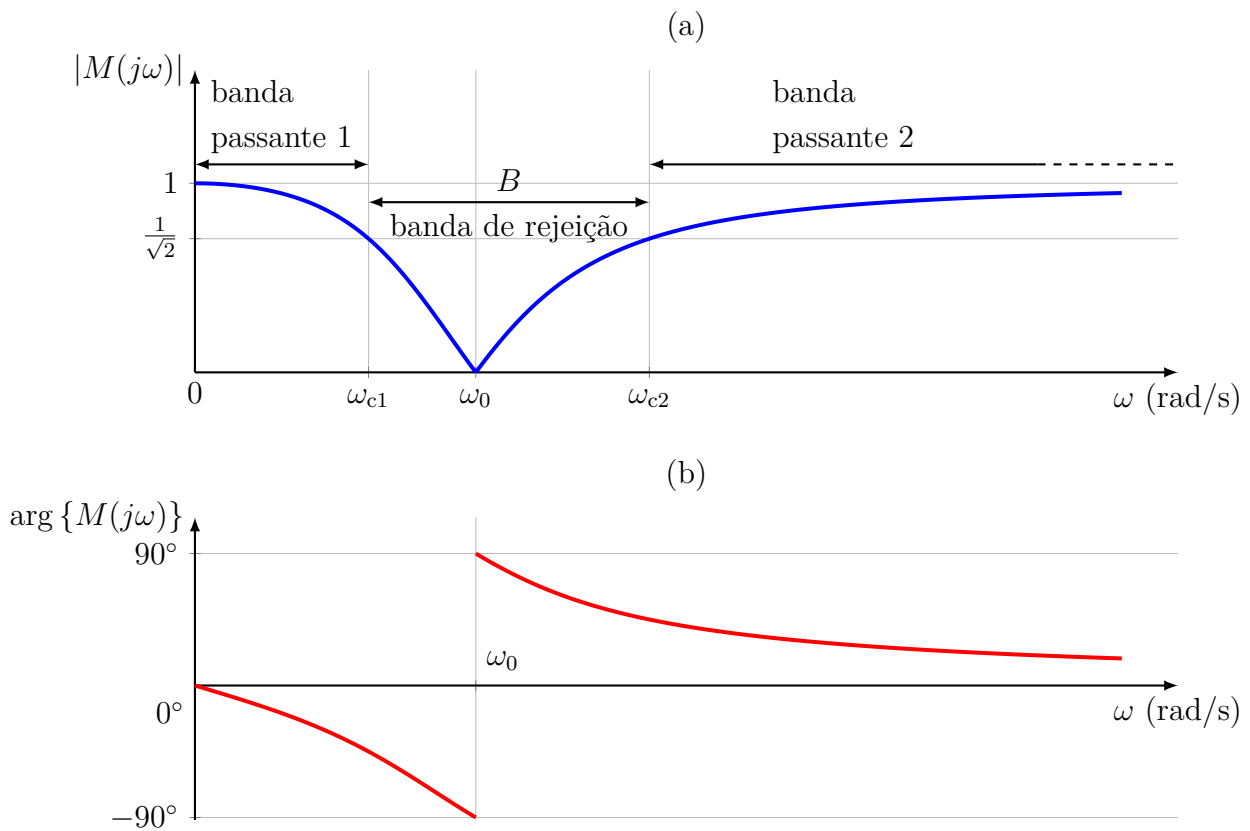


Figura 13: (a) Módulo e (b) fase da resposta em frequência $M(j\omega)$.

Resolução: (b) Agora, vamos determinar uma expressão para $v_R(t)$ sabendo-se que $R = 2\ \Omega$, $L = 1\ \text{H}$ e $C = 3\ \text{F}$, para uma entrada

$$e_s(t) = \frac{1}{2} + 5 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}} + 45^\circ\right) - 3 \sin\left(\frac{2t}{3} - 45^\circ\right), \quad -\infty < t < +\infty \quad (\text{V, s}). \quad (58)$$

Nesse caso, a resposta em frequência vale

$$M(j\omega) = \frac{\widehat{V}_R}{\widehat{E}_s} = \frac{1 - 3\omega^2}{1 - 3\omega^2 + j\frac{\omega}{2}}, \quad (59)$$

com módulo e fase dados por

$$|M(j\omega)| = \frac{|1 - 3\omega^2|}{\sqrt{(1 - 3\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{4}}} \quad \text{e} \quad \arg \{M(j\omega)\} = -\arctg \left\{ \frac{\omega}{2 - 6\omega^2} \right\}. \quad (60)$$

Sabendo-se que o circuito é linear, a saída $v_R(t)$ será composta por cada componente em frequência de $e_s(t)$, com eventuais alterações em amplitude e fase dadas pela resposta em frequência do filtro na frequência da excitação. Logo,

$$v_R(t) = \frac{1}{2}|M(j0)| + 5 \left| M \left(j \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right| \cos \left(\frac{t}{\sqrt{3}} + 45^\circ + \arg \left\{ M \left(j \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \right) - 3 \left| M \left(j \frac{2}{3} \right) \right| \sin \left(\frac{2t}{3} - 45^\circ + \arg \left\{ M \left(j \frac{2}{3} \right) \right\} \right). \quad (61)$$

Utilizando as expressões da Equação (60), obtemos os valores da resposta em frequência nas frequências da entrada $e_s(t)$:

$$M(j0) = 1, \quad M \left(j \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0, \quad M \left(j \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}.$$

Substituindo-se os valores encontrados em (61), obtém-se

$$v_R(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{2t}{3} \right), \quad -\infty < t < +\infty \quad (\text{V, s}). \quad (62)$$

Solução: eliminação do som da vuvuzela

No início da apostila, foi proposto um problema para eliminação do som das vuvuzelas em um sinal de áudio contendo a voz do narrador que transmite uma partida de futebol. Considere que esse sinal de áudio foi proporcionalmente convertido para uma tensão elétrica, e que o som da vuvuzela é um tom (senoide pura) de 235 Hz. Sabe-se que a banda de sinais de voz vai de 300 Hz a 3400 Hz. O filtro projetado deve eliminar a frequência da vuvuzela, mas manter o sinal de voz inteligível. Vamos considerar que o comportamento transitório do circuito é desprezível, mesmo com uma entrada que não é senoidal, e que defasagens no sinal de áudio são imperceptíveis ao ouvido humano.

No Exemplo 4, estudamos um filtro que é rejeita-faixa – ou seja, que permite rejeitar uma faixa de frequências do sinal de tensão de entrada. Vamos utilizar um filtro com mesma topologia daquele utilizado no Exemplo 4 para resolver o problema de eliminação do som da vuvuzela.

Precisamos determinar os valores de R , L e C a serem utilizados. Para eliminar 235 Hz, devemos impor uma frequência de rejeição de

$$\omega_0 = 2\pi \times 235 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \sqrt{LC} = \frac{1}{470\pi}.$$

Como estamos interessados na eliminação apenas da frequência de 235 Hz e desejamos manter o sinal de voz inteligível, devemos projetar um filtro com alto índice de mérito. Dessa forma, o circuito deverá possuir uma banda de rejeição estreita (ou alta seletividade em frequência). Vamos estipular $C = 1 \mu\text{F}$ e $Q_0 = 5$. Logo, devemos ter

$$\begin{aligned} \sqrt{L \times 1 \times 10^{-6}} &= \frac{1}{470\pi} \Rightarrow L \approx 458,6744 \text{ mH}, \\ Q_0 = 5 &= R \times \sqrt{\frac{C}{L}} \approx R \times \sqrt{\frac{1 \times 10^{-6}}{458,6744 \times 10^{-3}}} \Rightarrow R \approx 3,3863 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$

Sendo assim, teremos uma banda de rejeição de

$$B = \frac{1}{RC} \approx \frac{1}{3,3863 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-6}} = 295,31 \text{ rad/s} \rightarrow 47 \text{ Hz},$$

que deve manter o sinal de voz inteligível.

O filtro rejeita-faixa que projetamos para eliminação do som de vuvuzela é mostrado na Figura 14. Na Figura 15, é mostrada a sua curva de módulo de resposta em frequência, ou seja,

$$|M(j\omega)| = \left| \frac{\widehat{V}_R}{\widehat{E}_s} \right|.$$

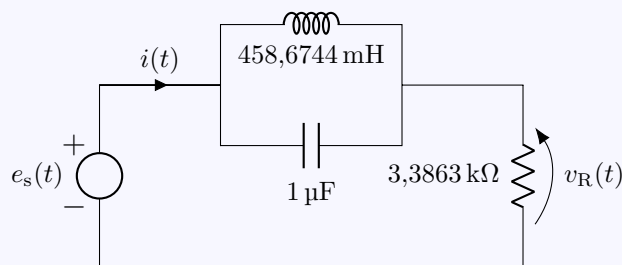


Figura 14: Circuito rejeita-faixa para eliminação do som de vuvuzela.

Solução: eliminação do som da vuvuzela

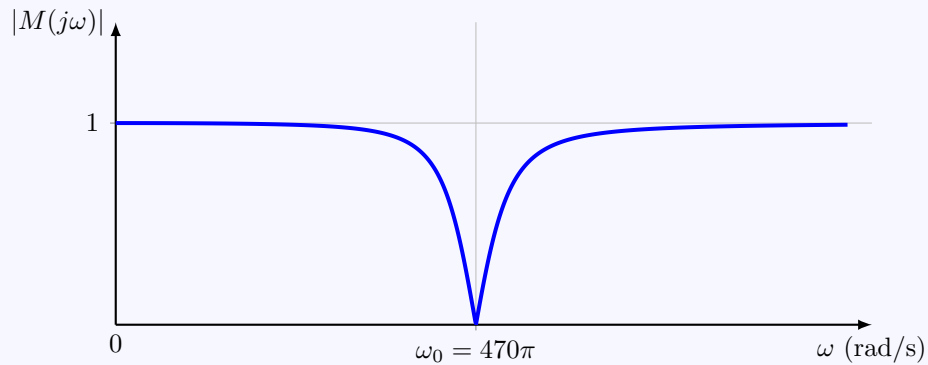


Figura 15: Módulo da resposta em frequência $M(j\omega)$ do filtro de rejeição projetado.

Na Figura 16, são mostrados gráficos de uma entrada $e_s(t)$ que consiste em sinal de voz somado ao som de vuvuzela de 235 Hz, e da correspondente saída $v_R(t)$ do filtro rejeita-faixa. Utilize o Adobe Reader com o Flash Player para ouvir os resultados. Nota-se que o filtro consegue eliminar adequadamente o tom interferente.

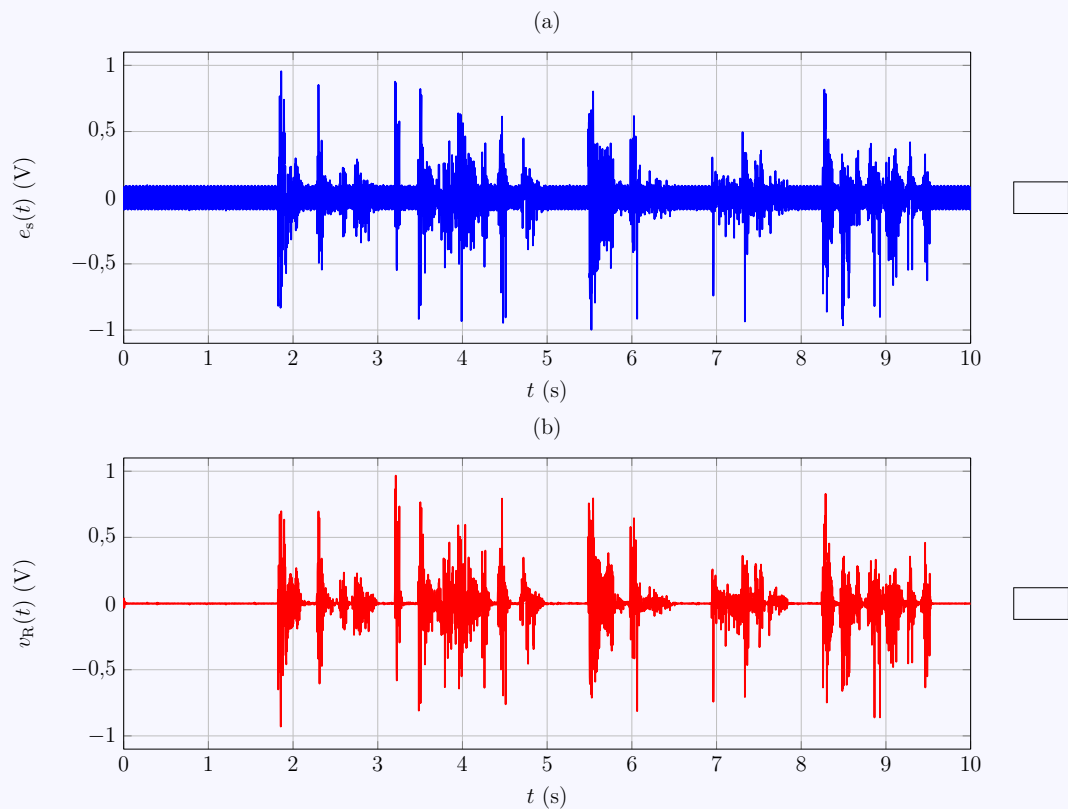


Figura 16: Gráficos e arquivos de áudio da (a) entrada e (b) saída do filtro rejeita-faixa.

Exercício 1

Considere o circuito da Figura 17 em regime permanente senoidal.

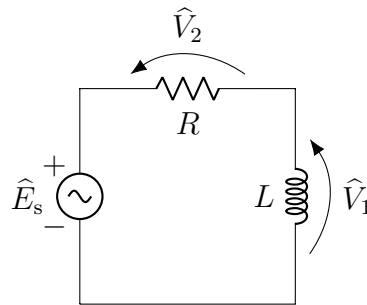


Figura 17

- (a) Determine uma expressão para o módulo $|F(j\omega)|$ da resposta em frequência

$$F(j\omega) = \frac{\widehat{V}_1}{\widehat{E}_s}.$$

- (b) Considerando-se \widehat{E}_s como entrada e \widehat{V}_1 como saída, caracterize o comportamento do filtro (passa-altas, passa-baixas, etc.).
- (c) Determine o valor da fase da resposta em frequência

$$H(j\omega) = \frac{\widehat{V}_2}{\widehat{E}_s}$$

para

$$\omega = \frac{R}{L}.$$

- (d) Considerando-se \widehat{E}_s como entrada e \widehat{V}_2 como saída, caracterize o comportamento do filtro (passa-altas, passa-baixas, etc.).

Exercício 2

Considere o circuito da Figura 18 em regime permanente senoidal.

- (a) Determine uma expressão para resposta em frequência

$$F(j\omega) = \frac{\widehat{V}_o}{\widehat{V}_s}.$$

- (b) Determine $F(j0)$ e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} F(j\omega)$. Determine a frequência ω_0 em que $|F(j\omega_0)| = 0$.
- (c) Considerando-se \widehat{V}_s como entrada e \widehat{V}_o como saída, caracterize o comportamento do filtro (passa altas, passa baixas, etc.).

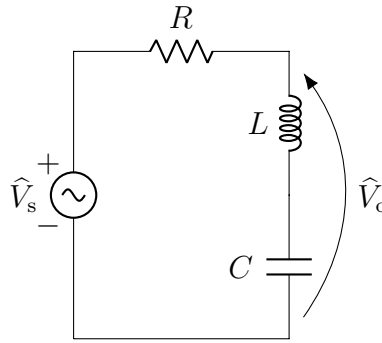


Figura 18

- (d) Determine as frequências de corte inferior e superior da resposta em frequência $F(j\omega)$, denotadas respectivamente como ω_{c1} e ω_{c2} . Lembre-se que, pela definição de frequência de corte, vale

$$|F(j\omega_{c1})| = |F(j\omega_{c2})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{\omega \geq 0} |F(j\omega)|,$$

sendo $0 < \omega_{c1} < \omega_{c2}$.

- (e) Determine a largura de banda B da resposta em frequência $F(j\omega)$, ou seja,

$$B = \omega_{c2} - \omega_{c1}.$$

- (f) Determine o índice de mérito Q do circuito na frequência ω_0 , definido como

$$Q = \frac{\omega_0}{B}.$$

Respostas dos exercícios

1. (a) $|F(j\omega)| = \frac{\omega L}{R\sqrt{1+(\frac{\omega L}{R})^2}}$. (c) $\arg\{H(j\frac{R}{L})\} = -45^\circ$.
- (b) Filtro passa-altas. (d) Filtro passa-baixas.
2. (a) $F(j\omega) = \frac{j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{-\omega^2 + j\omega\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$.
- (b) $F(j0) = 1$, $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} F(j\omega) = 1$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
- (c) Filtro rejeita-faixa.
- (d) $\omega_{c1} = \frac{1}{2} \left[-\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right]$ e $\omega_{c2} = \frac{1}{2} \left[\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right]$.
- (e) $B = \frac{R}{L}$.
- (f) $Q = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}}$.

Referências Bibliográficas

ORSINI, L. Q.; CONSONNI, D. Curso de Circuitos Elétricos, volumes 1 e 2. Segunda edição. Edgard Blücher, 2002.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. Electric Circuits. Décima edição. Pearson, 2014.

SWANEPOEL, J. W. H. III, KOEKEMOER, D. Vuvuzela – good for your team, bad for your ears. *South African Medical Journal*. Cidade do Cabo, África do Sul. 100 (4): 99–100.