Lista de Exercício I

As equações de Maxwell são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \; ; \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \, \varepsilon_0 \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \, \vec{J} \tag{0.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \; ; \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{0.2}$$

1. Mostre que as equações de Maxwell são invariantes pelas transformações de Lorentz

$$x^{0\prime} = \cosh\alpha \, x^0 + \sinh\alpha \, x^1 \; ; \quad x^{1\prime} = \cosh\alpha \, x^1 + \sinh\alpha \, x^0 \; ; \quad x^{2\prime} = x^2 \; ; \quad x^{3\prime} = x^3 \tag{0.3}$$

$$\begin{aligned} E_1' &= E_1 \; ; \qquad E_2' = \cosh\alpha \, E_2 + \sinh\alpha \, B_3 \; ; \qquad E_3' = \cosh\alpha \, E_3 - \sinh\alpha \, B_2 \\ B_1' &= B_1 \; ; \qquad B_2' = \cosh\alpha \, B_2 - \sinh\alpha \, E_3 \; ; \qquad B_3' = \cosh\alpha \, B_3 + \sinh\alpha \, E_2 \end{aligned} \tag{0.4}$$

onde

$$\frac{v}{c} = \tanh\alpha \, ; \qquad \cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \; ; \qquad \sinh\alpha = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{0.5}$$

2. Mostre que se escrevermos os campos elétrico e magnético em termos de potenciais como

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \; ; \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{0.6}$$

as equações (0.2) são automaticamente satisfeitas. Mostre que os campos elétrico e magnético são invariantes pelas transformações locais de gauge

$$\phi \to \phi - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \; ; \qquad \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha \tag{0.7}$$

3. Mostre que as equações de Maxwell (0.1) e (0.2) podem ser escritas em termos de vetores e tensores de Lorentz como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\mu \; ; \qquad \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{0.8}$$

onde

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, F^{\rho\sigma} \tag{0.9}$$

e

$$E_i = F_{0i} \; ; \qquad B_i = -\frac{1}{2\,c} \, \varepsilon_{ijk} \, F_{jk} \; ; \qquad j_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \; ; \qquad j_i = \frac{1}{\varepsilon_0 \, c} \, J_i \tag{0.10}$$

Mostre ainda que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \; ; \qquad A_\mu = \left(\phi \, , \, -c \, \vec{A} \right) \tag{0.11}$$

e que as equações de Maxwell podem ainda ser escritas como

$$\partial_\rho \widetilde{F}_{\mu\nu} + \partial_\mu \widetilde{F}_{\nu\rho} + \partial_\nu \widetilde{F}_{\rho\mu} = \widetilde{j}_{\rho\mu\nu} \; ; \qquad \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \tag{0.12}$$

com

$$j^\lambda = \frac{1}{3!}\, \varepsilon^{\lambda\rho\mu\nu}\, \widetilde{j}_{\rho\mu\nu} \tag{0.13}$$

4. Mostre que o primeiro conjunto de equações de Maxwell dado em (0.8) pode ser obtido pelo princípio de mínima ação a partir da ação

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} - j_\mu\, A^\mu \right] \tag{0.14}$$

Neste caso as coordenadas independentes utilizadas no cálculo variacional são o campo A_μ e suas derivadas $\partial_\mu A_\nu$, e onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

5. Considere um volume Ω com borda $\partial\Omega$, e uma 2-forma $B_{\mu\nu}$. O Teorema de Stokes diz que

$$\int_{\partial\Omega} B_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \int_\Omega \left[\partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu}\right]\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \tag{0.15}$$

Tomando $B_{\mu\nu} = \alpha\, F_{\mu\nu} + \beta\, \widetilde{F}_{\mu\nu}$, com α e β arbitrários, e utilizando as equações de Maxwell obtenha as equações integrais para a eletrodinâmica. A partir desta obtenha as quatro leis integrais da eletrodinâmica escritas em termos de $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

6. Utilizando a força de Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \tag{0.16}$$

e a equação de Newton, determine a trajetória de uma partícula carregada na presença de um campo magnético constante na direção z, i.e $\vec{B} = B_0\, \vec{e}_z$.

7. Utilizando o princípio de gauge ou acoplamento minimal, resolva a equação de Schrödinger (não relativística) para uma partícula carregada sem spin na presença de um campo magnético constante na direção z, i.e $\vec{B} = B_0\, \vec{e}_z$.

8. Mostre que a equação de Schrödinger (não relativística) para uma partícula de carga q, sem spin acoplada minimamente ao campo eletromagnético é invariante pelas transformações locais de gauge dadas por

$$\psi \rightarrow e^{i\, q\, \alpha/\hbar}\, \psi \; ; \qquad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha \tag{0.17}$$

9. Suponha que a menor carga elétrica no Universo seja a carga do elétron. A partir da condição de quantização de Dirac evolvendo cargas elétricas e magnéticas, determine o menor valor de carga magnética permitido pelo argumento de Dirac. Determine a razão do módulos das forças estáticas (Coulombianas) entre dois elétrons e dois monopolos magnéticos de carga mínima, separados por uma mesma distância.

10. Utilizando o fato que o tensor dos campos nas teorias de Yang-Mills é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i\,e\,[\,A_\mu\,,\,A_\nu\,]$$

mostre que ele satisfaz automaticamente (para qualquer A_μ) a identidade de Bianchi

$$D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} + D_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

onde $D_\mu = \partial_\mu * + i\,e\,[\,A_\mu\,,\,*\,]$.

11. Determine as equações de Euler-Lagrange para os campos A_μ, ψ e ϕ, associadas à Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \left(D_\mu\bar{\psi}\right)\gamma^\mu\,\psi\right] + \left(D_\mu\phi\right)^\dagger\,D^\mu\phi$$

onde ψ e ϕ são multipletos do grupo de gauge, transformando por representações R_1 e R_2, , de dimensões d_1 e d_2, respectivamente, e onde $D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + i\,e\,R_1\left(A_\mu\right)\,\psi$ e $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + i\,e\,R_2\left(A_\mu\right)\,\phi$.

12. Moste que a configuração de campos, de uma teoria de Yang-Mills $SU(2)$,

$$A_\mu = -\frac{2}{e}\,\sigma_{\mu\nu}\,\frac{x^\nu - a^\nu}{\left(x^\rho - a^\rho\right)^2 + \lambda^2}$$

onde

$$\sigma_{i\,4} = -\kappa\,T_i \qquad \sigma_{ij} = \varepsilon_{ijk}\,T_k \qquad [\,T_i\,,\,T_j\,] = i\,\varepsilon_{ijk}\,T_k$$

satisfaz a equação de auto-dualidade

$$F_{\mu\nu} = \kappa\,\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\rho\sigma}$$

no espaço Euclideano, e onde $\kappa = \pm 1$.