Instituto de Física de São Carlos - IFSC/USP

Instituto de Física de São Carlos
IFSC-USP
Av. Trabalhador São Carlense 400
São Carlos 13560-970, Brasil

Phone: 55 16 3373 8075
Fax: 55 16 3373 9827
Internet: laf@ifsc.usp.br
Home page: http://www.ifsc.usp.br/

Ementa do Curso: **Teorias de gauge não abelianas e sólitons**

Segundo Semestre de 2008

Luiz Agostinho Ferreira

1. Introdução à teorias de gauge
2. Teorias de gauge não abelianas
3. O setor auto-dual - instantons
4. Quebra espontânea de simetria
5. Teorema de Goldstone
6. Mecanismo de Higgs: *little group* e fórmula de massas
7. Soluções clássicas: Monopolos magnéticos, dyons e vórtices
8. Equação de Bogomolny e monopolos BPS
9. Sólitons e dualidade eletromagnética
10. Teorias de gauge supersimétricas

Referências

1. Abers, E. and Lee, B. *Physics Reports* **9** (1973) 1.
2. Actor, A.; *Classical solutions of Yang-Mills theories*; *Rev. Mod. Phys.* **51** (3) 461-526.
3. Goddard, P. and Olive, D.; *Rep. Prog. Phys.* **41** (1978) 1357-1437.
4. ItzyksonC. and Zuber, J.B.; *Quantum Filed Theory* McGraw-Hill.
5. Ferreira, L.A.; *Exact Electromagnetic Duality I*; Proceedings of the IX Jorge André Swieca Summer School - Campos do Jordão (1997), pag. 133-165; eds. J.C.A. Barata, A.P.C. Malbouisson and S.F. Novaes; World Scientific
6. Ferreira,L.A.; *Lecture notes on Lie algebras and Lie groups*, Notas Internas IFT-NI-002/2000.
7. Kneipp, M.A.C.; *Introduction to dualities in gauge theories*; Proceedings of the X Jorge André Swieca Summer School - Campos do Jordão (1999); pag. 291-317; eds. J.C.A. Barata, M. Begalli and R. Rosenfeld; World Scientific
8. Leite Lopes, J.; *Gauge Field Theories: An Introduction*; Pergamon, 1981
9. Olive, D.; *Lectures on Exact Electromagnetic Duality II*; Proceedings of the IX Jorge André Swieca Summer School - Campos do Jordão (1997); pag. 166-195; eds. J.C.A. Barata, A.P.C. Malbouisson and S.F. Novaes; World Scientific
10. Olive, D.; *Lectures notes on gauge theories amd Lie algebras: with some applications to spontaneous symmetry breaking and integrable dynamical systems*, University of Virginia preprint (1982).
11. O'Raifeartaigh, L.; *Group structure of gauge theories*; Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press 1986
12. O'Raifeartaigh, L.; *The Dawning of gauge theory*; Princeton series in Physics; Princeton Univerty Press (1997).
13. Taylor, J.C.; *Gauge Theories of Weak and Electromagnetic Interactions*; Cambridge University Press (1976)

O eletromagnetismo como uma teoria de gauge do U(1)

Neste curso nós damos uma introdução às teorias de gauge. Acredita-se atualmente que todas as interações da natureza são descritas por tais teorias.

Vamos então iniciar nossa discussão pela interação que [illegible] [illegible] melhor conhecemos que é a interação eletromagnética. Através dela pretendemos introduzir o princípio de gauge.

Sabemos que os campos elétrico e magnético satisfazem as equações de Maxwell. No vácuo e em unidades Gaussianas estas equações são dadas por

$$\text{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\text{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \qquad (3)$$

$$\text{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho \qquad (4)$$

onde ρ e $\vec{J}$ são as densidades de carga e corrente respectivamente. Elas satisfazem a equação de continuidade,

$$\text{div}\,\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (5)$$

Para verificá-la tome o divergente de (3) . ...

A eq (2) é válida na ausência de monopolos magnéticos (se é que tais objetos existam). Ela sugere que o campo magnético pode ser escrito como o ~~rotatio~~ rotacional de um potencial vetor

$$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} \qquad (6)$$

pois para qualquer campo vetorial $\vec{v}$ temos

$$\text{div rot}\,\vec{v} = 0$$

devido ao fato que $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ (isto é válido na ausência de singularidades)

A equação (1) fica então:

$$\text{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\vec{A} = \text{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Isto sugere que $\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ seja o gradiente de uma função escalar, ~~ou seja~~

~~$\vec{E} = -\text{grad}\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$~~

pois $\text{rot grad}\,\phi = 0$ para qualquer função ϕ (não singular)

Temos então que:

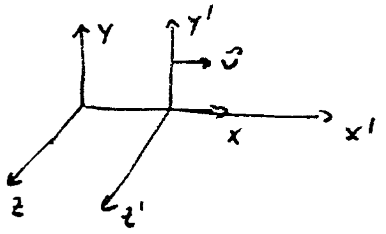
$$\vec{E} = -\,\text{grad}\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (7)$$

onde ϕ é um potencial escalar.

Vemos então que escrevendo $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em termos dos potenciais ϕ e $\hat{A}$ as duas primeiras equações de Maxwell são automaticamente satisfeitas. Estas equações têm portanto um caráter geométrico e não dinâmico. (Elas são identidades).

Sabemos que as equações de Maxwell são invariantes ~~por~~ pelas transformações de Lorentz. Seria portanto interessante escrever estas equações numa forma em que esta invariança seja manifesta. Precisamos tratar tempo e espaço da mesma forma e precisamos portanto trabalhar com quadrivetores.

Para um boost



os campos elétrico e magnético se transformam como:

$$E_x = E'_x \quad , \quad E_Y = \gamma\left(E'_Y + \beta B'_z\right) \quad , \quad E_z = \gamma\left(E'_z - \beta B'_Y\right)$$

$$B_x = B'_x \quad , \quad B_Y = \gamma\left(B'_Y - \beta E'_z\right) \quad \quad B_z = \gamma\left(B'_z + \beta E'_Y\right) \tag{8}$$

onde $\beta = \frac{v}{c}$ $\quad \gamma = (1 \mp \beta^2)^{-1/2}$

Portanto os campos E e B se misturam.

Eles são na verdade componentes de um quadri-tensor de rank 2 e antisimétrico.

Na forma matricial:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

ou:

$$F^{0i} = -F^{i0} = -E_i \quad , \quad F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B_k \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$F^{\mu\nu}$ é antissimétrico ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$) e se transforma como um tensor sob as transformações de Lorentz.

Os potenciais ϕ e $\vec{A}$ são componentes de um quadrivetor:

$$A_\mu = (\phi, -\vec{A}) \qquad (10)$$

que é o quadripotencial.

Em termos deste potencial as equações (6) e (7) podem ser escritas como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (11)$$

(Exercício: verifique isto)

$$F_{0i} = -F^{0i} = E_i = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}$$

como $x^0 = ct$, $A_0 = \phi$

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0$$

Como $(\mathrm{rot}\,\vec{v})_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,(\partial^j V^k - \partial^k V^j)$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

então $B_i = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\left(\partial^j A^k - \partial^k A^j\right)$

e daí $F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B_k = \frac{1}{2}\underbrace{\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{klm}}_{\delta^i_l\,\delta^j_m - \delta^i_m\,\delta^j_l}\left(\partial^l A^m - \partial^m A^l\right)$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

As duas primeiras equações de Maxwell (11) e (12) em termos do tensor dos campos pode ser escrita como:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

(12)

que é a chamada identidade de Bianchi.

Em 4 dimensões ela pode ser escrita ~~em~~ de uma forma mais compacta definindo o tensor dual a $F_{\mu\nu}$:

$$^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

(13)

que corresponde à troca $\vec{E} \to \vec{B}$ e $\vec{B} \to -\vec{E}$

Daí

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0$$

(14)

(<u>Exercício</u>: verifique isto)

Note a eq (12) é automaticamente satisfeita quando substituimos a expressão de $F_{\mu\nu}$ dada por (11) nela. Ou seja (12) nada mais é do que uma identidade.

Como $\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{jkl} = 2\,\delta^{i}_{j}$

temos

$$\varepsilon_{ijk}F^{jk} = -\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon^{jkl}B_l = -2B_i \Rightarrow B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}$$

Daí

$$\mathrm{div}\,\vec{B}=0 \Rightarrow \partial^i B_i = 0 \Rightarrow \varepsilon_{ijk}\,\partial^i F^{jk} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\partial^j E^k - \partial^k E^j\right) - \frac{1}{c}\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial F^{jk}}{\partial t} = 0$$

Daí

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left\{\partial^j F^{0k} \underbrace{- \partial^k F^{0j}}_{\partial^k F^{j0}} - \partial_0 F^{jk}\right\} = 0$$

Multiplica por ε^{lmi} temos $\varepsilon^{lmi}\varepsilon_{ijk} = \delta^l_j\,\delta^m_k - \delta^l_k\,\delta^m_j$

e daí

$$\partial^l F^{m0} + \partial^m F^{0l} + \partial^0 F^{lm} = 0$$

As outras duas eqs de Maxwell (3 e 4) podem ser escritas na forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{15}$$

onde j^ν é a quadri-corrente $j^\nu = 4\pi\left(\rho, \frac{1}{c}\vec{j}\right)$

(Exercício: verifique isto)

Note que de (15) temos $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu = 0$ (eq. da continuidade)

A eq (15) ao contrário da eq (14) ou (12) não é uma identidade. Ela fornece a dinâmica do campo eletromagnético em interação com cargas e correntes.

Ela pode ser obtida através do Princípio de mínima ação da ação:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu\right) \tag{16}$$

Fazendo a variação de S em relação a A_μ temos:

$$\delta S = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - \delta A_\mu j^\mu\right)$$

e

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \qquad \partial^i E_i = 4\pi\rho = -\partial_i F^{0i}$$

$$\Rightarrow \qquad \partial_i F^{i0} = j^0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \Longrightarrow$$ ~~$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\partial^j B^k - \partial^k B^j) - \frac{\partial E_i}{\partial x^0} = j^i$~~

$$\Rightarrow \qquad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}(\partial_j B_k - \partial_k B_j) + \frac{\partial F^{0i}}{\partial x^0} = j^i$$

$$\frac{1}{4}\Big(\underbrace{\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{klm}}_{\delta^i_l\,\delta^j_m - \delta^i_m\,\delta^j_l}\partial_j F^{lm} - \underbrace{\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{jlm}}_{\delta^i_l\,\delta^j_m - \delta^j_l\,\delta^i_m}\partial_k F^{lm}\Big) + \frac{\partial F^{0i}}{\partial x^0} = j^i$$

$$\partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = j^i \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu i} = j^i$$

Daí

$$-\frac{1}{2}\int d^4x \; F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = -\int d^4x \; F^{\mu\nu}\partial_\mu \delta A_\nu$$

integrando por partes

$$= \int d^4x \; \partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu - \int dS_\mu \; F^{\mu\nu}\delta A_\nu$$

Os extremos espaciais estão no infinito e lá os campos se anulam, nos extremos temporais a variação de δA_μ é nula.

Daí

$$\delta S = \int d^4x \left(\partial_\mu F^{\mu\nu} - J^\nu\right)\delta A_\nu$$

e daí segue a equação de movimento (15).

Notamos que sob a transformação ~~de gauge~~

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$$

onde $\alpha(x)$ é uma função arbitrária (mas bem comportada) o tensor dos campos $F_{\mu\nu}$ se mantém invariante. Do mesmo modo as eqs de Maxwell se mantêm invariantes., desde que $J_\mu \to J$

Estas transformações são chamadas <u>transf. de calibre ou gauge</u>.

A invariança da eletrodinâmica clássica sob estas transfs, significa que os processos físicos dependem somente de $F_{\mu\nu}$.

No entanto, classicamente a importância destas transformações param por aí.

É na mecânica quântica que elas têm uma importância fundamental.

Note que a ação (16) não é invariante de gauge:

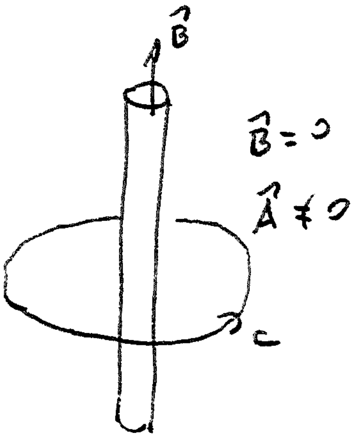
$$S \to S - \int d^4x \, \partial_\mu \alpha \, J^\mu = S + \int d^4x \, \alpha \, \partial_\mu J^\mu - \int dS_\mu \, \alpha J^\mu$$

A simetria de gauge na mecânica quântica

No eletromagnetismo clássico as quantidades que tem significado físico são os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Os potenciais ϕ e $\vec{A}$ são apenas campos auxiliares

No entanto na mecânica quântica o mesmo não ocorre. Os campos ϕ e $\vec{A}$ passam a ter significado físico.

Considere um solenóide infinito



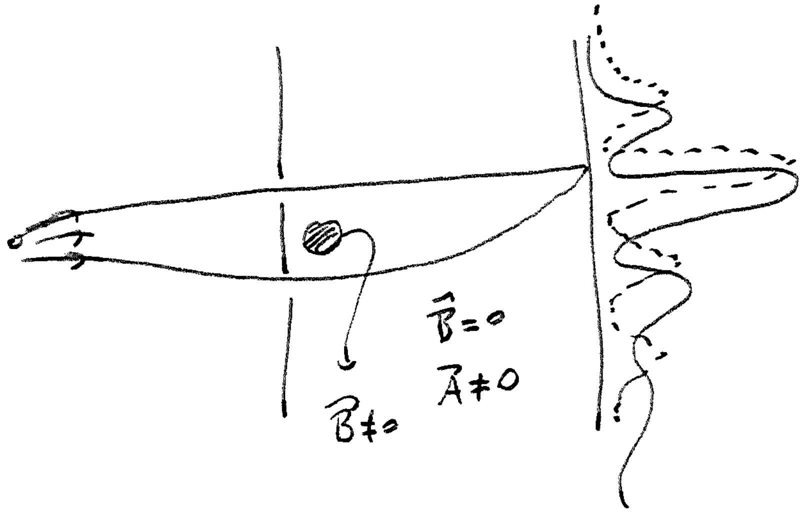
Note que no circuito c

$$\oint_c \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_\Sigma (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{\Sigma} = \int_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{\Sigma} = \text{fluxo magnético}$$

Onde Σ é uma superfície com borda C.

Como o fluxo é diferente de zero temos que ter $\vec{A}\neq 0$ fora do cilindro, apesar de ali $\vec{B}$ ser nulo.

Considere agora o famoso experimento proposto por Bohm e Aharonov em 1956 onde temos a difração de elétrons com um solenóide



A figura de difração sofre um deslocamento proporcional ao fluxo do campo magnético.

Na verdade a interação com o campo magnético de uma partícula de carga q pode ser expressa de maneira simples:

Suponha que $\langle b|a\rangle_0$ seja a amplitude de transições para ela ir de a até b livremente pela trajetória c. Então a amplitude na presença de $\vec{B}$ é:

$$\langle b|a\rangle_B = \langle b|a\rangle_0 \, e^{\frac{q}{\hbar}\int_c \vec{A}\cdot d\vec{s}}$$

No caso de um campo elétrico estático temos que a amplitude de transição de um tempo t_0 até t é modificada por

$$\langle t|t_0\rangle_E = \langle t|t_0\rangle\, e^{-\frac{q}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\phi\, dt}$$

Na verdade para um campo eletromagnético genérico A_μ temos que a amplitude de transição de um ponto (a,t_0) até outro (b,t) através de uma trajetória T no espaço tempo é:

$$\langle b,t|a,t_0\rangle_A = \langle b,t|a,t_0\rangle\, e^{-\frac{q}{\hbar}\int_T A_\mu \cdot dx^\mu}$$

Este é o <u>princípio de gauge</u>.

Toda informação sobre a interação eletromagnética na MQ está contida neste princípio

<u>Ver</u>: Lectures on Physics, Feynman
Vol II 15-5

Na verdade, este princípio não surgiu de repente. Ele evoluiu de maneira interessante, e talvez o primeiro a propô-lo foi H. Weyl em 1929

Veja – O'Raifeartaigh
The Dawning of Gauge Theory.

– H. Weyl
Zeit. f. Physik 330 (1929) 56 (Electron and gravitation)

– P. A. M. Dirac
Proc. Royal Soc. London A 133 (1931)
Quantised Singularities in the Electromagnetic Field.

Mas talvez a melhor referência para isto seja a de Dirac dada acima. :

A descrição quântica da interação eletromagnética pode ser expressa da seguinte maneira:

- O efeito da interação é mudar a fase da função de onda em cada ponto do espaço

$$\psi = \psi_1 e^{i\beta}$$

- A mudança de fase em cada ponto não tem um valor bem definido. Somente a diferença de fase entre dois pontos muitos próximos é determinado unicamente.

- Para pontos distantes existe uma diferença de fase somente relativo a uma dada curva ligando estes pontos. A diferença de fase é diferente para curvas diferentes.

- A fase é não integrável

- A mudança de fase ao redor de uma curva fechada deve ser a mesma para todas as funções de onda do sistema (partícula) $\Longrightarrow$ Ver (13.a)

Portanto β não é uma função de x^μ mas sim deve ter derivadas bem definidas em cada ponto, ou seja

$\vec{K} = \vec{\partial}\beta$ é bem definido em cada ponto

- Note que $\partial_x K_y \neq \partial_y K_x$

A mudança de fase em uma curva fechada é:

$$\oint_C K_\mu dx^\mu = \int_\Sigma \text{rot}\, K \, d\Sigma$$

Nota que a fase não integrável não causa problemas na densidade de probabilidade

$$|\psi|^2$$

pois $|\psi|^2$ não depende da fase.

Considere agora a quantidade

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int d^3x \; \phi^*\psi$$

O modulo quadrado $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ tem um significado que é quanto de um estado está no outro, ou seja a probabilidade de concordância dos estados.

Para que $\langle\phi|\psi\rangle$ tenha um modulo bem definido é preciso que o integrando tenha uma diferença de fase entre quaisquer dois pontos, bem definida.

Logo a diferença de fase de $\phi^*\psi$ ao longo de uma curva fechada deve ser nula.

Daí segue a condição de que a diferença de fase ao longo de uma curva fechada deve ser a mesma para qualquer função de onda do sistema.

- Tudo consistente com o princípio de superposição. Se ψ e ψ' tem a mesma mudança de fase em uma curva fechada então $a\psi + b\psi'$ também tem.

- Temos que:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi = e^{i\beta}\left(-i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \hbar K_x\right)\psi_1$$

Logo se ψ_1 satisfaz uma eq de onda p envolvendo operadores de momento $\vec{p} = -i\hbar\vec{\partial}$ e energia $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = E$ então ψ_0 satisfaz a mesma equação com a troca

$$\vec{p} \to \hat{p} - \hbar\vec{K}$$

$$E \to E + \hbar K_0$$

Na verdade

$$\vec{A} \equiv \frac{\hbar c}{q}\vec{K} \qquad A_0 \equiv \phi = -\hbar q K_0$$

~~The~~ Temos então que

$$\psi_{int} = \psi_{free}\, e^{-\frac{iq}{\hbar c}\int_c A_\mu dx^\mu}$$

onde C é um contorno iniciando em um ponto de referência x_0 e terminando em x (onde ψ_{int} é avaliado, Como ψ_{tran} tem a fase bem definida em qualquer ponto segue que a mudança de fase ao longo de uma curva fechada é dada pelo teorema de Stokes:

$$\frac{q}{\hbar c}\oint_C dx^\mu A_\mu = \frac{q}{\hbar c}\int_\Sigma d\Sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

C é a borda da Σ.

Mudança de fase é determinada pelo campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ ou seja $\vec{E}$ ou $\vec{B}$.
(a mesma mudança de fase para todas as funções de onda da partícula)

- Nota que o famoso acoplamento minimal segue disto:

$$\partial_\mu \to \partial_\mu \mp \frac{q}{c} A_\mu$$

- Nota que a mudança de fase não depende do gauge

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$$

$$\oint A_\mu dx^\mu \to \oint A_\mu dx^\mu + \oint \partial_\mu \alpha\, dx^\mu$$

$$\Vert$$

$$\int (\partial_\mu \partial_\nu \alpha - \partial_\nu \partial_\mu \alpha)\, d\Sigma^{\mu\nu} = 0$$

Variação de fase:

$$e^{-i\frac{q}{\hbar}\int_a^{s+dx} A_\mu dx^\mu} - e^{-i q/\hbar \int_a^{s} A_\mu dx^\mu} =$$

$$= e^{-i\frac{q}{\hbar}\left(\int_a^{s} A_\mu dx^\mu - A_x dx\right)} - e^{-i q/\hbar \int_a^{s} A_\mu dx^\mu}$$

$$= e^{-i q/\hbar \int_a^{s} A_\mu dx^\mu} \left[e^{i q/\hbar A_x dx} - 1 \right)$$

$$= i\frac{q}{\hbar} A_x dx \quad e^{-i q/\hbar \int_a^{s} A_\mu dx^\mu}$$

Portanto:

$$\left(\frac{\hbar}{i}\partial_x - qA_x\right)\psi_A = \left(\frac{\hbar}{i}\partial_x - qA_x\right)\psi_{A=0} \, e^{-i q/\hbar \int_a^{s} A_\mu dx^\mu}$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i}\partial_x\psi_{A=0} - \cancel{qA_x\psi_{A=0}} + \frac{\cancel{\hbar}}{\cancel{i}}\cancel{i}\frac{q}{\cancel{\hbar}}\cancel{A_x\psi_{A=0}}\right) e^{-i q/\hbar \int_a^{s} A_\mu dx^\mu}$$

$$= e^{-i q/\hbar \int_a^{s} A_\mu dx^\mu} \frac{\hbar}{i}\partial_x\psi_{A=0}$$

Eq. de Schrodinger p/ $\psi_{A=0}$ livre implica eq. de Sch. com interação para ψ_A.

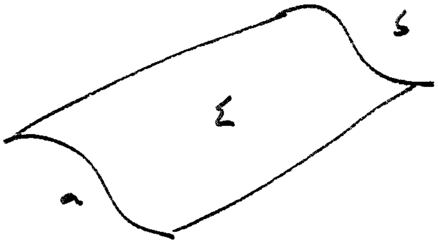
Extensões de teorias de gauge

Kalb & Ramond (PRD 9 (74) 2273),

Y. Nambu Phys. Rep 23 (76) 250 - 253

As idéias relacionadas ao princípio de gauge no eletromagnetismo podem ser extendidas para objetos que não são partículas mas sim cordas, membranas, etc.

Suponha que $\langle b|a\rangle_0$ seja a amplitude de transição ~~de~~ para que uma corda vá de uma configuração a para b através de uma superfície Σ



Então na presença de um potencial $A_{\mu\nu}$ teremos

$$\langle b|a\rangle = \langle b|a\rangle_0 \, e^{i\frac{g}{\hbar}\int_\Sigma A_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu}$$

De maneira análoga uma membrana seria

$$\langle b|a\rangle = \langle b|a\rangle_0 \; e^{i\frac{2}{\hbar}\int_{\text{Volume}} A_{\mu\nu\rho}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho}$$

Ou seja podemos introduzir acoplamento minimal entre objetos de dimensão d com tensores antisimétricos de rank d+1.

A ~~invariância~~ transformação de gauge seria

$$A_{\mu\nu} \to A_{\mu\nu} + \partial_\mu \alpha_\nu - \partial_\nu \alpha_\mu$$

$$A_{\mu\nu\rho} \to A_{\mu\nu\rho} + \partial_\mu \alpha_{\nu\rho} + \partial_\rho \alpha_{\mu\nu} + \partial_\nu \alpha_{\rho\mu}$$

$$\vdots$$

$$\underset{\text{d+1 forma}}{\underset{\uparrow}{A}} \to A + d\underset{\text{d-forma.}}{\underset{\uparrow}{\alpha}}$$

Os tensores de campo seriam :

$$F_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu A_{\nu\rho} + \partial_\rho A_{\mu\nu} + \partial_\nu A_{\rho\mu}$$

$$F_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_\mu A_{\nu\rho\sigma} + \text{permutações antisimétricas}$$

ou seja

$$F = d A$$

2 Duality in Maxwell's theory of electromagnetism

The classical theory of electromagnetism is perhaps one of the most beautiful physical theories known. It presents a high level of symmetries and seems to be "designed" to live in four dimensional space-time. It is described by Maxwell's equations, which in the absence of charges and currents, are given in terms of the antisymmetric field tensor $F^{\mu\nu}$ as[1]

$$\partial_\mu \, F^{\mu\nu} = 0 \, , \qquad \partial_\mu \, \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{2.1}$$

where $\tilde{F}_{\mu\nu}$ is the dual of $F_{\mu\nu}$, i.e.

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, F^{\rho\sigma} \tag{2.2}$$

The first set of equations are the Euler-Lagrange equations obtained from Mawxell's Lagrangean

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

where the variational calculus is with respect to a vector potential A_μ, from which the field tensor is derived

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \, A_\nu - \partial_\nu \, A_\mu \tag{2.4}$$

As a consequence of (2.4) and (2.2), the second set of Maxwell's equations are trivially satisfied and are the so-called Bianchi identities.

The eletric and magnetic fields are related to the field tensor $F^{\mu\nu}$ by

$$E^i \equiv F^{0i} \, , \qquad B^i \equiv \frac{1}{2} \, \epsilon^{ijk} \, F_{jk} \tag{2.5}$$

or equivalently

$$B^i \equiv \tilde{F}^{0i} \, , \qquad E^i \equiv -\frac{1}{2} \, \epsilon^{ijk} \, \tilde{F}_{jk} \tag{2.6}$$

The Maxwell's equations (2.1) are conformally invariant, and their versions in dimensions other than four are just Poincaré invariant. However, one of the most impressive symmetries is the duality transformation. It is valid only in four dimensions because it interchanges the field tensor and its dual, and only in that dimension they have the same rank. Writing (2.1) in complex notation

$$\partial_\mu \, \left(F^{\mu\nu} + i \, \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = 0 \tag{2.7}$$

one sees it is clearly invariant under the duality transformation [17]

$$\left(F^{\mu\nu} + i \, \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \rightarrow e^{i\theta} \, \left(F^{\mu\nu} + i \, \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \tag{2.8}$$

with θ being a real constant. In terms of the eletric and magnetic fields it becomes

$$\left(E^i + i \, B^i \right) \rightarrow e^{i\theta} \, \left(E^i + i \, B^i \right) \tag{2.9}$$

---

[1] We take the signature of the Minkowski metric as $(+,-,-,-)$, and use greek letters $\mu, \nu, \ldots = 0,1,2,3$ to label space-time indices, and english letters $i, j, k \ldots = 1,2,3$ to label space indices.

The density of energy

$$\frac{1}{2} \mid F^{0i} + i\tilde{F}^{0i} \mid^2 = \frac{1}{4} \mid F^{ij} + i\tilde{F}^{ij} \mid^2 = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right) \tag{2.10}$$

and the density of momentum

$$-\frac{1}{2}\left(F^{0i} + i\tilde{F}^{0i}\right)\left(F_{ij} + i\tilde{F}_{ij}\right)^* = E \wedge B \tag{2.11}$$

are invariant under (2.8).

The Lagrangean (2.3) on the other hand, is invariant under (2.8) only for $\theta = \pi$. However, it is worth noticing that the Lagrangean is the real part of the complex quantity[2]

$$\frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu} + i\tilde{F}^{\mu\nu}\right)^2 = F^2_{\mu\nu} + iF^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

and its imaginary part is a total derivative, i.e.

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 2\partial_\mu W^\mu = 12E^iB_i \tag{2.13}$$

where

$$W^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma \tag{2.14}$$

Therefore, it is right to say that the Lagrangean and the topological term (2.13) transform as a doublet of (2.8).

Notice that we could have a scale parameter in (2.8), i.e. $\lambda e^{i\theta}$ instead of just $e^{i\theta}$, that (2.7) would still be invariant. However, that would break the invariance of the energy and momentum. Notice that $\mid F^{\mu\nu} + i\,\tilde{F}^{\mu\nu} \mid^2 = 0$, and so, that is perhaps the only quadratic quantity invariant under (2.8) with the scale parameter included.

If we want the symmetry (2.8) to hold true in the presence of matter we encounter serious difficulties. We could naively add two types of currents to (2.7) as

$$\partial_\mu\left(F^{\mu\nu} + i\,\tilde{F}^{\mu\nu}\right) = j^\nu + i\tilde{j}^\nu \tag{2.15}$$

and impose that they transform under (2.8) as

$$\left(j^\nu + i\tilde{j}^\nu\right) \rightarrow e^{i\theta}\left(j^\nu + i\tilde{j}^\nu\right) \tag{2.16}$$

Since $\tilde{j}^\nu$ becomes a source for $\tilde{F}^{\mu\nu}$ we can not derive the field tensor from a vector potential as in (2.4). That is fine at the classical level, since all physical quantities are described in terms of the field tensor. However, at the quantum level the vector potential acquires physical importance and the implementations of such ideas, as we describe in the next section, becomes very subtle. But the great restrictions come from the experimental side. The charges associated to the currents $\tilde{j}^\nu$ are static sources for the magnetic field, and so far no experimental support has appeared for their existence.

---

[2] Remember that $F^2_{\mu\nu} = -\tilde{F}^2_{\mu\nu}$, since $\epsilon^{\mu\nu\lambda\delta}\,\epsilon_{\rho\sigma\lambda\delta} = -2\left(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho\right)$

A quantização de Dirac da carga elétrica

É possível acrescentar novos ingredientes à fase da função de onda sem incorrer em inconsistências.

- A mudança de fase ao longo de uma curva fechada pode ser diferente para funções de onda diferentes por um múltiplo de 2π.
- Esta diferença não precisa ser interpretada em termos do campo eletromagnético.
- Para um loop pequeno a mudança de fase deve ser pequena (continuidade da função de onda)
- Se ψ é nulo sua fase é indeterminada
- ψ é complexo. $\psi = 0 \rightarrow$ duas condições
  em 3d isto dá uma linha. (linha nodal)
- Para um loop pequeno que engloba a linha nodal a mudança de fase não precisa ser pequena.

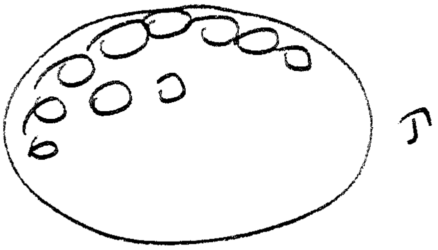
- O valor deve ser próximo de $2\pi n$ e n é característico da linha nodal

- a diferença entre a mudança de fase e $2\pi n$ é o que deve ser interpretado ~~entre~~ em termos ~~[illegible]~~. do fluxo eletromagnético.

- Logo a mudança de fase em um loop pequeno é

$$2\pi n + \frac{q}{\hbar c}\int_{loop} ds^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

- Os loops grandes podem ser divididos em loops pequenos



- Se Γ não tem direção temporal a mudança de fase é:

$$2\pi \sum n + \frac{q}{\hbar c}\int_S ds_i B^i$$

- Contraindo Γ a um ponto, S torna-se uma superfície fechada. E daí a mudança de fase deve ser nula. Logo

$$2\pi \sum n = -\frac{q}{\hbar c}\int ds_i B_i$$

isto deve ser o mesmo para todas as funções de onda

Logo este termo também deve ser o mesmo para todas as funções de onda

Se $2\pi \sum n = 0$ não há problema pois

- se ψ não tem linha nodal é zero mesmo
- se ψ tem linha nodal é zero se a linha atravessa a superfície 2 vezes

Se $2\pi \sum n \neq 0 \rightarrow$ linha nodal termina dentro de S

Como $2\pi\Sigma n$ é o mesmo ~~q~~ para todas as funções de onda segue que:

fim da linha nodal deve ser a mesma p/ todos ψ's

Portanto fim da linha nodal deve ser singularidades no campo eletromagnético.

Toma pequena superfície englobando o fim da linha nodal. O fluxo magnético é

$$\int ds^i B_i = 2\pi n \frac{\hbar c}{q}$$

Logo deve ter ali uma carga magnética g tal que

$$B = \frac{g}{4\pi r^2}$$

$$\cancel{B = \frac{g}{4\pi r^2}} \rightarrow \int ds^i B_i = g$$

Logo:

$$\cancel{qg = 2\pi n \hbar c} \qquad qg = 2\pi n \hbar c$$

Existência de g compatível com M.Q. desde que quantizado

4 Dirac-Schwinger-Zwanziger-Saha quantization condition

The quantization condition we derived in the previous section applies to particles that carry either electric or magnetic charges, but not both. The generalization of Dirac's quantization condition to dyons, i.e. particles carrying both electric and magnetic charges, was performed by Schwinger [19] and Zwanziger [20]. Here we give a derivation of it based on the ideas of Saha [21] which uses the quantization of the angular momentum. Although not very rigorous, the argument is quite suggestive.

Consider the non relavistic motion of a particle of mass m, electric charge e_1 and magnetic charge g_1 around a stationary body of electric charge e_2 and magnetic charge g_2. The equations of motion are

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e_1\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{B}\right) + g_1\left(\vec{B} - \frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{E}\right) \tag{4.1}$$

The electric and magnetic fields of the stationary body are

$$\vec{E} = \frac{e_2}{4\pi r^2}\hat{r} \qquad \vec{B} = \frac{g_2}{4\pi r^2}\hat{r} \tag{4.2}$$

Substituting into (4.1) one gets

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{(e_1e_2 + g_1g_2)}{4\pi}\frac{\hat{r}}{r^2} + \frac{(e_1g_2 - g_1e_2)}{4\pi}\frac{1}{c}\vec{v}\wedge\frac{\hat{r}}{r^2} \tag{4.3}$$

Notice that the angular momentum of the particle is not conserved

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r}\wedge\vec{v}) = m\vec{r}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{(e_1g_2 - g_1e_2)}{4\pi}\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{4.4}$$

Vuje vuz

The quantity

$$\vec{J} \equiv m\vec{r}\wedge\vec{v} - \frac{(e_1g_2 - g_1e_2)}{4\pi c}\hat{r} \tag{4.5}$$

is conserved

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \tag{4.6}$$

We can interpret the second term on the r.h.s. of (4.5) as the angular momentum of the electromagnetic field.

When we quantize the component of $\vec{J}$ along $\vec{r}$, i.e. $\hat{r}\cdot\vec{J}$, we get that it should be a multiple of $\frac{\hbar}{2}$. Therefore we get

$$e_1g_2 - g_1e_2 = 2\pi n\hbar c \tag{4.7}$$

J. Schwinger Science 165 (69) 757–761

D. Zwanziger Phys. Rev. 176 (68) 1489–1495

M.N. Saha Ind. J. Phys. 10 (1936) 145
Phys. Rev 75 (1949) 1968
hep-th/93 03312

5 Yang's relationship between the quantization of the electric charge and compactness of the gauge group

In 1970 C.N. Yang [22] called attention to the fact that the quantization of the electric charge and the compactness of the gauge group are intimately related. Consider a global gauge transformation of charged fields ψ_j of charge e_j

$e^{i\hat{Q}\alpha}$

$$\psi_j \rightarrow \psi_j' = e^{ie_j\alpha}\psi_j \tag{5.1}$$

Notice that if the charges e_j's are not commensurate with each other, then there is not two real values of the parameter α, let us say α_1 and α_2, such that the corresponding transformations are the same for all fields. Indeed, for that to happen for the charges e_j and e_k for instance, one needs

$$ie_j\alpha_1 = ie_j\alpha_2 + 2\pi in \qquad ie_k\alpha_1 = ie_k\alpha_2 + 2\pi im \tag{5.2}$$

and so

$$\frac{e_j}{e_k} = \frac{n}{m} \tag{5.3}$$

Therefore, the group with elements $e^{i\alpha Q}$ is not compact, since its elements are different for all real values of α.

On the other hand, if the charges e_j's are all integral multiples of a universal unit charge e, then for any two values of α differing by a multiple of $\frac{2\pi}{e}$, the transformation (5.1) is the same for all fields. Consequently, the gauge group is compact since α should now be taken in the interval between 0 and $\frac{2\pi}{e}$.

If one finds a good physical reason for the compactness of the electromagnetic gauge group then the quantization of the electric charge would be implied, without assuming the existence of magnetic monopoles. In the case of non abelian gauge theories (not in electromagnetism) the non compactness of the gauge group implies that the classical energy is not bounded below. In the Weinberg-Salam model the gauge group is non abelian, namely $SU(2) \otimes U(1)_Y$. The electromagnetic gauge group $U(1)_{\text{e.m.}}$ is generated by a linear combination of the hypercharge Y and the generator T_3 of $SU(2)$. So, the compactness of $U(1)_{\text{e.m.}}$ relies on the compactness of $U(1)_Y$, and so it is not established. The compactness of $U(1)_{\text{e.m.}}$ could be achieved in models of grand unification with semisimple gauge groups (without $U(1)$ factors). However, the theories of that type of physical interest all have a pattern of symmetry breaking that implies the existence of 't Hooft-Polyakov type monopoles. So, the quantization of the electric charge and monopoles are still going together.

C. N. Yang Phys. Rev D8 (1970) 2360

$e_j(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\pi n$

$e_k(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\pi m$

Notamos que sob a transformação

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \qquad (17)$$

$F_{\mu\nu}$ se mantém invariante, assim como as eqs de Maxwell. (desde que $J^\mu \to J^\mu$)

Estas transformações são ditas transformações de gauge.

~~Eletrodinâmica clássica~~ A invariança da eletrodinâmica clássica sob estas transformações, significa que os processos físicos dependem somente de $F_{\mu\nu}$.

No entanto, classicamente a importância destas transformações param por aí. Nós não obtemos o conceito de grupo de gauge.

Quanticamente o significado da invariância de gauge é que os processos físicos não dependem da fase da função de onda num dado ponto do espaço.

Para ilustrar isso vamos considerar o caso de uma partícula ~~clássica~~. ~~livre~~ interagindo com o campo eletromagnético.

hamiltoniana clássica é (p/ partícula livre)

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} \qquad (18)$$

onde $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$

A interação com o campo eletromagnético é introduzida pelo princípio de acoplamento minimal.

$$\begin{aligned} H &\to H - q\phi \\ \vec{p} &\to \vec{p} - q\vec{A} \end{aligned} \qquad q \text{ - carga elétrica} \qquad (19)$$

(Vide Landau p/ maiores detalhes)

Então obtemos

$$\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-q\vec{A}\right)^2 = H - q\phi \qquad (20)$$

em notação quadrivetorial $p^\mu \to p^\mu - qA^\mu$ $\quad (p_0 \equiv H)$

Quando quantizamos o momento e coordenada satisfazem:

$$[\vec{p}_i, x_j] = -i\hbar\,\delta_{ij}$$

onde $p_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}$

(21)

e $H = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

em notação quadrivetorial $P_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}$

A interação eletromagnética é introduzida pelo princípio de acoplamento minimal

$$P_\mu \to P_\mu - qA^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} - qA_\mu$$

$$= i\hbar\left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar}A_\mu\right) \equiv i\hbar D_\mu \qquad (22)$$

Onde D_μ é a derivada covariante.

A equação de Schroedinger para uma partícula livre é

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Introduzindo o campo eletromagnético

$$-\frac{\hbar^2}{2m} D_i^2 \psi = i\hbar D_0 \psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_i + \frac{iq}{\hbar}A_i\right)^2\psi = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar}\phi\right)\psi \qquad (23)$$

Se quizermos que esta equação seja invariante por transformação de gauge é preciso que ψ transforme como.

$$\psi \to e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha(x)}\psi \qquad (24)$$

Daí

$$D_\mu\psi \to D'_\mu\psi' = \left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar}(A_\mu + \partial_\mu\alpha)\right) e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha}\psi$$

$$= e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha} D_\mu\psi \qquad (25)$$

Portanto ψ e $D_\mu\psi$ se transformam do mesmo modo

Vemos então que a interação eletromagnética é introduzida, ~~impondo que~~ da exigência que os processos físicos sejam invariantes por mudanças locais da fase da função de onda.

Este fator de fase é um elemento do grupo U(1) que é dito grupo de gauge (Lembre-se que ele não aparecia na teoria clássica)

~~O gerador do grupo~~

~~A carga de~~ O operador de carga elétrica Q é definido como o gerador do grupo $U(1)_{EM}$ no sentido que

$$e^{-i\frac{Q\alpha}{\hbar}}\psi\, e^{i\frac{Q\alpha}{\hbar}} = e^{-i\frac{q\alpha}{\hbar}}\psi \qquad (26)$$

Daí vemos que

$$[Q, \psi] = q\psi \qquad (27)$$

A comutação de duas derivadas covariantes é $F_{\mu\nu}$, pois:

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + i\frac{q}{\hbar}A_\mu , \partial_\nu + i\frac{q}{\hbar}A_\nu] =$$

$$= i\frac{q}{\hbar}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = i\frac{q}{\hbar}F_{\mu\nu}$$

~~Portanto $F_{\mu\nu}$ se t~~

Se

$$D'_\mu \psi' = e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha} D_\mu\psi$$

podemos escrever formalmente:

$$D'_\mu = e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha} D_\mu \, e^{i\frac{q}{\hbar}\alpha}$$

Daí vemos que $F_{\mu\nu}$ se transforma como:

$$i\frac{q}{\hbar}F_{\mu\nu} \to i\frac{q}{\hbar}F'_{\mu\nu} = [D'_\mu, D'_\nu]$$

$$= e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha}[D_\mu, D_\nu]\, e^{i\frac{q}{\hbar}\alpha}$$

$$= e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha}\, i\frac{q}{\hbar}F_{\mu\nu}\, e^{i\frac{q}{\hbar}\alpha}$$

$$= i\frac{q}{\hbar}F_{\mu\nu}$$

$F_{\mu\nu}$ é invariante. Isto é uma consequência do fato de U(1) ser abeliano.

Teorias de gauge não abelianas

A idéia de extender o princípio de gauge para grupos não abelianos tem uma história interessante. Alguns autores chegaram a propor a ~~idéia~~ extensão mas ~~não~~ foram Yang e Mills em 54 quem colocaram a idéia de maneira mais clara (Klein (38), etc..)

Para efeito das forças nucleares o proton e neutron são muito semelhantes. Yang e Mills propuseram então que eles formassem um dubleto de SU(2), o <u>isospin</u>.

:

De maneira geral temos o seguinte. Sejam ψ_i $i=1,\dots D$ as funções de onda de várias partículas. Colocamo-nos para transformar ~~sob~~ em uma dada representação de um ~~gr~~ grupo de Lie

$$\psi_i(x) \xrightarrow{R_{ij}(g)} R_{ij}(g)\,\psi_j(x)$$

$g \in G$ $\quad$ R representação de G

ψ_i estados da representação

Porque grupo de Lie?

Para manter a continuidade e diferenciabilidade das funções de onda.

A derivada de ψ transforma como:

$$\partial^\mu \psi \to \partial^\mu (R(g)\psi) = R(g)\,\partial^\mu \psi + \partial^\mu R(g)\,\psi$$

$$= R(g)\left(\partial^\mu \psi + R(g^{-1}\partial^\mu g)\,\psi\right)$$

Logo não se transforma como o campo ψ.

Note que $g^{-1}\partial_\mu g$ pertence à algebra de Lie

Introduzimos o campo de gauge como:

$$W_\mu = \sum_{a=1}^{\dim} W_\mu^a\, T_a$$

$T_a \equiv$ geradores da álgebra $\qquad g = e^{i\, w_a T^a}$

$$[T_a, T_b] = i\, f_{ab}^{\ c}\, T_c$$

Introduzimos a derivada covariante:

$$D^\mu \psi = \partial^\mu \psi + i e R(W^\mu)\psi$$

Daí,

$$D^\mu \psi \to D^\mu \psi' = \partial^\mu \psi' + i e R(W'^\mu)\psi'$$

$$= R(g)\left(\partial^\mu \psi + R(g^{-1}\partial^\mu g)\psi\right) +$$

$$+ i e R(W'^\mu) R(g)\psi$$

Queremos,

$$D^\mu \psi' = R(g)\, D^\mu \psi$$

Logo:

~~$g^{-1}\partial^\mu g + i e \, D(g^{-1})$~~

$$g^{-1}\partial^\mu g + i e\, g^{-1} W'_\mu g = i e W_\mu$$

ou seja

$$W'_\mu = g W_\mu g^{-1} + \frac{i}{e}\partial_\mu g\, g^{-1}$$

$\uparrow$ rep. adjunta

$\uparrow$ termo ~~inomogêneo~~ não-homogêneo (de conexão)

Temos:

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + ieW_\mu, \partial_\nu + ieW_\nu]$$

$$= ie\left(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ie[W_\mu, W_\nu]\right)$$

$$\equiv ie\,(F_{\mu\nu})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + \underset{\uparrow}{ie[W_\mu, W_\nu]}$$

diferença do caso abeliano.

Como

$$D^\mu \psi' = R(g)\, D^\mu \psi$$

$$= R(g)\, D^\mu R(g)^{-1} R(g)\, \psi$$

Tomemos a transformação de D^μ como operador

~~$D^\mu \to D(g)\, D^\mu D(g)^{-1}$~~

$$D^\mu \to g\, D^\mu g^{-1}$$

Logo

$$F'_{\mu\nu} = \frac{1}{ie}[D'_\mu, D'_\nu] = \frac{1}{ie}\, g\,[D_\mu, D_\nu]\, g^{-1} = g\, F_{\mu\nu}\, g^{-1}$$

Logo $F_{\mu\nu} \to g\, F_{\mu\nu}\, g^{-1}$ rep. adjunta

Uma "olhada" na derivada covariante

Definimos a derivada covariante como:

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i e R(W_\mu)\psi$$

Note que ψ é vetor coluna

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}$$

e $R(W_\mu)$ é uma matriz quadrada

$$R(W_\mu) = \sum_a W_\mu^a R(T_a)$$

e

$$(R(T_a), R(T_b)) = f_{ab}^{c} R(T_c)$$

Logo ψ e $\mathcal{D}_\mu \psi$ transformam pela representação R

- A definição da derivada covariante depende da representação
- O campo de gauge transforma sempre pela representação adjunta. (de maneira ñ homogenea)

$$W_\mu \to g W_\mu g^{-1} + \frac{i}{e}\partial_\mu g\, g^{-1}$$

Rep. adjunta:

Temos que:

$$g T_a g^{-1} = T_b d^{*}_{ba}(g)$$

e

$$d(g)\, d(g') = d(g\, g')$$

Escrevendo $g = 1 + \varepsilon T$

$$(1+\varepsilon T) T_a (1 - \varepsilon T) = T_b\, d^{b}_{a}(1+\varepsilon T)$$

$$T_a + \varepsilon [T, T_a] = T_a + \varepsilon T_b d^{b}_{a}(T)$$

ou seja

$$[T, T_a] = T_b\, d^{*}_{ba}(T)$$

e

$$(d(T), d(T')) = d([T, T'])$$

Como $[T_a, T_b) = i f_{ab}^{c} T_c$

$$[T_a, T_b) = T_c\, d^{*}_{cb}(T_a) \to \quad d^{*}_{cb}(T_a) \equiv i f_{ab}^{c}$$

Logo se ψ transforma pela representação adjunta

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i e\, d(W_\mu)\psi$$

temos:

$$(d(W_\mu)\psi)_a = d^{*}_{\cdot ab}(W_\mu)\psi_b$$

$$= W^c_\mu\, d^{*}_{ab}(T_c)\psi_b$$

$$= i W^c_\mu f^a_{cb}\psi_b$$

Contraindo com T_a

$$(d(W_\mu)\psi)_a T_a = i W^c_\mu \psi_b f^a_{cb} T_a$$

$$= W^c_\mu \psi_b [T_c, T_b]$$

$$= [W_\mu, T_b)\psi_b$$

Logo escrevendo

$$\psi = \psi_a T_a \qquad (\text{matriz quadrada})$$

Temos:

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i e [W_\mu, \psi]$$

ψ na rep. adjunta.

~~Daí, contraindo com T_a~~

~~$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ie\, T_a\, d_{ab}(W_\mu)\, \phi_b$~~

~~$= \partial_\mu \phi + ie\, [W_\mu, \phi]$~~

A identidade de Bianchi

É fácil verificar que qualquer operador satisfaz: (inclusive a derivada covariante)

$$[D_\lambda [D_\mu, D_\nu]] + [D_\nu [D_\lambda, D_\mu]] + [D_\mu [D_\nu, D_\lambda]] = 0$$ (identidade de Jacobi)

Como

$$[D_\mu, D_\nu] = ie\, F_{\mu\nu}$$

temos

$$\frac{1}{ie}[D_\lambda, [D_\mu, D_\nu]] = \cancel{ie}\,[D_\lambda, F_{\mu\nu}]$$

$$= \cancel{ie}\,(\partial_\lambda + ie\, W_\lambda) F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu}(\partial_\lambda + ie\, W_\lambda)$$

$$= \partial_\lambda F_{\mu\nu} + ie\, [W_\lambda, F_{\mu\nu}]$$

Mas se $F_{\mu\nu}$ está na representação adjunta -

temos

$$[D_\lambda, [D_\mu, D_\nu]] = ie\, D_\lambda F_{\mu\nu}$$

~~Daí~~ Note que esta igualdade é válida somente na representação adjunta.

Daí segue

$$D_\lambda F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\mu F_{\nu\lambda} = 0$$

Como

$$F_{\mu\nu} \to g F_{\mu\nu} g^{-1}$$

Segue que

$$\mathrm{Tr}\left(D(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\right) = F^{a}_{\mu\nu} F^{\mu\nu b}\, \mathrm{Tr}(D(T_a T_b))$$

é invariante de gauge e de Lorentz.

Nota que

$$I = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma})$$

$$= 2\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$

também é invariante de Lorentz e de gauge. Nota que ela pode ser escrita como:

$$I = 4\, \partial_\mu V^\mu$$

$$V^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, \mathrm{Tr}\left(W_\nu \partial_\rho W_\sigma + \frac{2i}{3} W_\nu W_\rho W_\sigma\right)$$

Logo não pode ser Lagrangeana pois não fornece eq. de movimento. (Esta será o # de instantons)

Definindo o tensor dual a $F_{\mu\nu}$ como:

$$^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$

Podemos escrever a identidade de Bianchi como:

$$D_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0$$

Esta não é uma equação dinâmica mas sim uma identidade. Note, no entanto a semelhança com a teoria de Maxwell.

Vamos agora derivar as equações de movimento para os campos de gauge ou seja as equações de Yang-Mills. → entre (36.a)

A lagrangiana tem que ser invariante de gauge e de Lorentz. Um candidato

$$\mathcal{L} \propto \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = \mathrm{Tr}(T_a T_b)\, F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu b}$$

E para termos um vácuo estável é preciso que a hamiltoniana seja positiva definida. É possível mostrar que isto é obtido quando $\mathrm{Tr}(T_a T_b)$ é uma matriz positiva definida.

Na verdade a matriz

$$g_{ab} = \mathrm{Tr}(T_a T_b)$$ (Note que é simétrica)

é a forma de Killing da álgebra, e ela só é positiva definida quando o grupo é compacto e semisimples.

Um grupo é simples quando ele não possui subgrupos invariantes (além de 1 e ele mesmo), i.e. não existe nenhum subgrupo H tal que:

$$g h g^{-1} \in H \qquad \overset{a}{g} \in G, \ h \in H$$

Um grupo é semisimples quando ele não possui subgrupo abeliano invariante

Portanto um grupo de gauge tem que ser compacto.

Quando um grupo é compacto existe uma base onde a forma de Killing é proporcional a matriz identidade:

$$g_{ab} = K^2 \delta_{ab}$$

Como a forma de Killing é positiva definida, seus autovalores são positivos. Como é real e simétrica podemos diagonalizá-la por uma transf. ortogonal.

Neste caso as constantes de estrutura são ~~toda~~ completamente antisimétricas, pois

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^{\ \ c} T_c$$

daí

$$Tr([T_a, T_b] T_d) = i f_{ab}^{\ \ c} \, Tr(T_c T_d) = i f_{abd}$$

$$= Tr([T_d, T_a] T_b)$$

$$= Tr([T_b, T_d] T_a)$$

Tomamos então como Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4K^2} Tr(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

(Note que $\mathcal{L}_G$ não muda quando mudamos a representação por causa do fator $\frac{1}{K^2}$)

Com um grupo de gauge compacto de Lie.

Derivamos então as equações de movimento de um princípio variacional:

$$\delta S = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x \; Tr\left(F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}\right)$$

e

$$\delta F_{\mu\nu} = \delta\left(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ie\,[W_\mu, W_\nu]\right)$$

$$= \partial_\mu \delta W_\nu - \partial_\nu \delta W_\mu + ie\left([\delta W_\mu, W_\nu] + [W_\mu, \delta W_\nu]\right)$$

e como W_μ está na representação adjunta:

$$\cancel{\delta S = -\frac{1}{2\kappa^2}\int} \qquad \delta F_{\mu\nu} = D_\mu \delta W_\nu - D_\nu \delta W_\mu$$

Daí

$$\delta S = -\frac{1}{\kappa^2}\int d^4x \; Tr\left(F^{\mu\nu} D_\mu \delta W_\nu\right)$$

(onde usamos a antisimetria de $F_{\mu\nu}$)

$$= -\frac{1}{\kappa^2}\int d^4x \left[Tr\left(F^{\mu\nu}\partial_\mu \delta W_\nu\right) + ie\, Tr\left(F^{\mu\nu}[W_\mu, \delta W_\nu]\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{\kappa^2}\int d^4x \left[\partial_\mu Tr\left(F^{\mu\nu}\delta W_\nu\right) - Tr\left(\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta W_\nu\right) - ie\, Tr\left([W_\mu, F^{\mu\nu}]\delta\right.\right.$$

O primeiro termo é uma divergência, e usando o teorema de Gauss, vemos que ele se anula. ~~Para~~ Daí

$$\delta S = \frac{1}{\kappa^2}\int d^4x \; Tr\left((D_\mu F^{\mu\nu})\delta W_\nu\right) = 0$$

Como δW_ν é arbitrário, obtemos a equação de movimento para os campos de gauge (Eq. de Yang-Mills)

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Esta eq. possui derivadas segunda dos campos W_μ, e é não linear pois possui termos quadráticos e cúbicos em W_μ.

~~Esta [illegible] válida em qualquer nº de dimensão~~

Junto com a identidade de Bianchi estas são as equações satisfeitas pelos campos de gauge:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad D_\mu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = 0$$ **(Válido nesta forma em 4 dim. somente)**

Note a não-linearidade destas equações.

Vamos estudar agora a interação com os ~~férmions~~ campos de matéria. A interação é introduzida **pelo acoplamento minimal**. Consideraremos o caso de fermions. A lagrangiana é:

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{2}\left(\bar{\Psi}\gamma^\mu(D_\mu\Psi) - (D^\mu\bar{\Psi})\gamma_\mu\Psi\right)$$

(Note que $D_\mu\Psi = \partial_\mu\Psi + ieW_\mu\Psi$
$\overline{D_\mu\Psi} = \partial_\mu\bar{\Psi} - ieW_\mu\bar{\Psi}$

A equação para os fermions é obtida pelo princípio de mínima ação

$$\delta S = \frac{1}{2}\int d^4x \left[\underline{\delta\bar{\Psi}\gamma^\mu} D_\mu\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\delta\Psi - (D^\mu\bar{\Psi})\gamma_\mu\delta\Psi - (D^\mu\delta\bar{\Psi})\gamma_\mu\Psi \right]$$

integrando por partes o 2º e último termo (desprezando o termo de superfície)

$$\delta S = \int d^4x \left[\delta\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - (D^\mu\bar{\Psi})\gamma_\mu\delta\Psi \right] = 0$$

Obtemos então a eq. de movimento para Ψ, $\bar{\Psi}$

$$\gamma^\mu D_\mu \Psi = 0 \qquad e \qquad (D_\mu \bar{\Psi})\gamma_\mu = 0$$

Note que Ψ e W_μ interagem via acoplamento mínimo

$$\gamma^\mu(\partial_\mu \Psi + ieW_\mu \Psi) = 0$$

Com o termo dos férmions na lagrangiana, a equação de Yang-Mills se modifica. Nós temos:

$$\delta S_F = \frac{1}{2}\int d^4x \left(\bar{\Psi}\gamma^\mu \delta(\underbrace{\partial_\mu \Psi}_{\overset{\shortparallel}{0}} + ieW_\mu \Psi) - \delta(\underbrace{\partial_\mu \bar{\Psi}}_{\overset{\shortparallel}{0}} - ieW_\mu \bar{\Psi})\gamma_\mu \Psi\right)$$

$$= ie\int d^4x\, \bar{\Psi}\gamma^\mu \delta W_\mu \Psi = \int d^4x\, (ie)\bar{\Psi}\gamma^\mu D(T_a)\Psi\, \delta W^a_\mu$$

unindo os dois termos

$$\delta S = \delta S_c + \delta S_F = -\frac{1}{K^2}\int d^4x \left(\partial_\mu \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\delta W^\nu) - \mathrm{Tr}((D^\mu F_{\mu\nu})\delta W^\nu)\right) +$$

$$+ \int d^4x\, ie\bar{\Psi}\gamma^\mu D(T_a)\Psi\, \delta W^a_\mu .$$

$$= \int d^4x \left(\frac{1}{K^2} D^\mu F^a_{\mu\nu}\, \delta W^{\nu b}\, \overbrace{\mathrm{Tr}(T_a T_b)}^{\overset{K^2\delta_{ab}}{\shortparallel}} + ie\bar{\Psi}\gamma^\mu D(T_a)\Psi\, \delta W^a_\mu\right)$$

$$= \int d^4x \left((D^\mu F_{\mu\nu})_a + ie\bar{\Psi}\gamma^\mu D(T_a)\Psi\right)\delta W^a_\mu$$

Portanto a equação de movimento fica

$$(D^\mu F_{\mu\nu})_a = -ie\bar{\psi}\gamma^\mu_\nu D(T_a)\psi \equiv j^\mu_a$$

O lado direito é chamado de corrente e ele ~~é~~ age como uma fonte para os campos de gauge.

Então as equações são:

$$\begin{cases} D_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \\ (D_\mu F^{\mu\nu})_a = -ie\bar{\psi}\gamma^\mu D(T_a)\psi \\ \gamma^\mu D_\mu \psi = 0 \end{cases}$$

No caso de termos vários fermions em representações diferentes do mesmo grupo simples de Lie, a constante de acoplamento é a mesma (Devido a lei de transformação do campo de gauge) Daí:

$$(D_\mu F^{\mu\nu})_a = -ie\sum_i \bar{\psi}_i \gamma^\mu D^i(T_a)\psi_i$$

Auto dualidade

Em 4 dimensões podemos definir o tensor dual ${}^*F_{\mu\nu}$ como

$${}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$

Se estivermos num espaço euclideano, ou seja $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, então

$^*F_{01} = F_{23}$ (Pois abaixar e levantar indice não altera nada)

e $^*F_{23} = F_{01}$

$^*F_{12} = -F_{30}$

$^*F_{30} = -F_{12}$

$^*F_{13} = -F_{02}$

$^*F_{02} = -F_{13}$

Vemos então que

$$^*(^*F_{\mu\nu}) = F_{\mu\nu}$$

Já em espaço de Minkowski teríamos

$^*F_{01} = +F_{23}$, $^*F_{23} = -F_{01}$

$^*F_{12} = F_{30}$

$^*F_{30} = -F_{12}$

$^*F_{13} = F_{02}$

$^*F_{02} = -F_{13}$

e daí

$$^*(^*F_{\mu\nu}) = -F_{\mu\nu}$$

Portanto a operação $**$ é igual a unidade em espaço euclideano, e tem autovalores ±1. Os autovetores são

$$F^\pm_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \pm {}^*F_{\mu\nu} \qquad (\cancel{{}^*F^\pm_{\mu\nu} = \pm F^\pm_{\mu\nu}})$$

ou seja

$$^*F^\pm_{\mu\nu} = \pm F^\pm_{\mu\nu}$$

+ é chamado auto dual

− " " anti auto dual.

É fácil ver que para $F_{\mu\nu}$ auto dual ou anti auto dual a identidade de Bianchi implica a equação de movimento

$$D_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \Longrightarrow D_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

As equações ${}^*F^{*}_{\mu\nu} = \pm F_{\mu\nu}$ são de primeira ordem mas implicam equações de segunda ordem.

A solução mais geral foi construída por Atiyah, Hitchin, Drinfeld e Manin e 1978. São chamados instantons.

No caso do espaço de Minkowski a equação $*x = -1$ e portanto os auto valores são $\pm i$ e portanto os autovetores são complexos. Como estamos trabalhando com campos reais não pode haver solução para

$${}^*F_{\mu\nu} = \pm i F_{\mu\nu}$$

e portanto não existem instantons no espaço de Minkowski.

Isto dá uma idéia da relação entre a estrutura das teorias de gauge e a estrutura do espaço tempo.

Instantons

amos considerar uma teoria pura de Yang-Mills num espaço-tempo uclideano $(\eta^{\mu\nu} = (1,1,1,1))$

A ação é dada por:

$$S = \frac{1}{4K^2} \int d^4x \, T_r (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = \frac{1}{4} \int d^4x \, F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}$$

ue é claramente positiva ou nula

Na teoria quântica a dinâmica é determinada pela integral de rajetória

$$\int \delta W_\mu \, e^{-S}$$

e as configurações que dão uma ação estacionária (em geral mínima) são as que mais contribuem. Na verdade elas correspondem as soluções clássicas.

Defina o tensor dual

$$^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

é fácil ver que

$$(^*F_{\mu\nu})^2 = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} F_{\rho\sigma} F_{\gamma\delta}$$

mas $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} = 2 (\delta_{\rho\gamma} \delta_{\sigma\delta} - \delta_{\rho\delta} \delta_{\sigma\gamma})$

$$(^*F_{\mu\nu})^2 = (F_{\mu\nu})^2$$

$S = S_\pm \mp Q$ onde $S_\pm = \frac{1}{8}\int d^4x \left(F^a_{\mu\nu} \pm {}^*F^a_{\mu\nu}\right)^2$

Nós temos $S \geq 0$, $S_\pm \geq 0$

daí

$$S_\pm \mp Q \geq 0 \Rightarrow \underline{S_\pm \geq \pm Q}$$

Vimos também que $S \geq \mp Q$

1) Dado um valor de Q, o menor valor de S ocorre para as soluções auto duais.

Para uma solução auto-dual $S = Q \geq 0$.

Logo o valor da ação, é sempre maior que o módulo de Q

$$S \geq |Q|$$

Portanto

$$(F_{\mu\nu} \pm {}^{*}F_{\mu\nu})^2 = 2(F_{\mu\nu})^2 \pm 2F_{\mu\nu}{}^{*}F_{\mu\nu}$$

Daí podemos escrever a ação como:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x \, F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} = \frac{1}{8}\int d^4x \left(F^a_{\mu\nu} \pm {}^{*}F^a_{\mu\nu}\right)^2 \mp Q$$

onde

$$Q = \frac{1}{4}\int d^4x \, F^a_{\mu\nu}{}^{*}F^a_{\mu\nu}$$

Note que esta forma da ação só é possível em quatro dimensões pois só aí podemos definir o tensor dual. (Existem hoje em dia modos ~~de~~ de definir o tensor dual em outras dimensões)

Note que o primeiro termo é ~~-~~ sempre maior ou igual a zero, e portanto

$$S \geq \pm Q$$

Note que no espaço de Minkowski isto não é verdade pois o módulo quadrado de um vetor não é um nº positivo ou nulo.

Se $(\pm Q)$ é negativo o primeiro termo tem que ser maior ou igual a $|Q|$ pois a ação é positiva como vimos.

Na verdade a ação só é nula quando $F_{\mu\nu} = 0$ (que é auto dual)

Dependendo do sinal de Q nós tomamos a desigualdade mais forte:

$$S \geq |Q|$$

A igualdade só ocorre quando $F_{\mu\nu} = \pm {}^{*}F_{\mu\nu}$

Ou seja as soluções auto duais são as mais importantes.

Q na verdade é um nº topológico quântico e tem valores fixos em cada setor topológico da teoria.

Considere a variação de Q:

$$\delta Q = \frac{1}{4}\int d^4x \; Tr\left(\delta F_{\mu\nu}\, {}^*F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\, \delta\, {}^*F_{\mu\nu}\right)$$

Mas

$$F_{\mu\nu}\,\delta\,{}^*F_{\mu\nu} = - F_{\mu\nu}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\delta F_{\rho\sigma} = {}^*F_{\rho\sigma}\,\delta F_{\rho\sigma}$$

e

$$\delta Q = \frac{1}{2}\int d^4x \; Tr\left({}^*F_{\mu\nu}\,\delta F_{\mu\nu}\right)$$

ainda

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta W_\nu - \partial_\nu \delta W_\mu + ie\left([\delta W_\mu, W_\nu] + [W_\mu, \delta W_\nu]\right)$$

e

$$\begin{aligned} {}^*F_{\mu\nu}\,\delta F_{\mu\nu} &= 2\,{}^*F_{\mu\nu}\left(\partial_\mu \delta W_\nu + ie\,[W_\mu, \delta W_\nu]\right) \\ &= 2\,{}^*F_{\mu\nu}\, D_\mu \delta W_\nu \end{aligned}$$

e

$$\delta Q = \int d^4x \; Tr\left({}^*F_{\mu\nu}\, D_\mu \delta W_\nu\right)$$

integrando por partes:

$$\delta Q = \int d^4x \; Tr\left(\partial_\mu\left({}^*F_{\mu\nu}\,\delta W_\nu\right)\right) - \int d^4x \; Tr\left(\left(\partial_\mu {}^*F_{\mu\nu}\right)\delta W_\nu\right) +$$

$$+\, ie \int d^4x \; \underset{\displaystyle - Tr\left([W_\mu, {}^*F_{\mu\nu}]\,\delta W_\nu\right)}{\underset{\parallel}{\underline{Tr\left({}^*F_{\mu\nu}\,[W_\mu, \delta W_\nu]\right)}}}$$

(48)

daí $$\delta\mathcal{Q} = -\int d^4x \; Tr\left[\left(D_\mu {}^*F_{\mu\nu}\right)\delta W_\nu\right] + \int d^4x \; \partial_\mu Tr\left({}^*F_{\mu\nu}\,\delta W_\nu\right)$$

O primeiro termo é nulo devido a identidade de Bianchi e portanto a variação de $\mathcal{Q}$ é uma divergência.

$$\delta\mathcal{Q} = \int d^4x \; \partial_\mu Tr\left({}^*F_{\mu\nu}\,\delta W_\nu\right)$$

Portanto poderíamos ter adicionado $\mathcal{Q}$ à ação sem afetar as equações de movimento

Na verdade a densidade de $\mathcal{Q}$ é uma ~~derivada~~ de divergência total e podemos ver isto do seguinte modo.

Considere W_μ como uma variável λ multiplicada por um vetor [illegible] $\hat{W}_\mu$. e daí

$$\delta W_\mu = \delta(\hat{W}_\mu \lambda) = \hat{W}_\mu \delta\lambda .$$

~~A variação de $\hat{W}_\mu$ é perpendicular a $\hat{W}_\mu \Rightarrow \hat{W}_\mu \delta\hat{W}_\mu = 0$~~

Daí

$$\delta\mathcal{Q} = \int d^4x \; \delta\left(\frac{1}{4} Tr\left(F_{\mu\nu} {}^*F_{\mu\nu}\right)\right) = \int d^4x \; \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\partial_\mu Tr\left(F_{\rho\sigma}\,\delta W_\nu\right)$$

~~Mas~~ $$= \int d^4x \; \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\partial_\mu Tr\left[\left(\partial_\rho(\hat{W}_\sigma\lambda) - \partial_\sigma(\hat{W}_\rho\lambda) + ie\,\lambda^2[\hat{W}_\rho,\hat{W}_\sigma]\right)\left(\hat{W}_\nu\,\delta\lambda\right)\right]$$

$$= \int d^4x \; \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\partial_\mu Tr\left[\left(\underbrace{\hat{W}_\sigma\partial_\rho\lambda - \hat{W}_\rho\partial_\sigma\lambda}_{} + \lambda\left(\partial_\rho\hat{W}_\sigma - \partial_\sigma W_\rho + ie\lambda[\hat{W}_\rho,\hat{W}_\sigma]\right)\right]\hat{W}_\nu\,\delta\lambda\right.$$

este termo multiplicado por $\hat{W}_\nu$ dá zero porque $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\hat{W}^a_\sigma\hat{W}^a_\nu = 0$

aí

$$\delta\left(\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}{}^{*}F_{\mu\nu}\right)\right) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\partial_\mu \mathrm{Tr}\left[\lambda\left(\partial_\rho \hat{W}_\sigma - \partial_\sigma W_\rho + ie\lambda[\hat{W}_\rho,\hat{W}_\sigma]\right)\hat{W}_\nu\,\delta\lambda\right]$$

Podemos integrar esta relação em λ:

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}{}^{*}F_{\mu\nu}\right) = \int_0^1 d\lambda\,\frac{\delta}{\delta\lambda}\cancel{\mathrm{Tr}}\left(\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}{}^{*}F_{\mu\nu}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\int_0^1 \partial_\mu \mathrm{Tr}\left[\left[\lambda(\partial_\rho \hat{W}_\sigma - \partial_\sigma W_\rho) + ie\lambda^2[\hat{W}_\rho,\hat{W}_\sigma]\right]\hat{W}_\nu\,d\lambda\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\partial_\mu \mathrm{Tr}\left[(\partial_\rho\hat{W}_\sigma)\hat{W}_\nu + \frac{ie}{3}[\hat{W}_\rho,\hat{W}_\sigma]\hat{W}_\nu\right]$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left([\hat{W}_\rho,\hat{W}_\sigma]\hat{W}_\nu\right) = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left(\hat{W}_\rho\hat{W}_\sigma\hat{W}_\nu - \hat{W}_\sigma\hat{W}_\rho\hat{W}_\nu\right)$$

$$= 2\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left(\hat{W}_\rho\hat{W}_\sigma\hat{W}_\nu\right)$$

Daí

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}{}^{*}F_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\underset{\sigma}{\nu}\underset{\underset{\nu}{\nu}}{\rho}\underset{\rho}{\sigma}}\,\partial_\mu \mathrm{Tr}\left[(\partial_{\underset{\nu}{\rho}}\hat{W}_{\underset{\underset{\rho}{\nu}}{\sigma}})\hat{W}_{\underset{\sigma}{\nu}} + ie\frac{2}{3}\hat{W}_{\underset{\nu}{\rho}}\hat{W}_{\underset{\underset{\rho}{\nu}}{\sigma}}\hat{W}_{\underset{\sigma}{\nu}}\right]$$

$$= \partial_\mu\left\{\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}(\partial_\nu\hat{W}_\rho)\hat{W}_\sigma + \frac{ie}{3}\hat{W}_\nu\hat{W}_\rho\hat{W}_\sigma\right]\right\}$$

$$= \partial_\mu \eta_\mu$$

~~$\frac{ie}{2}$~~

onde

$$\eta_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}(\partial_\nu\hat{W}_\rho)\hat{W}_\sigma + \frac{ie}{3}\hat{W}_\nu\hat{W}_\rho\hat{W}_\sigma\right]$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{-3+2}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{4}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left[F_{\nu\rho}\hat{W}_\sigma - \frac{2}{3}ie\,\hat{W}_\nu\hat{W}_\rho\hat{W}_\sigma\right]$$

η_μ é uma corrente topológica

$$\eta_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}(\partial_\nu W_\rho)\, W_\sigma + \frac{i e}{3} W_\nu W_\rho W_\sigma\right)$$

$$= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{4}\left(\partial_\nu W_\rho - \partial_\rho W_\nu + i e [W_\nu, W_\rho]\right) W_\sigma - \frac{1}{4} i e [W_\nu, W_\rho) W_\sigma$$

$$+ \frac{i e}{3} W_\nu W_\rho W_\sigma\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left(F_{\nu\rho} W_\sigma + i e \left(\frac{4}{3} W_\nu W_\rho W_\sigma - [W_\nu, W_\rho] W_\sigma\right)\right)$$

$$\frac{4}{3} - 2 = \frac{4}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left(F_{\nu\rho} W_\sigma - \frac{2}{3} i e\, W_\nu W_\rho W_\sigma\right)$$

~~Inf. transf. then~~

~~Under gauge transf.~~

~~$W_\mu \to g W_\mu g^{-1} + \frac{i}{e}\partial_\mu g\, g^{-1}$~~

~~$F_{\mu\nu} \to g F_{\mu\nu} g^{-1}$~~

~~If $g = e^{\varepsilon T}$~~

~~$\delta W_\mu = i\varepsilon [T, W_\mu] + \frac{1}{e}\partial_\mu \varepsilon T$~~

Sob. transf. de gauge:

$$W_\mu \to g W_\mu g^{-1} + \frac{i}{e}\partial_\mu g\, g^{-1}$$

$$F_{\mu\nu} \to g \hat{F}_{\mu\nu} g^{-1}$$

Se $\quad g = e^{i\varepsilon}$

$$\delta W_\mu = i[\varepsilon, W_\mu] - \frac{1}{e}\partial_\mu \varepsilon$$

$$\delta F_{\mu\nu} = i[\varepsilon, F_{\mu\nu}]$$

Daí:

$$\delta\eta_\mu = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{Tr}\left(\delta F_{\nu\rho} W_\sigma + F_{\nu\rho}\,\delta W_\sigma - 2ie\, W_\nu W_\rho\, \delta W_\sigma\right)$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{Tr}\Big(i\overset{\textcircled{1}}{\cancel{[\varepsilon, F_{\nu\rho}]}} W_\sigma + i F_{\nu\rho} \overset{\textcircled{1}}{\cancel{[\varepsilon}}, W_\sigma] - $$

$$- \frac{1}{e} F_{\nu\rho}\,\partial_\sigma \varepsilon - 2ie\, W_\nu W_\rho (i) [\varepsilon, W_\sigma]$$

$$+ \frac{2ie}{e} W_\nu W_\rho\, \partial_\sigma \varepsilon \Big)$$

Mas:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{Tr}\left(W_\nu W_\rho [\varepsilon, W_\sigma]\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{Tr}\left([W_\nu, W_\rho][\varepsilon, W_\sigma]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{Tr}\left(\varepsilon [W_\sigma, [W_\nu, W_\rho]]\right)$$

$$= \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{Tr}\Big(\varepsilon\big([W_\sigma [W_\nu, W_\rho]] + [\underset{\sigma}{W_\nu}, [\underset{\nu}{W_\rho}, \underset{\rho}{W_\sigma}]] +$$

$$+ [\underset{\sigma}{W_\rho}, [\underset{\nu}{W_\sigma}, \underset{\rho}{W_\nu}]]\big)\Big)$$

$$= 0$$ pela identidade de Jacobi

Portanto:

$$\delta\eta_\mu = \frac{1}{4}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left(\left(-\frac{1}{\epsilon}F_{\nu\rho} + 2i\,W_\nu W_\rho\right)\partial_\sigma\Sigma\right)$$

$$= -\frac{1}{4\epsilon}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left(\left(\partial_\nu W_\rho - \partial_\rho W_\nu + i\epsilon\,\cancel{[W_\nu W_\rho]}^{\textcircled{1}} - 2i\epsilon\,\overset{\textcircled{1}}{\cancel{W_\nu W_\rho}}\right)\partial_\sigma\Sigma\right)$$

$$= -\frac{1}{2\epsilon}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\nu W_\rho\,\partial_\sigma\Sigma\right)$$

$$= -\frac{1}{2\epsilon}\,\partial_\sigma\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\nu W_\rho\,\Sigma\right)$$

$$= -\frac{1}{2\epsilon}\,\partial_\sigma\,t_{\mu\sigma}$$

com $\quad t_{\mu\sigma} = \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\nu W_\rho\,\Sigma\right)$

Logo $\partial_\mu\eta_\mu$ é invariante de gauge pois:

$$\delta\,\partial_\mu\eta_\mu = \partial_\mu\,\delta\eta_\mu = -\frac{1}{2\epsilon}\,\partial_\mu\partial_\sigma t_{\mu\sigma} = 0$$

devido antisimetria de $t_{\mu\nu}$

Resumindo nós temos que a densidade de Q é uma divergência total

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu}) = \partial_\mu \eta_\mu$$

e que a variação de Q também é uma ~~divergência~~ integral de uma divergência total

$$\delta Q = \delta\int d^4x\,\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu}) = \int d^4x\,\partial_\mu \mathrm{Tr}({}^*F_{\mu\nu}\,\delta W_\nu)$$

Na teoria quântica a quantidade $\mathrm{Tr}({}^*F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})$ é importante por causa da anomalia axial

$$\partial_\mu j^A_\mu \approx \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu})$$

e portanto a corrente que é conservada é $(j^{\mu A} - \eta^\mu)$

η_μ não é invariante de gauge e sua variação sob uma transformação de gauge é a divergência de um tensor antisimétrico.

$$\delta\eta_\mu = \partial_\nu t_{\mu\nu} \qquad t_{\mu\nu} = -t_{\nu\mu}$$

pois $\delta(\partial_\mu\eta_\mu) = \delta\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu}) = 0 \Rightarrow \partial_\mu\,\delta\eta_\mu = 0$

Como $\partial_\mu\eta_\mu$ é a densidade de Q, temos

$$Q = \int d^4x\,\partial_\mu\eta_\mu$$

e daí

$$Q = \int_{S_3} dS^\mu\,\eta_\mu$$

onde a integral é sobre uma esfera tridimensional no infinito do espaço Euclideano.

Nós estamos interessados em soluções com ação finita e como $S = |Q|$ para configurações auto duais. nós esperamos que a condição suficiente para isto seria

$$R^2 F \to 0 \quad \text{quando } R \to \infty$$

Pois
$$Q = \int d^4x \frac{1}{R^4} Tr(R^2 F_{\mu\nu} R^2 {}^*F_{\mu\nu}) = \int dR \frac{1}{R} Tr(R^2 F)^2$$

No entanto como no caso da teoria do U(1) nós podemos mostrar que se $F_{\mu\nu} = 0$, então numa região simplesmente conexa do espaço tempo o campo de gauge é um puro gauge:

$$W_\mu = +\frac{1}{ie} g^{-1} \partial_\mu g \qquad g = g(x) \text{ uma função contínua.}$$

Na verdade ~~pode~~ podemos ver isto construindo o elemento do grupo a partir do campo de gauge,

$$g(x) = T \exp\left[ie \int_{x_0}^{x} W_\mu \, dx_\mu \right]$$

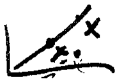
que é independente do caminho se $F_{\mu\nu}$ ~~*~~ é nulo, e portanto bem definido em qualquer lugar.

Se $F_{\mu\nu}$ vai a zero mais depressa que $\frac{1}{R^2}$ isto também é verdade.

Se escolhemos um gauge radial onde

$$x.W = 0 \quad \to \quad g^{-1} x.\partial g = 0 \quad \to \quad g \text{ independe de } R$$

então $g = g(\hat{x}_\mu)$ é independente de R e W_μ é dado por $W_\mu = \frac{1}{ie} g^{-1} \partial_\mu g$

g é independente de R pois a integral $e^{\int_{x_0}^{x} W_\mu dx_\mu}$ em 
é nula se $x.W = 0$

Substituindo na expressão para η_μ temos

$$\eta_\mu = 0 + \frac{1}{6}\,\frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{e^2}\,\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\partial_\nu g\; g^{-1}\partial_\rho g\; g^{-1}\partial_\sigma g\right)$$

Como g depende das variáveis angulares somente $g^{-1}\partial_\mu g$ é tangencial e daí η_μ é perpendicular a esfera no infinito.

Portanto não é garantido que Q seja finito.

Vejamos como Q varia sob uma transf. de gauge infinitesimal

$\delta g = gX$ $\quad X$ infinitesimal e um elemento da algebra de G.

Daí

$$\delta(g^{-1}\partial_\mu g) = -g^{-1}\delta g\, g^{-1}\partial_\mu g + g^{-1}\partial_\mu \delta g$$

$$= -X g^{-1}\partial_\mu g + g^{-1}\partial_\mu g X + \partial_\mu X \qquad (\delta g^{-1} = -g^{-1}\delta g\, g^{-1})$$

$$= [g^{-1}\partial_\mu g, X] + \partial_\mu X$$

Da expressão de η_μ :

$$\delta\eta_\mu = \frac{1}{2}\,\frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{e^2}\,\mathrm{Tr}\left(\delta(g^{-1}\partial_\nu g)\, g^{-1}\partial_\rho g\, g^{-1}\partial_\sigma g\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{e^2}\,\mathrm{Tr}\Big[\underbrace{[g^{-1}\partial_\nu g, X]\, g^{-1}\partial_\rho g\, g^{-1}\partial_\sigma g}_{\overset{\shortparallel}{0} \quad \begin{matrix}\rho\sigma\nu\\ -\nu\rho\sigma\end{matrix}} + \partial_\nu X\, g^{-1}\partial_\rho g\, g^{-1}\partial_\sigma g\Big]$$

Daí

$$\delta\eta_\mu = \partial_\nu\left(\frac{1}{2}\,\frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{e^2}\,\mathrm{Tr}\left(X g^{-1}\partial_\rho g\, g^{-1}\partial_\sigma g\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\underline{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}\,\mathrm{Tr}\Big(\underbrace{X g^{-1}\partial_\nu g\, g^{-1}\partial_\rho g\, g^{-1}\partial_\sigma g + X g^{-1}\partial_\rho g\, g^{-1}\partial_\nu g\, g^{-1}\partial_\sigma g}\Big)$$

Daí

$$\delta\eta_\mu = \partial_\nu \left(\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{e^2} \mathrm{Tr}(X\, g^{-1}\partial_\rho g\, g^{-1}\partial_\sigma g) \right)$$

ou $\delta\eta_\mu = \partial_\nu t_{\mu\nu}$ com $t_{\mu\nu}$ antisimétrico.

Considere uma transf. de gauge finita h construída a partir de transf. infinitesimais do tipo acima

Daí

$$\delta Q = \int dS_\mu \partial_\nu t_{\mu\nu} = 0 .$$

Pelo teorema de Stokes, e Q é invariante por qualquer transf. de gauge construída dessa forma

$$Q(g) = Q(gh)$$

A função $g(x)$ definida através de $W_\mu = \frac{i}{e} g^{-1}\partial_\mu g$ é na verdade um mapeamento suave de S_3 no grupo de gauge G.

$g(x)$ varia no grupo enquanto x varia na superfície da esfera no infinito.

Q é invariante então sob qualquer "deformação" de gauge suave ou em outras palavras toma o mesmo valor sobre todas as esferas que são suavemente deformadas umas nas outras.

Portanto é uma quantidade conservada topologicamente

É chamada de nº de instanton ou nº de Pontryagin.

Vemos então que Q depende das classes de homotopia.

Se $h(x)$ é construído como anteriormente, nós claramente temos uma função $h(x,\lambda)$ $0 \leq \lambda \leq 1$ com $h(x,0)=1$ e $h(x,1) = h(x)$

Dizemos que $h(x)$ é homotopica a identidade se ela é obtida desta maneira.

Se $h(x)$ não é obtida da identidade então:

Teorema $\quad Q(gh) = Q(g) + Q(h)$

Portanto temos o corolário.

Corolário Se $h(x)$ é homotopico à identidade então $Q(h)=0$

A prova do teorema é a seguinte: Se g e h não são homotopicos à unidade então podemos deformá-los para a identidade na esfera S_3 com excessão de uma pequena area para g e de uma pequena area para h. Daí o resultado é óbvio.

A carga Q é aditiva.

Corolário $\quad Q(g^n) = n\,Q(g) \quad$ e Q é quantizada (?)

Vamos construir um exemplo de $Q \neq 0$ para o $SU(2)$.

Escreva

$$g(x) = Y_0 + i\,\vec{Y}\cdot\vec{\sigma} \qquad \text{e} \quad Y_\mu = \frac{x_\mu}{\sqrt{x^2}}$$

$iY_1 - Y_2$

Daí

$$\det g = Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 1$$

g é unitário e portanto $g \in SU(2)$.

Isto define ~~[illegible]~~ um map de uma esfera em outra. (Pois $SU(2) \sim S_3$).

Q conta o nº de vezes que $g(x)$ varre ~~S_3~~ $SU(2)$ enquanto x varre S_3.

Como $S \geqslant |Q|$ os menores valores de Q correspondem as configurações mais interessantes. e as auto duais ou anti autoduais são as mais importantes.

Todas as soluções de instantons auto duais ou anti auto duais ~~[illegible]~~ podem ser construídas usando a construção ADHM (Atiyah, Drinfeld, Hitchin, ~~[illegible]~~ Manin 1978).

No entanto não são muito físicas pois estão no espaço Euclidiano.

Ver: 1) ~~D~~ D. Olive
Rivista del Nuovo Cimento Vol 2 Nº 8, 1 (1979)

SCHAFER

2) T. Schaefer, E. Shuryak, Instantons in QCD
~~hep-ph~~ hep-ph/9610451
Rev. Mod Phys. 70 (1998) 323-426

3) R. Jackiw, C. Rebbi (interpretation of instantons)
Phys. Rev. Lett 37 (1976) 172

~~B~~ 4) A primer on instantons in QCD
Hilmar Forkel
hep-ph/0009136

A solução de Belavin - Polyakov - Schwartz - Tyupkin

(Phys. Letters 59B (1975) 85 - 87)

A solução para $G = SU(2)$ é dada por:

$$e W_0^a = \mp \frac{2 x_a}{x^2 + v^2}$$

$$e W_i^a = - \varepsilon_{iam} \frac{2 x_m}{x^2 + v^2} \pm \delta_{ai} \frac{2 x_0}{x^2 + v^2}$$

Ele pode ser escrito como:

$$e W_\mu = \frac{x^2}{x^2 + v^2} \left(- i \partial_\mu g \, g^{-1} \right)$$

$$g = \frac{\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \mp i x_0}{\sqrt{x^2}}$$

ou ainda como ('Ansatz de 't Hooft - Corrigan - Fairlie - Wilczek)

$$e W_0^a = \pm \frac{\partial_a \phi}{\phi}$$

$$e W_i^a = \varepsilon_{iam} \frac{\partial_m \phi}{\phi} \mp \delta_{ai} \frac{\partial_0 \phi}{\phi}$$

$$\phi = \frac{c}{x^2 + v^2} \qquad \frac{\partial_\mu \phi}{\phi} = - \frac{2 x_\mu}{x^2 + v^2}$$

Note que a solução é auto-dual ou anti-auto-dual pois:

$$e B^a_\mu = \pm e E^a_\mu = \delta_{a\mu} \frac{4\rho^2}{x^2+\rho^2}$$

O tensor de energia momento Euclideano é nulo para esta solução.

Simetrias

Suponha que um sistema físico tenha uma dada simetria, ou seja existem transformações nos estados

$$|\phi\rangle \rightarrow T|\phi\rangle$$

tal que T comuta com a Hamiltoniana

$$[T, H] = 0$$

Logo $|\phi\rangle$ e $T|\phi\rangle$ têm a mesma energia.

Se

$$T|0\rangle \neq |0\rangle$$

então o vácuo é degenerado.

Se o vácuo não é degenerado então ele tem que ser um singleto do grupo de simetria

Ex: estado fundamental do átomo de H tem spin zero pois não é degenerado.

Idéia básica

Considere um sistema de spin que interagem por

$$\vec{S}\cdot\vec{S}$$

Portanto a Hamiltoniana é invariante por rotação.
No entanto, qualquer estado de menor energia (vácuo) tem todos os spins alinhados.

Logo os estados de vácuo não são invariantes por rotação.

Isto é a quebra espontânea de simetria.

Considere agora uma onda de spins (magnon) de comprimento de onda λ muito grande.

Em uma região de tamanho $L << \lambda$ os spins estão em um dado vácuo (alinhados em uma dada direção).

Esta direção varia de região para região.

Se a força entre os spins é de curto alcance, é necessário pouca energia para excitar tal magnon.

A energia do magnon tende a zero conforme $\lambda \to \infty$.

Este magnon é a excitação de Goldstone associada à quebra de simetria.

Efeito de Volume Finito/Infinito

Considere uma rede cubica com N spins 1/2

Temos 3N operadores $\sigma_i(n)$ $i = 1, 2, 3$ $n = 1, 2 \dots N$

Estados são gerados pela ação de σ_- no vácuo

$$|0\rangle = |\underbrace{+ + \dots \ }_{N} + \rangle$$

Considere

$$\tau_1(n) = \sigma_1(n) \cos\theta - \sigma_3(n) \sin\theta$$

$$\tau_2(n) = \sigma_2(n)$$

$$\tau_3(n) = \sigma_1(n) \sin\theta + \sigma_3(n) \cos\theta$$

A rotação pode ser gerada por

$$\tau_\alpha(n) = e^{-i\frac{\theta}{2} \sum_{p=1}^{N} \sigma_2(p)} \sigma_\alpha(n) \, e^{i\theta/2 \sum_{p=1}^{N} \sigma_2(p)}$$

$$[\sigma_i(n), \sigma_j(m)] = i \epsilon_{ijk} \sigma_k(n) \delta_{n,m}$$

Considere o novo vácuo

$$|\theta\rangle = e^{-i\theta/2 \sum_{p=1}^{N} \sigma_2(p)} |0\rangle$$

Pode-se mostrar que

$$\langle 0|\theta\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^N$$

Nota que para $\theta \neq 0, 2\pi$ temos $|\cos\frac{\theta}{2}| < 1$

Portanto

$$\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^N \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Logo $|0\rangle$ e $|\theta\rangle$ tornam-se ortogonais p/ $N\to\infty$ e não há transformação unitária que leva um no outro.

Logo $|0\rangle$ e $|\theta\rangle$ pertencem a setores disjuntos do espaço de Hilbert

5. Quebra espontânea de simetria precisa de um # infinito de graus de liberdade.

(veja pag 164 de Itzykson & Zuber)

Quebra espontânea de simetria ("Spontaneous breaking" coined by Baker & Glashow Phys. Rev 184 (1969) 1848)

Teorias de gauge como formulamos no começo do curso não são teorias mundo real (com exceção do $U(1)_{EM}$) pois as partículas de gauge têm massa nula. e a única partícula deste tipo que conhecemos é fóton. Os problemas são os seguintes:

Se existem mais partículas de gauge com massa nula nós já a teríamos descoberto pois são fáceis de serem produzidas nos aceleradores (É claro que se elas se acoplam muito fracamente às outras partículas isto não é tão fácil. O graviton por exemplo não foi detetado diretamente até hoje!)

As interações que queremos descrever com as teorias de gauge, que são a fraca e forte, têm um alcance muito pequeno e isto implica que as massas das partículas de gauge tem que ser tanto maiores quanto menor o alcance. Lembre-se do princípio de incerteza:

$$\Delta t \, \Delta E \sim \hbar$$

A emissão de uma partícula γ viola a conservação da energia por uma quantia $\Delta E = mc^2$ (m - massa de γ) Então este estado pode existir durante um tempo Δt:

$$\Delta t \simeq \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{mc^2}$$

Durante este tempo γ pode "voar" uma distância

$$\Delta x \sim \Delta t . c \sim \frac{\hbar}{mc}$$

Portanto o alcance da interação é inversamente proporcional a massa de γ.

caso de QCD os gluons têm massa nula mas a interação não é longo alcance devido ao confinamento.

Podemos no entanto introduzir um termo de massa na lagrangiana a as partículas de gauge como:,

$$\frac{1}{2} m^2 W_\mu W^\mu$$

ele não é invariante de gauge. Lembre-se que W_μ se transforma como:

$$W'_\mu = g W_\mu g^{-1} + \frac{i}{e} (\partial_\mu g) g^{-1}$$

ele termo seria invariante por transformação global. Mas a interação de gauge justamente introduzida impondo a simetria local.

massa das partículas de gauge é gerada por um mecanismo que bra a simetria de gauge espontâneamente, isto é, ~~a la~~ apesar da grangeana possuir a simetria de gauge ~~o vácuo~~ o estado fundamental possui. Na verdade existem vários vácuos e a transf. de gauge leva vácuo em outro, mas um dado vácuo não é invariante.

exemplo típico é o ~~forma~~ modelo de Heisenberg:

ste modelo consiste numa rede cristalina de dipolos magnéticos de spin ½ que interagem com os vizinhos mais próximos via

$$\sigma_i \cdot \sigma_j$$

A interação é invariante pelo grupo de rotação mas ela tende a alinhar os spins numa dada direção. Uma vez que isto acontece o estado de vácuo não é invariante mas sim é levado em outro. Existem portanto.

e nº infinito de estados fundamentais. Veja que o que quebra a simetria a escolha de um dado vácuo.

Teorema de Goldstone (1961)

(Y. Nambu PRL 4 (1960) 380
J. Goldstone Nuovo Cimento 19 (1961) 154
J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg Phys. Rev. 127 (62) 965

Quando consideramos uma teoria com uma simetria contínua ~~local~~ global e esta simetria é espontâneamente quebrada então ~~pois~~ aparecem partículas escalares de massa zero. chamadas bosons de Goldstone.

"Existem N-M bosons de massas zero numa teoria com uma simetria contínua global G (dim N) ~~onde~~ que é espontâneamente quebrada para um subgrupo H de ~~dim~~ ~~dim~~ dim M."

Exemplo: Dois campos escalares reais com simetria SO(2)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 \mp \overbrace{\frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2+\phi_2^2) \mp \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2}^{U(\phi_1,\phi_2)}$$

esta lagrangiana é invariante por SO(2)

$$\begin{pmatrix}\phi_1'\\ \phi_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - V(\phi_1,\phi_2)$$

$$V(\phi_1,\phi_2) = +\frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2) + \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^2+\phi_2^2$$

O mínimo do potencial é:

$$\frac{\partial U}{\partial\phi_1} = \phi_1\left(\mu^2 + \frac{\lambda}{3!}(\phi_1^2+\phi_2^2)\right) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\phi_2} = \phi_2\left(\mu^2 + \frac{\lambda}{3!}(\phi_1^2+\phi_2^2)\right) = 0$$

Se $\mu^2 > 0$ e $\lambda > 0$ o mínimo é $\phi_1 = \phi_2 = 0$

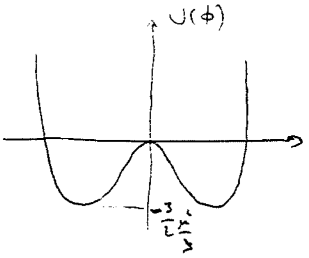
Este mínimo é invariante por SO(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ Sinal não físico da massa.

Se $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$ o mínimo ~~[illegible]~~ é ($\phi_1 = \phi_1 = 0$ é ~~mínimo~~ máximo local)

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = a^2 \qquad \text{onde} \qquad a^2 \equiv -\frac{6\mu^2}{\lambda}$$

$$U(\phi_1,\phi_2)\Big|_{\text{vác.}} = \frac{1}{2}\mu^2(-6)\frac{\mu^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{4!}\left(\frac{6\mu^2}{\lambda}\right)^2 = \frac{\mu^4}{\lambda}\left(-\frac{\cancel{6}}{2} + \frac{\overset{6}{\cancel{36}}}{\cancel{6\cdot 4}}\right) = -\frac{3}{2}\frac{\mu^4}{\lambda}$$



Os estados fundamentais estão num círculo de raio a no plano (ϕ_1, ϕ_2).

Fazendo uma rotação um vácuo vai ~~em~~ outro e portanto não é invariante.

Façamos agora a transformação:

$\varphi_1 = \phi_1 - a$ ~~[illegible]~~ , $\varphi_2 = \phi_2$ ~~[illegible]~~

que significa que estamos tomando as excitações a partir de um dado vácuo, i.e.:

$$\phi_1 = a \quad , \quad \phi_2 = 0$$

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 2a\varphi_1 + a^2$$

$$(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 + 2a^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + 4a\varphi_1(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + 4a^2\varphi_1^2 + 4a^3\varphi_1 + a^4$$

lagrangiana fica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1')^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2')^2 - \frac{\mu^2}{2}\varphi_1'^2 - \frac{\lambda}{3!} a\, \varphi_1'(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) - \frac{\lambda}{4!}(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)^2$$

onde

$$m = \sqrt{2|\mu^2|}$$

positiva.

Portanto o campo φ_1' tem massa m e φ_2 tem massa nula.

φ_2 é chamado de boson de Goldstone.

Caso geral

Tome um multipleto n-dimensional de campos escalares

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Com lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi) - V(\varphi)$$

que é invariante sob um grupo contínuo G. $\varphi \to R(g)\cdot\varphi$ (global)

Sob uma transf. infinitesimal: $(g = 1 + i\omega_\alpha T_\alpha)$

$$\varphi \to \varphi' = (1 + i\omega_\alpha T_\alpha)\varphi$$

$$\delta\varphi_i = i\omega_\alpha (T_\alpha)_{ij}\varphi_j$$

→ U é invariante

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\,\delta\varphi_i = i\,\frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\,\omega_\alpha (T_\alpha)_{ij}\,\varphi_j = 0$$

Como os parametros são arbitrários:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_i}(T_\alpha)_{ij}\,\varphi_j = 0 \qquad \alpha = 1, \dots \dim G$$

Derivando esta equação:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_k \partial \varphi_i}(T_\alpha)_{ij}\,\varphi_j + \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}(T_\alpha)_{ik} = 0$$

No valor do campo que ~~[illegible]~~ extremiza o potencial $\varphi = a$ temos

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\right)_{\varphi = a} = 0$$

e daí

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_k \partial \varphi_i}\right)_{\varphi = a}(T_\alpha)_{ij}\,a_j = 0$$

Expandindo $U(\varphi)$ em torno de a

$$U(\varphi) = U(a) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}\right)_{\varphi = a}(\varphi - a)_i(\varphi - a)_j =$$

$$= U(a) + \frac{1}{2}(M^2)_{ij}(\varphi - a)_i(\varphi - a)_j + \dots \quad \text{onde} \quad (M^2)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}\right)_{\varphi = a}$$

· seja a matriz das massas é a derivada segunda do potencial. e

$$(M^2)_{ij}(T_\alpha)_{j\ell}a_\ell = 0 \qquad \alpha = 1, 2 \ldots \dim G$$

· existir um subgrupo g de G que mantém o vácuo escolhido a invariant

$$a \to ga = a$$

$$\delta a_i = i\omega_\alpha (T_\alpha)_{ij} a_j = 0 \qquad \alpha = 1, 2 \ldots \dim g$$

· Vemos então que os geradores de g aniquilam o vácuo

$$(T_\alpha)_{ij} a_j = 0 \qquad \alpha = 1, 2 \ldots \dim g$$

(Nota que estes vetores formam uma sub-álgebra, pois se T_α e T_β aniquilam a então $[T_\alpha, T_\beta]\, a = 0$

~~Enquanto neste caso~~

Enquanto que para os demais geradores

$$(T_\alpha)_{ij} a_j \neq 0 \qquad \alpha = \dim g \ldots \dim G$$

então o sistema de equações

$$(M^2)_{ij} X^\alpha_j = 0 \qquad X^\alpha_i = (T_\alpha)_{ij}\, a_j \qquad \begin{pmatrix} M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ X \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

~~possua dim G − dim g~~

diz que M^2 possua $(\dim G - \dim g)$ autovalores nulos. que correspondem aos bosons de Goldstone.

Este resultado desencorajou o uso de quebra espontânea de simetria em física de partículas porque não existia evidência para os bosons de Goldstone.

mecanismo de Higgs (1964)

mo vimos ñ podemos introduzir um termo

$$\frac{1}{2} m^2 W_\mu W^\mu$$

· lagrangiana.

o entanto a derivada covariante transforma de modo covariante

$$D_\mu \varphi \to U D_\mu \varphi \qquad (D_\mu = \partial_\mu - i e W_\mu)$$

ortanto

$$\mathrm{Tr}\left((D_\mu \varphi)^+ (D^\mu \varphi)\right)$$ é invariante de gauge

contém um termo quadrático em W:

~~introduzimos então um campo escalar na e um termo na lagrangiana igual ao termo acima~~

troduzimos então um campo escalar em nossa teoria e seu termo nético conterá o termo de massa do campo de gauge.

e $\langle\varphi\rangle$ é seu valor esperado no vácuo e $\langle\varphi\rangle = $ cte então

$$(D_\mu \langle\varphi\rangle)^+ (D^\mu \langle\varphi\rangle) = e^2 \langle\varphi\rangle^+ W_\mu W^\mu \langle\varphi\rangle$$

Como $W_\mu = W_a^a T_a$ temos.

$$(D_\mu \langle\varphi\rangle)^+ (D^\mu \langle\varphi\rangle) = e^2 W_\mu^a W^{\mu b} \langle\varphi\rangle^+ T_a T_b \langle\varphi\rangle$$

$$= \frac{e^2}{2} W_\mu^a W_\mu^b \langle\varphi\rangle^+ \{T_a, T_b\} \langle\varphi\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \frac{M_{ab}^2}{\hbar^2} W_\mu^a W^{\mu b}$$

Introduzimos $\hbar^2$ porque $-\hbar^2\partial^2 = p^2 = M^2$ ~~[illegible]~~ M^2 é a massa física

$M = m\hbar$ onde m é o parametro na lagrangiana clássica

~~[illegible] a unidade~~ Então a matriz de massa é

$$(M^2)_{ab} = e^2\hbar^2 \langle\varphi\rangle^+ \{T_a, T_b\} \langle\varphi\rangle$$

Modelo de Higgs U(1)

Tomamos a lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^+ (D^\mu \phi) - V(|\phi|)$$

onde ϕ é um campo escalar complexo.

S.. uma transf. de gauge:

$$\phi(x) \to e^{\mp i e \chi(x)} \phi(y)$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu \pm \frac{1}{e}\partial_\mu \chi$$

$$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}.$$

potencial de Higgs pode ser em princípio qualquer potencial. O importante é que o campo de Higgs tenha um valor esperado no vácuo diferente de 0 e portanto quebra a simetria.

Tomemos:

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}\mu^2|\phi|^2 + \frac{\lambda}{4!}|\phi|^4$$

Se $\mu^2>0$ e $\lambda>0$ (sinal físico da massa) o vácuo é $\phi=0$

Se $\mu^2<0$ e $\lambda>0$ o vácuo ocorre em $|\phi|=\phi_0\neq0$

Como o potencial só depende do módulo de ϕ, os estados de vácuo são

$$\langle\phi\rangle = \phi_0\, e^{i\theta}$$

e correspondem a um círculo no plano complexo ϕ.

Pela forma como ϕ se transforma sob uma transf. de gauge vemos que todos os vácuos estão ligados por uma transf. de gauge.
Mas cada vácuo não é invariante de gauge e portanto a simetria é espontaneamente quebrada.

Defina

$$\phi = (\phi_0+\lambda)\,e^{i\Theta}$$

onde λ e Θ são campos escalares reais.

A derivada covariante fica

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)(\phi_0+\lambda)\,e^{i\Theta}$$

$$= (\partial_\mu\lambda)\,e^{i\theta} - ie\left(A_\mu - \frac{\partial_\mu\theta}{e}\right)(\phi_0+\lambda)\,e^{i\theta}$$

$$= (\partial_\mu\lambda - ieB_\mu\lambda)\,e^{i\theta} - ieB_\mu\phi_0\, e^{i\theta}$$

o caso em que $A_\mu = 0$ ~~obtemos~~ ou seja a simetria global obtemos

$$(\partial_\mu \phi)^2 = (\partial_\mu \lambda)^2 + (\phi_0 + \lambda)^2 (\partial_\mu \theta)^2$$

o potencial dependeria somente de λ. Portanto λ teria massa e θ ~~ter~~ não. seria o boson de ~~g~~ Goldstone.

entanto aqui podemos fazer uma transf. de gauge

$$A_\mu \to B_\mu - \frac{\partial_\mu \theta}{e}$$

→ a teoria possui tal simetria local e

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$ é invariante

escrevemos a lagrangeana em termos de B_μ e temos.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\partial_\mu \lambda)^2 + e^2 B_\mu^2 (\phi_0 + \lambda)^2 - V(\phi_0 + \lambda)$$

expandindo o terceiro termo:

$$e^2 B_\mu^2 (\phi_0 + \lambda)^2 = e^2 B_\mu^2 \phi_0^2 + 2 e^2 B_\mu^2 \phi_0 \lambda + e^2 (B_\mu)^2 \lambda^2$$

obtemos então um campo de gauge massivo B_μ com massa $m^2 = 2 e^2 \phi_0^2$

um campo escalar massivo λ com massa $= \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$

O que seria o ~~partícula~~ boson de Goldstone, ou seja o campo θ, desapareceu, e foi absorvido pelo boson de gauge que adquiriu massa e ganhou um grau de liberdade a mais.

de graus de liberdade:

antes	depois
2 devido ao campo escalar complexo	1 devido ao campo real λ
2 " " " de gauge	3 " " " de gauge.

Vacuo corresponde a $\lambda = 0$ e para que o termo cinetico se anule temos

$$D_\mu \phi = 0$$

e daí

$$[D_\mu, D_\nu]\phi = i e F_{\mu\nu}\phi = 0$$

e no caso do U(1) significa que $F_{\mu\nu} = 0$.

O modelo de Higgs do U(1) é a teoria de supercondutividade de Landau-Ginzberg. Este é o Meissner effect. O campo magnetico é forçado ~~em~~ a ficar dentro de filamentos e sua energia proporcional ao comprimento.

Num supercondutor os eletrons formam pares e podem ser descritos por uma função de onda ψ. (para bosons)

Eq. de Schrodinger

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} p^2 \psi \qquad \text{onde} \qquad \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}$$

a corrente é

$$\vec{J} = \frac{1}{2m}\left((\vec{p}\psi)^*\psi + \psi^*\vec{p}\psi\right).$$

Escrevendo

$$\psi = \rho\, e^{i\theta}$$

~~temos~~

$$\vec{\partial} =$$

Vemos que a densidade de carga é proporcional

$$|\psi|^2 = \rho^2$$

como ele tem que ser constante para anular a carga dos íons da rede vemos que

$$\rho = cte$$

então

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{m}\left(\vec{\nabla}\theta - \frac{q}{\hbar}\vec{A}\right)\rho^2$$

Numa situação em que a densidade de carga não varia, temos que a divergência de $\vec{J}$ é nula

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

Escolhendo o gauge em que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ obtemos que

$$\nabla^2\theta = 0$$

Como que $\nabla^2\theta$ seja nulo em todo lugar temos que ter $\theta = cte$.

Daí segue que

$$\vec{J} = -\frac{q}{m}\vec{A}\rho^2$$

A equação de Maxwell na presença de uma fonte é

$$\nabla^2\vec{A} = -q\vec{J}$$

e daí

$$\nabla^2\vec{A} = \frac{q^2\rho^2}{m}\vec{A}$$

isto implica que o campo decresce exponencialmente dentro do material. Ou seja o campo eletromagnético é expulso p/ fora do supercondutor
(é como se o campo possuísse massa.)

Nota que a condição $D_\mu \phi_0 = 0 = \partial_\mu \phi_0 - ieW_\mu \phi_0$

implica que a única variação (no espaço-tempo) que ϕ_0 pode ter são aquelas que podem ser compensados por transf. de gauge infinitesimais.
Isto quer dizer que para uma dada solução o vácuo de Higgs tem que estar na <u>mesma órbita de</u> G. !

O vácuo de Higgs é definido como o conj. dos campos que satisfazem

$V(\phi)=0$ e $D_\mu \phi = 0$

O vácuo total da teoria precisa além disto que $F_{\mu\nu}=0$ e portanto

$$W_\mu = \frac{i}{e} g^{-1} \partial_\mu g .$$

Daí

$$\partial_\mu \phi_0 + g^{-1} \partial_\mu g \, \phi_0 = 0$$

O mecanismo de Higgs no caso não abeliano

(Englert and Brout (64), Kibble (67))

nsidere a lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Tr\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) + (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - V(\phi)$$

e é invariante por transformações locais de gauge de um dado grupo G.

é um campo escalar (de Higgs) numa dada representação do grupo G.

a verdade a escolha da representação é o problema da quebra espontânea simetria e é ela que vai determinar para que subgrupo H a simetria quebrada. ~~Ainda não existe uma teoria geral que resolva o problema.~~

Vácuo é dado pelos estados $\langle\phi_0\rangle$ que satisfazem (Veja nota)

$$D_\mu\langle\phi_0\rangle = 0 \qquad e \qquad V(\langle\phi_0\rangle) = 0 \qquad \left(\text{na verdade } \left(\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)_{\phi=\langle\phi_0\rangle} = 0\right)$$

ois estes minimizam a energia.

mo o potencial é invariante

$$V(\phi) = V(D(g)\,\phi)$$

e portanto todos os estados.

$$\Phi = D(g)\langle\phi_0\rangle$$

é também vácuo. (O mesmo é válido para $D_\mu\langle\phi_0\rangle$ pois $D_\mu\phi = D(g)D_\mu\phi_0$)

ponha agora que um dado valor de ϕ diferente de zero, $\langle\phi_0\rangle \neq 0$, minimize o potencial

fina então o conjunto

$$H_0 = \{ g \in G \mid D(g)\langle\phi_0\rangle = \langle\phi_0\rangle \}$$

Seja os elementos de G que deixam $\langle\phi_0\rangle$ ~~[illegible]~~ invariante.

te conjunto é um subgrupo pois se h_1 e $h_2 \in H_0$ então

$$h_1 h_2 \langle\phi_0\rangle = \langle\phi_0\rangle \quad \text{e} \quad h_1 h_2 \in H_0$$

$$h_1\langle\phi_0\rangle = \langle\phi_0\rangle \Rightarrow \quad \langle\phi_0\rangle = h_1^{-1}\langle\phi_0\rangle \quad \text{e} \quad h_1^{-1} \in H_0$$

Este subgrupo H_0 é a simetria do vácuo e da lagrangeana depois da quebra espontânea

No caso do U(1) tínhamos $H_0 = 1$

Sabemos que no vácuo

$$D_\mu\langle\phi_0\rangle = 0$$

e isto implica que

$$D(F_{\mu\nu})\langle\phi_0\rangle = 0 \Rightarrow F^a_{\mu\nu} D(T_a)\langle\phi_0\rangle = 0$$

os se T é um gerador de H_0 e

$$h = 1 + i\varepsilon T$$

ntão

$$D(1+i\varepsilon T)\langle\phi_0\rangle = \langle\phi_0\rangle$$

e daí $$D(T)\langle\phi_0\rangle = 0$$

tanto os geradores de H_0 aniquilam o vácuo.

nsequentemente as únicas componentes do tensor dos campos $F_{\mu\nu}$ que não têm que se anular para satisfazer

$$F^a_{\mu\nu}\, D(T_a)\,\langle\phi_0\rangle = 0$$

ão aquelas correspondentes ao grupo H_0.

ogo somente os campos de gauge do H_0 são excitados no vácuo de Higgs.

amos agora considerar as órbitas de $\langle\phi_0\rangle$, que são todos os ϕ a forma $\phi = D(g)\langle\phi_0\rangle$ para $g \in G$

stos estes ϕ's são também vácuos pela invariança de $V(\phi)$

~~Vamos ver em que condições dois ϕ's, i.e. ϕ_1 e ϕ_2 são iguais~~

~~$D(g_1)\langle\phi_0\rangle = D(g_2)\langle\phi_0\rangle$~~

~~$D(g_2^{-1}g_1)\langle\phi_0\rangle = \langle\phi_0\rangle$~~

~~e portanto $g_2^{-1}g_1 \in H_0$ e $g_1 = g_2 h$~~

e a acção do grupo G no vácuo

$$M_0 = \{\phi : V(\phi) = 0\}$$

transitiva, isto é, se ϕ_1 e $\phi_2 \in M_0$ então existe $g_{12} \in G$ tal que

$$\phi_1 = g_{12}\phi_2$$

ós vemos que M_0 é apenas uma órbita de $<\phi_0>$, ou seja todos pontos no vácuo estão na órbita de $<\phi_0>$.

ver agora em que condições dois vácuos ϕ_1 e ϕ_2 na órbita de $<\phi_0>$ õ iguais, ou seja.

$$D(g_1)\phi_0 = D(g_2)\phi_0$$

e daí $$D(g_2^{-1}g_1)\phi_0 = \phi_0$$

e portanto $g_2^{-1}g_1 \in H_0$ e $g_1 = g_2 h$

ortanto todos os elementos de G que estão no mesmo coset em G/H evam ϕ_0 ao mesmo ponto de M_0. Como a acção é transitiva ós vemos que M_0 é isomórfico a G/H_0

$$M_0 \equiv G/H_0$$

(Na verdade cada órbita em M_0 é isomórfica a G/H.)

(Todo espaço homogeneo (i.e. que tem acção transitiva de um grupo) é localmente isomorfico ao seu grupo de transformação modulo o grupo de isotropia. O isomorfismo é global quando a acção é transitiva (?))

definimos agora

$$H_0' = \{ g \in G \,/\, D(g) < \phi_0' > = < \phi_0' > \}$$

Se ϕ_0' é outro elemento de M_0, notamos que H_0 e H_0' são isomorfos já que a ~~[illegible]~~ ação de G é transitiva pois

$$h' \phi_0' = \phi_0' \qquad h' \in H_0'$$

Como a ação é transitiva existe $g \in G$, tal que

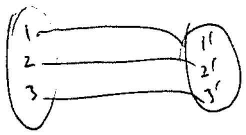
$$\phi_0' = g \phi_0$$

e daí $\quad h' g \phi_0 = g \phi_0 \Rightarrow g^{-1} h' g \phi_0 = \phi_0$

Ou seja $\quad g^{-1} h' g = h \in H_0$

Portanto H_0 e H_0' são relacionados por conjugação por um dado elemento de G e portanto são isomorfos.

$$h_1 h_2 = h_3 \Rightarrow g^{-1} h_1' g g^{-1} h_2' g = g^{-1} h_1' h_2' g = \cancel{g^{-1} h_1' h_2'} g$$
$$= g^{-1} h_3' g = h_3$$



1.2 → 3
1'2' → 3'

Portanto quando a ação ~~[illegible]~~ de G em M_0 é transitiva o grupo H_0 é independente do $\phi_0 \in M_0$ que escolhemos.

uando a ação não é transitiva, isto é, nos casos em que a ~~degene~~ egenerescência do vácuo não é devido somente a simetria de gauge as também devido a outras simetrias (discretas ou contínuas e globais) grupo Ho pode depender do vácuo que escolhemos.

Ex: Tome o potencial

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}\left(\phi^2 - a^2\right)^2$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left(\phi^4 + a^4 - 2a^2\phi^2\right)$$

ϕ um tripleto de SO(3)

O vácuo corresponde a $|\phi| = a$ e portanto uma esfera num espaço tridimensional. ~~Quanto~~ Qualquer ponto da esfera pode ser ligado outro por uma rotação e portanto SO(3) age transitivamente em M_0

$$M_0 = S^2 \qquad e \qquad G = SO(3) \quad e \; H = SO(2)$$

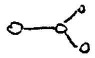
$$\text{Daí} \quad M_0 \equiv SO(3)/SO(2) \equiv S^2$$

H é SO(2) pois é a rotação no plano perpendicular a ϕ_0, que deixa ϕ_0 invariante

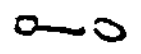
Se agora ϕ é um octeto de SU(3) temos

$$M_0 = S^7 \qquad \text{uma esfera em 8 dimensões}$$

A ação de SU(3) em M_0 não é transitiva, pois o grupo de transf de S^7 é SO(8) e SO(8) não está contido em SU(3)

SO(8) 

Simetria pode ser quebrada para U(2) ou U(1)×U(1)

SU(3) 

O termo de massa para as partículas de gauge

Nós vimos que o termo de massa vem ~~do~~ do termo cinético do ~~bos~~ campo de Higgs.

Se ϕ_0 é vácuo

$$(D_\mu \phi_0)^\dagger D^\mu \phi_0 = e^2 <\phi_0^\dagger> W_\mu W^\mu <\phi_0>$$

$$= e^2 \phi_0^\dagger D(T_a T_b) \phi_0 \; W_\mu^a W^{\mu b}$$

$$= \frac{e^2}{2} W_\mu^a W^{\mu b} \; \phi_0^\dagger D(\{T_a, T_b\}) \phi_0$$

$$= \frac{1}{2} \frac{M_{ab}^2}{\hbar^2} W_\mu^a W^{\mu b}$$

onde $M_{ab}^2 = e^2 \hbar^2 \phi_0^\dagger D(\{T_a, T_b\}) \phi_0$

Como $D(T)$ é hermitiano M_{ab}^2 é real e também é simétrica.
Portanto ela pode ser diagonalizada por uma transformação ortogonal dos campos de gauge.
Esta ~~dica~~ transformação deixa o termo cinético invariante ($F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu}_a$) e portanto é uma transf. seguramente válida.
Para os geradores do grupo de simetria exata H temos

$$D(T_a)\phi_0 = 0$$

e portanto as linhas e colunas correspondentes a estes geradores em M^2_{ab} são nulos tanto quando ~~quando~~ M^2_{ab} é diagonalizado temos um auto valor ulo correspondente a cada gerador de H. Portanto os ~~g~~ campos de gauge de H ficam sem massa.

demais auto valores de M^2_{ac} são não negativos ~~positivos semidefinidos~~ pois M^2_{ab} é ositiva semidefinida. A razão disso é que para um vetor x real é

$$x^a M^2_{ab} x^b = 2 e^2 t^2 \phi_0^+ (x.T)^2 \phi_0$$

$$= 2 e^2 t^2 |x.T \phi_0|^2 \geq 0$$

rtanto a massa dos campos de gauge são reais.

Se o campo de Higgs está numa representação real (como a representação adjunta) então:

1) Nós temos um fator $\frac{1}{2}$ extra no termo cinético e portanto para M^2_{ab} também.

2) D(T) é puramente imaginária para todos ~~os~~ os geradores pois os elementos do grupo $e^{i w_a T_a}$ são reais. ~~Além~~ E como D(T) é hermitiano então ela tem que ser antisimétrica.

Portanto

$$\phi_0^T D(T) \phi_0 = 0 \quad , \quad \phi_{0i} D(T)_{ij} \phi_{0j} = 0$$

No entanto

$$\phi_0^T \frac{1}{2}\{T_a, T_b\} \phi_0 = \phi_0^T \left(T_a T_b - \frac{1}{2}[T_a, T_b]\right) \phi_0$$

termo com comutador da i fase $D(T_c)$ que se anula devido as considerações acima.

Portanto para uma rep. real de ϕ.

$$M^2_{ab} = e^2 \hbar^2 \phi_0^T D(T_a T_b) \phi_0$$

Exemplos. Tome o caso em que $G = SU(2)$

Caso 1 ϕ é um dubleto de $SU(2)$ (rep. complexa)

Daí $D(T_a) = \frac{1}{2}\sigma_a$ σ_a – matrizes de Pauli

Então

$$M^2_{ab} = e^2 \hbar^2 \phi_0^+ \{\tfrac{1}{2}\sigma_a, \tfrac{1}{2}\sigma_b\} \phi_0$$

$$= \frac{e^2 \hbar^2}{2} \delta_{ab} |\phi_0|^2$$

Portanto todas as tres particulas de gauge do $SU(2)$ adquirem a mesma massa

$$m = \frac{e \hbar |\phi_0|}{\sqrt{2}}$$

Não existem bosons de gauge com massa nula, e portanto a simetria exata depois da quebra é $H = 1$.

$$G/H_0 = SU(2)/1 = SU(2)$$

e o potencial depende somente de $|\phi|$, que na verdade é o único invariante disponível neste caso, então o vácuo é descrito

$$|\phi_0|^2 = (\mathrm{Re}\,\phi_0^1)^2 + (\mathrm{Im}\,\phi_0^1)^2 + (\mathrm{Re}\,\phi_0^2)^2 + (\mathrm{Im}\,\phi_0^2)^2 = cte$$

e portanto é S^3.

E $SU(2)$ é isomorfico a S_3. e daí

$$M_0 \equiv G/H \equiv SU(2)/1 .$$

Caso 2

Φ é um tripleto de $SU(2)$.

Portanto é a rep. adjunta.

Daí

$$D_{ij}(T_a) = i f_{iaj} = i \varepsilon_{iaj}$$

$i,j = 1,2,3$
$a = 1,2,3$

então

$$M^2_{ab} = -e^2\hbar^2 \phi_{0i}\, \varepsilon_{iaj}\, \varepsilon_{jbk}\, \phi_{0k}$$

$$= -e^2\hbar^2 \phi_{0i} \left(\delta_{ib}\delta_{ak} - \delta_{ik}\delta_{ab}\right) \phi_{0k}$$

$$= e^2\hbar^2 \left(\phi_0^2 \delta_{ab} - \phi_{0a}\phi_{0b}\right)$$

$$\phi_0^{1\,2} + \phi_0^{2\,2} + \phi_0^{3\,2} = \phi_0^2$$

Tanto as componentes de W_μ^a paralela a ϕ_0 tem massa nula, as componentes paralelas têm massa .

$$\mu^2 = e^2 t^2 \langle \phi_0 \rangle^2$$

mos então uma campo de gauge sem massa e dois massivos.

tomamos

$$(\phi_0)_a = |\phi_0| \delta_{a3}$$

temos $M_{33} = 0$ e $M_{11} = M_{22} = et|\phi_0|$

portanto H_0 tem somente um gerador que é T_3:

$$D(T_3) = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D(T_3)\phi_0 = \phi_0$$

$D(T_3)\phi_0 = 0$?

Gerador de H_0 aniquila o vácuo!

~~Esto~~ Então $H_0 = U(1)$ ou $SO(2)$.

Esta teoria foi candidata para descrever a interação fraca e eletromagnética mas ela só tem uma corrente neutra, que é o $U(1)_{EM}$. e portanto foi descartada quando descobriram as correntes neutras em int. fracas (≐ 74

Então

$$G/H_0 = SU(2)/U(1) = S_2$$

que é o mesmo que M_0 dado por $|\phi|^2 = ct.$

7.2 The case of the adjoint representation

In the discussions about duality that will follow, it will become clear that theories with Higgs field in the adjoint representation have special properties. The adjoint representation is defined by the action of the group on its Lie algebra by

$$gT_a g^{-1} = T_b d^b_a(g) \qquad d(g)d(g') = d(gg') \tag{7.15}$$

In addition for elements infinitesimally close to the identity $g \sim 1 + i\varepsilon^a T_a$ on gets from (7.15) that

$$d^c_b(T_a) = i f^c_{ab} \ ; \qquad [T_a \, , \, T_b] = i f^c_{ab} T_c \tag{7.16}$$

For compact semisimple Lie algebras one can always choose a special basis where the structure constants are totally antisymmetric, i.e. $f^c_{ab} = f_{abc}$, with $\mathrm{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}$.

Since in this case the Higgs has the same number of components as the dimension of the algebra, one can define Lie algebra valued quantities

$$\phi \equiv \phi^a T_a \tag{7.17}$$

The Higgs potential (7.6) can then be written as

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\mathrm{Tr}\,\phi^2 - a^2\right) \tag{7.18}$$

So, choosing a vacuum ϕ_0, with $\mathrm{Tr}\,\phi_0^2 = a^2$, one is choosing a direction in the algebra. Therefore, the little group of ϕ_0 is generated by the generator defined by ϕ_0 and all the others which commute with it. So, the little group has necessarily a $U(1)$ factor and we write it as

$$H_{\phi_0} \equiv U(1) \otimes K \tag{7.19}$$

where K is the subgroup of G commuting with ϕ_0. We choose to normalize the generator of the $U(1)$ as

$$Q = \frac{e\hbar}{a}\phi^a_0 T_a \equiv \frac{e\hbar}{a}\phi_0 \tag{7.20}$$

The mass formula (7.14) in this case becomes (the factor $\frac{1}{2}$ accounts for the fact that the adjoint Higgs is real)

$$\begin{aligned} M^2_{ab} &= \frac{1}{2}e^2\hbar^2\phi_0^\dagger d(\{T_a \, , \, T_b\})\phi_0 \\ &= \frac{1}{2}e^2\hbar^2\left(\left(d^\dagger(T_a)\phi_0\right)^\dagger (d(T_b)\phi_0) + \left(d^\dagger(T_b)\phi_0\right)^\dagger (d(T_a)\phi_0)\right) \\ &= e^2\hbar^2 d_{ac}(\phi_0)d_{cb}(\phi_0) \\ &\equiv a^2 Q^2_{ab} \end{aligned} \tag{7.21}$$

where we have used the fact that, as a consequence of (7.16) and (7.17) one has $(d(T_a)\phi_0)_b = d_{ab}(\phi_0)$, and where we have introduced, following (7.20),

$$Q_{ab} \equiv d_{ab}(\frac{e\hbar}{a}\phi_0) \tag{7.22}$$

$i f^c_{ab} \phi_{0c}$

$f_{abc} \phi_c$

$D_{ca}(T_a) f_{cab} \phi_c$

We then conclude that the masses of the gauge bosons are proportional to the eigenvalues (charges) of the $U(1)$ generator. In fact, we have the elegant mass formula for gauge bosons

$$M = a \mid q \mid \tag{7.23}$$

where q stand for their $U(1)$ charges. Such formula will have an important role in the duality conjectures which we will discuss.

8 Finite energy classical solutions

The energy density, or the Θ_{00} component of the energy momentum tensor, for the theory (7.1) is

$$\Theta_{00} = \frac{1}{2}\left((E_i^a)^2 + (B_i^a)^2 + (\Pi^a)^2 + ((\mathcal{D}_i\phi)^a)^2\right) + V(\phi) \tag{8.1}$$

where

$$E_i^a = -F_{0i}^a \; ; \qquad B_i^a = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_a^{jk} \; ; \qquad \Pi_a = ((\mathcal{D}_0\phi)_a \tag{8.2}$$

We are interested in classical solutions that have finite energy. Therefore, in order for $\int d^3x\Theta_{00}$ to converge, we need Θ_{00} to vanish fast enough as $\mid x \mid \rightarrow \infty$. So, the field should approach some vacuum configuration as $\mid x \mid \rightarrow \infty$. In the example of the monopole we discuss how fast the fields should reach the vacuum. So, in a finite energy solution the Higgs field should belong to M_0 defined in (7.7). Taking some sphere S^2 of radius sufficiently large (at spatial infinity) one observes a given solution defines a map from S^2 to M_0

$$\phi \; : \quad S^2 \rightarrow M_0 \tag{8.3}$$

However, a given fixed sphere S^2 can not be given a physical meaning. Therefore, if we are to get some physical interpretation out of these maps, we should consider equivalent those maps that can be continously deformed one into the other, when the sphere S^2 is changed but still kept at spatial infinity. So, we are interested in the homotopy classes of the maps (8.3). Since, we are mapping two dimensional spheres, those constitute the second homotopy classes of M_0, $\tilde{\Pi}_2(M_0)$. The finite energy solutions of the theory (7.1) can then be classified according to $\tilde{\Pi}_2(M_0)$. In addition, we will see that these homotopy classes characterize quantities which are conserved in time independently of the equations of motion, i.e. they constitute topological charges. Let us discuss an explicit example.

Consider the theory (7.1) with gauge group $G = SO(3)$ and the Higgs field in the triplet (adjoint) representation. We then have, $[T_a\,,\,T_b] = i\varepsilon_{abc}T_c$, and so from (7.16) $d_{ac}(T_b) = i\varepsilon_{abc}$. Therefore, the covariant derivative (7.3) becomes

$$\left(\mathcal{D}_\mu\phi\right)_a = \partial_\mu\phi_a - e\varepsilon_{abc}A_\mu^b\phi^c \tag{8.4}$$

Since the Higgs and gauge fields are three vectors w.r.t. group indices, we use a vectorial notation and write $\varepsilon_{abc}v^bu^c \equiv \left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right)_a$. One can easily check that the configurations [29]

$$\vec{A}_\mu = \frac{1}{a^2e}\vec{\phi} \wedge \partial_\mu\vec{\phi} + \frac{1}{a}\vec{\phi}B_\mu \; ; \qquad\qquad \vec{\phi}^2 = a^2 \tag{8.5}$$

O monopolo de 't Hooft – Polyakov

Consideremos uma teoria de gauge com grupo SO(3) e um campo de Higgs na representação tripleto (rep. adjunta):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathrm{Tr}\,(G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^T D^\mu \phi - V(\phi) \qquad \left(V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda (\phi^2 - a^2)^2 \right)$$

onde

$$G^{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + i e [W_\mu, W_\nu] \qquad \left(d(T_a)_{cb} = i f_{ab}^{\ \ c} \right)$$

a derivada covariante

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + i e [W_\mu, \phi] \qquad (\phi = \phi_a T_a)$$

$$= \partial_\mu \phi + i e\, D(W_\mu) \phi \qquad d(W_\mu)_{ab} = W_\mu^c \, d(T_c)_{ab} =$$

$$= i W_\mu^c \, \varepsilon_{cab}$$

As equações de movimento são

$$D_\mu G^{\mu\nu} = i e [\phi, D^\nu \phi]$$

$$D_\mu D^\mu \phi = -\lambda \phi (\phi^2 - a^2)$$

e temos ainda a identidade de Bianchi

$$D_\mu {}^*G^{\mu\nu} = 0$$

O vácuo desta teoria é dado por:

$$G^{\mu\nu} = 0 \qquad (1)$$

$$D_\mu \phi = 0 \qquad (2)$$

e

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda (\phi^2 - a^2)^2 = 0 \qquad (3)$$

Um exemplo de uma configuração de campo que satisfaz essas condições é:

$$\phi_a = a\,\delta_{a3} \qquad , \qquad W^{\mu}_{a} = 0$$

esta solução tem energia nula e qualquer solução obtida a partir desta o uma transf. de gauge também tem energia nula.

) Vácuo de Higgs é dado por aquelas configurações de campo que satisfazem (2) e (3) mas não necessariamente (1).

~~O vácuo~~ O conjunto M_0 dos campos ϕ que satisfazem (2) e (3) formam uma esfera bidimensional S_2 de raio a no espaço de ~~i~~ spin isotópico.

$$M_0 = S^2$$

O grupo de simetria de um dado vácuo é SO(2) ou U(1) pois é o grupo de otações através do eixo definido pelo campo de Higgs ϕ_0.

Note que ~~este~~ os grupos de simetrias dos vácuos são isomorfos pois SO(3) age transitivamente no vácuo.

Portanto depois da quebra espontânea de simetria nós ficamos com uma te = de gauge do grupo U(1) que podemos identificar como ~~o~~ o letromagnetismo de Maxwell. O gerador ~~do g~~ deste grupo U(1) será o gerador de SO(3) paralelo ao vácuo de Higgs escolhido, ou seja $\frac{\phi \cdot T}{a}$. E este gerador deve ser proporcional a carga elétrica

$$Q \sim \frac{\phi \cdot T}{a}$$

A constante de proporcionalidade é obtida a partir das derivadas

Covariantes. Temos:

$$D_\mu = \partial_\mu + i e W_\mu^a T_a$$ onde T_a é gerador de SO(3)

à derivada covariante do U(1) é:

$$D_\mu^{em} = \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar} A_\mu$$

Projetando W_μ na direção de $\phi \Rightarrow Tr\left(\frac{W_\mu \phi}{a}\right) = \frac{W_\mu \cdot \phi}{a}$ e identificando esta projeção com o fotón A_μ temos

$$D_\mu^{e.m.} = \partial_\mu + i e \frac{W_\mu \cdot \phi}{a}$$

Daí

$$Q = \frac{e\hbar}{a} \phi \cdot T$$

(Aqui entram as páginas (54.a) e (54.b))

A solução de monopolo

Em 1974 't Hooft e Polyakov descobriram independentemente uma solução da teoria acima (SO(3) com ~~#~~ tripleto de Higgs) que tem as propriedades de um monopolo magnético.

Para encontrar tal solução usa-se o seguinte ansatz:

$$\phi_a = \frac{r^a}{er^2} H(aer) \quad , \quad W_a^i = - \epsilon_{aij} \frac{r^j}{er^2} [1 - K(aer)] \quad , \quad W_a^0 = 0$$

onde H e K são funções que devem ser encontradas de tal modo que a equação de movimento seja satisfeita.

Escolhemos $W_a^0 = 0$ para ter solução estática, sem campo elétrico.

Note que os índices espaciais e de grupo se misturam pois ambos variam de 1 a 3.

Ansatz e simetrias da solução

Esperamos que a solução de menor energia seja independente do tempo e com bastante simetria. As simetrias da solução formam um grupo G_0 que não pode ser o grupo total G de simetrias das leis de movimento pois somente a solução trivial possui esta simetria.

A independencia do tempo implica que escolhemos um referencial de Lorentz.
Temos então as rotações espaciais (SO(3)) e translações.
Temos também transformações de gauge SO(3) independentes do espaço. (e do tempo tamb
Temos simetrias discretas

Paridade P: $\phi_a(r) \to \phi_a(-r)$, $W_a^i \to -W_a^i(-r)$, $W_a^0 \to W_a^0(-r)$

Z: $\phi_a(r) \to -\phi_a(r)$ $\quad W_a^\mu(r) \to W_a^\mu(r)$

P e Z geram um grupo $Z_2 \times Z_2$
P e Z trocam o sinal de $\vec{\nabla}.\vec{B}$ e portanto da carga magnética
Podemos ver isto da ação de P e Z em $F^{\mu\nu} = \frac{\phi . G^{\mu\nu}}{a}$

$$P \quad F^{ij}(r) \to F^{ij}(r) \qquad F^{i0}(r) \to -F^{i0}(r)$$

$$Z \quad F^{ij}(r) \to -F^{ij}(r) \qquad F^{i0}(r) \to -F^{i0}(r)$$

Mas PZ não troca o sinal da carga magnética e portanto podemos tê-la como simetria da solução.

Como a solução é localizada ela quebra a ~~tran~~. simetria por translação

A simetria então é

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{gauge}}}{SO(3)} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rotação}}}{SO(3)} \times \underset{\substack{\uparrow \\ PZ}}{Z_2}$$

~~§4.5~~

§4.5

nvariança por rotação espacial força ϕ a ser constante assintoticamente daí as condições de contorno são satisfeitas somente para uma configuração topologicamente trivial

nvariança por SO(3) gauge força ϕ a ser zero e as condições não são atisfeitas.

impomos $SO(3) \times SO(3)$ tem vários subgrupos SO(3) invariantes $\left\{ \begin{array}{l} SO(3) \text{ rotação} \\ SO(3) \text{ gauge} \\ SO(3) \text{ diagonal} \end{array} \right.$

) ansatz geral que é invariante por SO(3) diagonal $(-i r \times \nabla + T)$ é

$$\phi_a(r) = H(aer)\frac{r^a}{er^2} \qquad W_a^0 = J(aer)\frac{r^a}{er^2}$$

$$W_a^i(r) = -\varepsilon_{aij}\frac{r^j}{er^2}\left[1 - K(aer)\right] + \frac{r^2\delta_{ai} - r^i r^a}{er^3}B(aer) + \frac{r^i r^a}{er^3}C(aer)$$

Invariança por Pz força $B = C = 0$

A solução então tem uma simetria $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{gauge}}}{SO(3)} \times \underset{\substack{\uparrow \\ Pz}}{Z_2}$.

Para termos soluçãõ com energia finita é preciso que os campos vão para o vácuo quando $r\to\infty$. Então ~~para que~~

$$\phi_\infty^a(r) = \lim_{r\to\infty} \phi_a(r\hat{r}) = a\,\hat{r}^a$$

Portanto ϕ_∞ ~~mapeia~~ define um mapeamento da esfera S^2 no infinito espacial no vácuo do campo de Higgs M_0 que também é S^2, No entanto não podemos deformar ~~est~~ continuamente esta configuração na configuração ~~de vácuo~~ constante de vácuo descrita anteriormente (ex: $\phi_a = \delta_{a3}\,a$) Portanto esta solução ~~não pode~~ é estável com relação a decaimento no vácuo.

A energia da solução

$$E = +\int \mathcal{H} d^3x = \cancel{\tfrac{1}{2}} \int d^3x\left\{\left[\frac{(E_a^i)^2 + (B_a^i)^2 + (\Pi_a)^2 + (D_i\phi)_a^2}{2}\right] + V(\phi)\right\}$$

toma a forma.

$$E = \frac{4\pi a}{e}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2}\left[\xi^2\left(\frac{dK}{d\xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\xi\frac{dH}{d\xi} - H\right)^2 + \frac{1}{2}\left(K^2-1\right)^2 + K^2H^2 + \frac{\lambda}{4e^2}\left(H^2-\xi^2\right)^2\right]$$

onde $\xi = a e r$

A condição para que a energia seja estacionária é:

$$\xi^2\frac{d^2K}{d\xi^2} = KH^2 + K(K^2-1)$$

$$\xi^2\frac{d^2H}{d\xi^2} = 2K^2H + \frac{\lambda}{e^2}H(H^2-\xi^2)$$

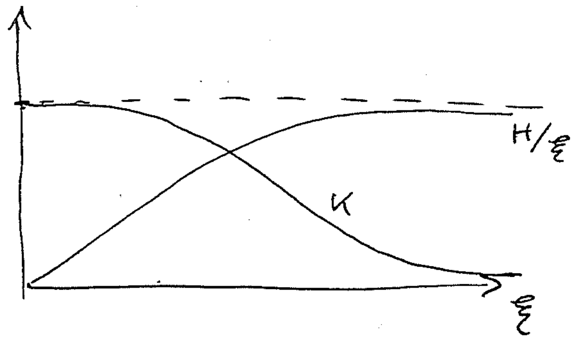
Estas na verdade são as equações de movimento para o ansatz escolhido isto é as eqs de Yang-Mills + eqs de Higgs ~~para~~ escritas em termos de H e K.

As condições de contorno para a energia ser finita são:

$$\left.\begin{array}{l} (K-1)\le O(\xi) \;\Rightarrow\; W_a^{i}\to \varepsilon_{aij}\,\hat{r}^{i}a \\ H\le O(\xi) \;\Rightarrow\; \phi_a \to a\,\dfrac{r^a}{r}\end{array}\right\}\ \xi\to 0$$

$$\left.\begin{array}{l} K\to 0 \\ H\sim \xi \ (\text{suficientemente depressa})\end{array}\right\}\ \xi\to \infty$$

solução ~~par~~ que satisfaz isto existe e a forma é



A energia total da solução é interpretada como a massa clássica e é dada por

$$M = \frac{4\pi a}{e}\, f(\lambda/e^2)$$

onde $f(\lambda/e^2)$ é a integral da energia dada anteriormente.
Alguns valores são

$$f(0) = 1$$

$$f(0.1) = 1.1$$

$$f(0.5) = 1.42$$

$$f(10) = 1.44$$

ejamos agora o tensor dos campos para distâncias grandes.
sando as condições de contorno temos

$$G^{ij}_a \sim \frac{1}{e r^4} \varepsilon_{ijk} r^a r^k \sim \frac{1}{a e r^3} \varepsilon_{ijk} r^k \phi_a$$

(Lembre-se que $G^{0i}_a = 0$)

u seja somente a componente paralela ao Higgs sobrevive, as
utras decaem com a distância muito mais rapidamente e
orrespondem aos campos de gauge massivos.

O campo elétrico é nulo pois

$$\cancel{E^i_a = E^{0i}_a} \quad E^i_a = G^{0i}_a = 0$$

e o campo magnético é

$$\boxed{\cancel{B^a_i = \varepsilon^{ijk} G^a_{jk} = \frac{1}{e r^4} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{jkl} r^a r^l = \frac{1}{e r^4} (\delta^i_l r^a r^l}}$$

$$B^i_a = \varepsilon^{ijk} G^a_{jk}$$

e o campo magnético correspondente ao $U(1)_{EM}$ é

$$B = \frac{\phi \cdot B}{a} = \varepsilon^{ijk} \frac{G^a_{jk} \phi^a}{a} = \frac{1}{a^2 e r^3} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{jkl} r^l \phi_a \phi_a$$

$$=$$

$$\Rightarrow \quad B = -\frac{1}{e} \frac{r^i}{r^3}$$

Portanto é um campo magnético radial que corresponde ao campo de um monopolo de ~~massa~~ carga magnética.

$$g = -\frac{4\pi}{e}$$

Note que e é a constante de acoplamento de gauge e está relacionada à carga elétrica das partículas de gauge por:

$$q = \pm e\hbar$$

daí

$$q g = -4\pi\hbar$$

No entanto q não é o menor valor de carga elétrica possível na teoria pois o operador

$$Q = \phi \cdot T \frac{e\hbar}{a}$$

admite valores $\frac{e\hbar}{2}$ devido aos geradores de SO(3).

Daí

$$\frac{q_0 g}{4\pi\hbar} = -\frac{1}{2} \qquad \left(q_0 = \frac{1}{2} q\right)$$

e portanto esta solução tem o menor valor de carga magnética permitida pela condição de Dirac.

Portanto o monopolo de 't Hooft Polyakov tem uma unidade de carga magnética.

Este monopolo tem um raio finito R_0 determinado pelo comprimento de onda de Compton $\hbar/M$, pois:

No limite $\xi \to \infty$ as eqs de movimento ficam: $\left\{ \begin{array}{l} K \to 0 \\ H \to \xi \end{array} \right.$

$$\frac{d^2K}{d\xi^2} = K \quad ,$$

$$h+\xi) \Rightarrow \xi^2 \frac{d^2(h+\xi)}{d\xi^2} = \frac{\lambda}{e^2}(h+\xi)\left((h+\xi)^2 - \xi^2\right) \Rightarrow \quad \frac{d^2h}{d\xi^2} = 2\frac{\lambda}{e^2}h$$

E daí $\quad K = O\left(e^{-\xi}\right) = O\left(e^{-Mr/\hbar}\right) \qquad M = ae\hbar \qquad (\xi = aer)$

$$h = H - \xi = O\left(e^{-\mu\xi/M}\right) = O\left(e^{-\mu r/\hbar}\right) \qquad \mu = \sqrt{2\lambda}\,a\hbar$$

tanto o tamanho do monopolo é determinado pelas massas M e μ que são as massas das partículas de gauge e Higgs.

Relação entre carga magnética e topologia

Como vimos o monopolo tem um raio finito R_0 e fora desta região os campos estão no vácuo do Higgs, isto é:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ie[W_\mu, \phi]$$

$$= (\partial_\mu \phi_a - e\, \varepsilon_{abc} W_\mu^b \phi^c) T_a$$

$$= \partial_\mu \phi - e\, W^\mu \wedge \phi = 0$$

e $V(\phi) = 0 \Rightarrow \phi^2 = a^2$ para $r \gg R_0$

Estas relações são válidas com um erro da ordem de e^{-r/R_0}

Vamos supor que estas equações são válidas para qualquer solução de energia finita com exceção daquelas regiões onde estão os monopolos. Dado ϕ fora das regiões dos monopolos, a forma geral de W_μ que satisfaz as equações acima é

$$W^\mu = \frac{1}{a^2 e} \phi \wedge \partial^\mu \phi + \frac{1}{a} \phi A^\mu$$

com A_μ arbitrário.

De fato

$$W^\mu \wedge \phi = \frac{1}{a^2 e} (\phi \wedge \partial^\mu \phi) \wedge \phi \qquad (\text{pois } \phi \wedge \phi = 0)$$

$$= \frac{1}{a^2 e} \left[(\phi \cdot \partial^\mu \phi) \phi - \phi^2 \partial^\mu \phi \right] \qquad (\text{pois } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c})$$

~~e $(\phi \cdot \partial^\mu \phi) \phi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^2) \cdot \phi =$~~ [illegible]

~~$= 0$ pois $\phi^2 = a^2$~~

mas $(\phi \cdot \partial^\mu \phi)\, \phi = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^2)\, \phi = 0$ pois $\phi^2 = a = ct$

Daí

$$W^\mu \wedge \phi = \frac{1}{\epsilon} \partial_\mu \phi \Rightarrow \partial_\mu \phi - \epsilon W^\mu \wedge \phi = 0$$

Calculando o tensor dos campos:

$$G^{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu^{\cancel{\mu}} - \partial_\nu W_\mu + i\epsilon [W_\mu, W_\nu]$$

$$= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - \epsilon W_\mu \wedge W_\nu$$

temos

$$\partial_\mu W_\nu = \frac{1}{a^2 \epsilon}\left[\partial_\mu \phi \wedge \partial_\nu \phi + \phi \wedge \partial_\mu \partial_\nu \phi\right] + \frac{1}{a}\left[\partial_\mu \phi A_\nu + \phi \partial_\mu A_\nu\right]$$

$$\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu = \frac{1}{a^2 \epsilon}\left(\partial_\mu \phi \wedge \partial_\nu \phi - \partial_\nu \phi \wedge \partial_\mu \phi\right) +$$

$$+ \frac{1}{a}\left(\partial_\mu \phi A_\nu - \partial_\nu \phi A_\nu + \phi(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\right)$$

$$\wedge W_\nu = \left(\frac{1}{a^2 \epsilon}\right)^2 (\phi \wedge \partial^\mu \phi) \wedge (\phi \wedge \partial^\nu \phi) + \frac{1}{a^3 \epsilon}\left[A_\nu (\phi \wedge \partial^\mu \phi) \wedge \phi - A_\mu (\phi \wedge \partial^\nu \phi) \wedge \phi\right]$$

$$= \left(\frac{1}{a^2 \epsilon}\right)^2 (\phi \wedge \partial^\mu \phi) \wedge (\phi \wedge \partial^\nu \phi) + \frac{1}{a\epsilon}\left(A_\nu \partial_\mu \phi - A_\mu \partial_\nu \phi\right)$$

onde usamos o fato que $W_\mu \wedge \phi = \frac{1}{a^2 \epsilon}(\phi \wedge \partial^\mu \phi) \wedge \phi = \frac{1}{\epsilon} \partial_\mu \phi$

Mas

$$\underbrace{(\phi \wedge \partial^\mu \phi)}_{a} \wedge (\underset{b}{\phi} \wedge \underset{c}{\partial^\nu \phi}) = \left[(\phi \wedge \partial^\mu \phi) \cdot \partial^\nu \phi\right] \phi - \underbrace{((\phi \wedge \partial^\mu \phi) \wedge \phi)}_{\overset{\shortparallel}{0}} \partial^\nu \phi$$

$$= \left[(\partial^\mu \phi \wedge \partial^\nu \phi) \cdot \phi\right] \phi$$

pois $[u \wedge v] \cdot w = (w \wedge u) \cdot v = (v \wedge w) \cdot u$

inda

$$\phi\wedge\partial_\nu\phi = e^2 (W_\mu\wedge\phi)\wedge(W_\nu\wedge\phi)$$

$$= e^2\{[\underbrace{(W_\mu\wedge\phi)\cdot\phi}_{\overset{\shortparallel}{0}}]W_\nu - [(W_\mu\wedge\phi)\cdot W_\nu]\phi\}$$

$$= -\frac{e^2}{a^2 e}(W_\mu\wedge\phi)\cdot(\phi\wedge\partial_\nu\phi)\phi = -\frac{1}{a^2}[\partial_\mu\phi\cdot(\phi\wedge\partial_\nu\phi)]\phi$$

$$= -\frac{1}{a^2}(\phi\cdot(\partial_\nu\phi\wedge\partial_\mu\phi)]\phi = \frac{1}{a^2}[\phi\cdot(\partial_\mu\phi\wedge\partial_\nu\phi)]\phi$$

nto

$$^{\mu\nu} = \frac{2}{a^4 e}[\phi\cdot(\partial_\mu\phi\wedge\partial_\nu\phi)]\phi + \frac{1}{a}\cancel{(\partial_\mu\phi A_\nu - \partial_\nu\phi A_\mu)} + \frac{\phi}{a}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) -$$

$$-\frac{1}{a^4 e}(\phi\cdot(\partial_\mu\phi\wedge\partial_\nu\phi)]\phi - \frac{1}{a}\cancel{(\partial_\mu\phi A_\nu - \partial_\nu\phi A_\mu)}$$

l daí

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{a}\phi F_{\mu\nu}$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{a^3 e}\phi\cdot(\partial_\mu\phi\wedge\partial_\nu\phi) + \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Temos que

$$\phi \cdot G_{\mu\nu} = \frac{1}{a}\phi^2 F_{\mu\nu} = a F_{\mu\nu}$$

daí

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{a}\left(\partial_\mu \phi \cdot G^{\mu\nu} + \phi \cdot \partial_\mu G^{\mu\nu}\right)$$

Mas

$$D_\mu G^{\mu\nu} = \partial_\mu G^{\mu\nu} - e\, W_\mu \wedge G^{\mu\nu} = -e\, \phi \wedge \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{D_\mu \phi} = 0 \quad \text{(eq. de mov.}$$

e daí $\partial_\mu G^{\mu\nu} = e\, W_\mu \wedge G^{\mu\nu} = \frac{e}{a}(W_\mu \wedge \phi) F^{\mu\nu}$

Portanto

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{a}\left\{ \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{e(W_\mu\wedge\phi)\cdot\frac{\phi}{a}} F^{\mu\nu} + \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\phi\cdot(W_\mu\wedge\phi)} F^{\mu\nu}\frac{e}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0}$$

De modo análogo temos

$$^{*}G^{\mu\nu} = \frac{1}{a}\phi\, {}^{*}F^{\mu\nu}$$

e $\quad {}^{*}F^{\mu\nu} = a\, \phi \cdot {}^{*}G^{\mu\nu}$

Como $\quad D_\mu {}^{*}G^{\mu\nu} = 0$

temos analogamente : $\boxed{\partial_\mu {}^{*}F^{\mu\nu} = 0}$

imos então que fora das regiões dos monopolos nós realmente temos uma teoria que é equivalente a teoria de Maxwell.

amos calcular agora a carga magnética de uma dada solução. Temos que calcular o fluxo magnético através de uma superfície fechada, Σ.

ra obtermos um resultado não nulo ~~[illegible]~~ a superfície Σ tem que englobar uma região onde os campos não estão no vácuo de Higgs, pois este é um possível monopolo.

omo

$$B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} G^{jk} = -\frac{\phi}{a}\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} F^{jk}$$

omo o único campo que sobrevive no vácuo de Higgs é ~~que~~ aquele paralelo ao campo de Higgs temos:

$$B_i^{\parallel} = \frac{\phi \cdot B_i}{a} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} F^{jk}$$

Daí (esquecendo ||)

$$B_i = -\frac{1}{2ea^3}\varepsilon_{ijk}\left(\phi\cdot(\partial^j\phi \times \partial^k\phi)\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\partial_j A_k - \partial_k A_j\right)$$

A carga magnética é dada por:

$$g_\Sigma = \int_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

) Segundo termo é nulo pois

$$\int_\Sigma \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\partial_j A_k - \partial_k A_j)\,dS^i = \int_\Sigma \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

sando o teorema de Stokes vemos que isto é nulo pois Σ é uma perfície fechada.

ntão

$$g_\Sigma = -\frac{1}{2ea^3}\int_\Sigma \varepsilon_{ijk}\,\phi\cdot(\partial_j\phi\wedge\partial_k\phi)\,dS^i$$

emos que a carga magnética depende do campo de Higgs somente na Superfície Σ. Na verdade depende menos do que ~~isto~~, isso.

Considere uma variação infinitesimal do campo de Higgs que satisfaça a condição de vácuo, ou seja $\phi^2 = a$.

Daí

$$\phi' = \phi + \delta\phi$$

como $\phi'^2 = \phi^2 = a \Rightarrow \delta\phi\cdot\phi = 0$

~~Então~~ Esta é uma transf. que leva um vácuo de Higgs a outro ~~inf~~ vácuo infinitesimalmente perto.

Então

$$\delta(\phi\cdot(\partial^j\phi\wedge\partial^k\phi)) = \delta\phi\cdot(\partial^j\phi\wedge\partial^k\phi) + \phi\cdot(\partial^j\delta\phi\wedge\partial^k\phi) + \phi\cdot(\partial^j\phi\wedge\partial^k\delta\phi$$

s

$$\partial^j[\phi.(\delta\phi\wedge\partial^k\phi)) = \underbrace{\overset{w}{\partial^j\phi}.(\overset{u}{\delta\phi}\wedge\overset{v}{\partial^k\phi})}_{\delta\phi.(\partial^j\phi\wedge\partial^k\phi)} + \phi.(\partial^j\delta\phi\wedge\partial^k\phi) + \phi.(\delta\phi\wedge\partial^j\partial^k\phi)$$

Usando o fato que $(u\wedge v).w = (w\wedge u).v = (v\wedge w).u$ temos

$$\boxed{\cancel{\phi.(\delta\phi\wedge\partial^k\phi)) = 2\delta\phi(\partial^k\phi\wedge\partial^j\phi) + \phi.(\partial^j\delta\phi\wedge\partial^k\phi) - \phi(\partial^k\delta\phi\wedge\partial^j\phi)}}$$

$$\partial^j[\phi(\delta\phi\wedge\partial^k\phi)] - \partial^k[\phi.(\delta\phi\wedge\partial^j\phi)] =$$

$$= -2\delta\phi(\partial^j\phi\wedge\partial^k\phi) + \phi(\partial^j\delta\phi\wedge\partial^k\phi) + \phi(\partial^j\phi\wedge\partial^k\delta\phi)$$

Daí

$$\delta[\phi.(\partial^j\phi\wedge\partial^k\phi)] = 3\,\delta\phi.(\partial^j\phi\wedge\partial^k\phi) + \partial^j[\phi.(\delta\phi\wedge\partial^k\phi)] - \partial^k[\phi.(\delta\phi\wedge\partial^j\phi))$$

Quando integramos sobre Σ os dois últimos termos se anulam pelo teorema de Stokes

Como $\partial^j\phi$ é perpendicular a ϕ, pois ϕ tem modulo constante no vácuo, concluimos que

$\partial^j\phi\wedge\partial^k\phi$ é paralelo a ϕ (pois estamos em tres dimensões)

e portanto

$$\delta\phi.(\partial^j\phi\wedge\partial^k\phi) = 0 \quad \text{pois} \quad \delta\phi.\phi = 0$$

Concluimos então que

$$\delta.g_\Sigma = 0$$

- a carga magnetica não muda quando fazemos uma variação infinitesimal no campo de Higgs no vácuo.

Isto se extende para qualquer transformação que pode ser construída a partir pequenas variações.

tas deformações são chamadas <u>homotopia</u>.

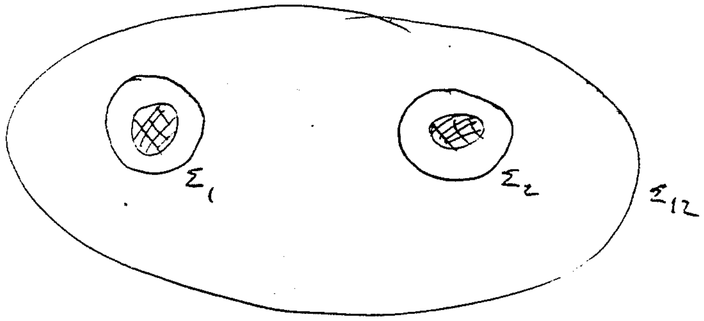
sequentemente g_Σ é

1) independente do tempo

2) invariante de gauge

3) invariante por deformações contínuas da superfície Σ. contendo os monopolos

Em particular se consideramos dois monopolos



Temos que

$$g_{\Sigma_{12}} = g_{\Sigma_1} + g_{\Sigma_2}$$

ou seja a carga magnetica é aditiva.

Quando o grupo de simetria exata (depois da quebra) não é U(1) a soma das cargas pode ser mais complicada)

Vamos ver agora que ele é quantizada.

Escreva

$$g_\Sigma = -\frac{4\pi}{e} N$$

onde $$N = \frac{1}{4\pi a^3} \int_\Sigma dS^i \, \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \, \phi \cdot (\partial^j \phi \wedge \partial^k \phi)$$

N tem a interpretação geométrica de ser o nº de vezes que $\phi(r)$ cobre a esfera M_0 enquanto r cobre Σ uma vez.

$$\phi : \Sigma \to M_0 = SO(3)/U(1) = S^2$$

pois $\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\partial^j \phi \wedge \partial^k \phi)$ é o Jacobiano da transformação.

e daí $$N = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{M_0} dS_\phi \cdot \frac{\phi}{a}$$ $$dS^i_\phi = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} d\phi_j d\phi_k$$ (ver pag 38.a ~~ver notas da pag anterior~~)

Número inteiro N é chamado grau de Brouwer ou índice de Poincaré-Hopf do mapeamento ϕ

Os mapeamentos $\phi : S^2 \to M_0$ pode ser dividido em classes de equivalência sob homotopia. Dois "maps" estão na mesma classe se eles são homotópicos ou seja se um pode ser continuamente deformado no outro.

Se M_0 é S^2, é um resultado em teoria de homotopia que o índice N determina as classes completamente.

Portanto a carga magnética depende somente da classe de homotopia do map $\phi : S^2 \to M_0$.

$$\left(\varepsilon_{ijk}\, \cancel{\phi}.\, \partial^j\phi \wedge \partial^k\phi\right)_a =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \frac{1}{2}\, \varepsilon_{abc}\, \partial^j\phi^b\, \partial^k\phi^c$$

O elemento de area é

$$dS_i = \varepsilon_{ijk}\, dx^j dx^k$$

Então

$$dS_i\, \varepsilon_{ijk}\left(\partial^j\phi\wedge\partial^k\phi\right)_a = \frac{1}{2}\, \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{abc}\, \partial^j\phi^b\, \partial^k\phi^c\, \varepsilon_{ilm}\, dx^l d$$

$$= \frac{1}{2}\, \varepsilon_{abc}\left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) \partial^j\phi^b\, \partial^k\phi^c\, dx^l dx^m$$

$$= \varepsilon_{abc}\, \frac{\partial\phi^b}{\partial x^j}\, \frac{\partial\phi^c}{\partial x^k}\, dx^j dx^k$$

$$= \varepsilon_{abc}\, d\phi^b d\phi^c$$

Ou seja

$$\int_\Sigma dS^i\, \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\, \phi.\left(\partial^j\phi\wedge\partial^k\phi\right) =$$

$$= \int \frac{1}{2}\, \varepsilon_{abc}\, d\phi^b d\phi^c\, \phi^a = \int dS_\phi . \phi$$

temos $g_Z = -\frac{4\pi}{e} N$

e N é inteiro vemos que a carga magnética é quantizada em múltiplos de $\frac{4\pi}{e}$ por razões topológicas (e ela também é conservada)

Se a menor carga elétrica que esperamos é a carga do eletron $q = \frac{1}{2} e\hbar$ temos a condição de quantização de Dirac.

$$\frac{gq}{4\pi\hbar} = -\frac{1}{2} N$$

Note que a condição de Dirac obtida impondo condições de consistência na teoria quântica do eletromagnetismo é obtida aqui em teoria clássica usando métodos topológicos. Este resultado é realmente intrigante!

Caso geral

Pa. termos soluções com energia finita é preciso que os campos tendam ao vácuo no infinito.
Quando a simetria é espontâneamente quebrada o campo de Higgs tende a um valor constante diferente de zero. que satisfaz

$$D_\mu \phi = 0 \quad , \quad V(\phi) = 0$$

Se tivermos uma configuração de campo que contenha soluções tipo monopolo ocupando regiões $M_1, M_2 - M_N$, então fora destas regiões o campo de Higgs tem que estar no vácuo e portanto satisfaz as equações cima.

nsidere uma região ~~de~~ fechada Σ que não corta as regiões onde stão os monopolos-, mas pode englobar alguns deles (ou todos) uma só vez. O campo de Higgs define então um mapeamento

$$\phi : \Sigma \to M_0 \qquad \text{onde } M_0 \text{ é o vácuo de Higgs}$$

omo vimos anteriormente estes "maps" são homotópicos, e as classes de homotopia ~~pa~~ formam uma classificação dos monopolos.

ejamos então em mais detalhes o conceito de homotopia.

ef: Dois mapas entre espaços X e Y, $f_1, f_2 : X \to Y$ são ditos homotopicos se existir uma mapa contínuo F

$$F : (x,t) \to F(x,t) \in Y \qquad \text{onde} \quad \begin{array}{c} 0 \leq t \leq 1 \\ x \in X \end{array}$$

tal que

$$F(x,0) = f_1(x) \qquad F(x,1) = f_2(x)$$

Isto é então uma deformação contínua de f_1 em f_2. Isto é hamado homotopia.

Os mapas que podem ser deformado um no outro formam uma classe de ~~hay~~ homotopia.

Em geral tomamos X como sendo S^n e as classes de homotopia ~~são~~ dos mapas $S^n \to Y$ são denotados $\pi_n(Y)$.

ara o que estamos considerando a superfície Σ que engloba os monopolos e S^2 são equivalentes. Então o mapa

$$\phi : \Sigma \to M_0$$

define um elemento de $\tilde{\pi}_2(M_0)$

ste elemento é independente do gauge, pois cada ~~trans~~ transformação de gauge define um mapa contínuo:

$$\Sigma \to G \qquad (G - \text{grupo de gauge})$$

portanto define um elemento de $\pi_2(G)$

las Cartan mostrou que cada mapa

$$S^2 \to G \qquad (\pi_2(G) = 0 \text{ para } \forall \text{ grupo de Lie})$$

é homotópico à um mapa constante, e como estamos assumindo G conexo esta constante pode ser a identidade de G. Portanto ϕ e sua transformada de gauge dão o mesmo elemento de $\tilde{\pi}_2(M_0)$.

Portanto a classe de homotopia em $\tilde{\pi}_2(M_0)$ definida por $\phi : \Sigma \to M_0$ da uma classificação dos monopolos que é

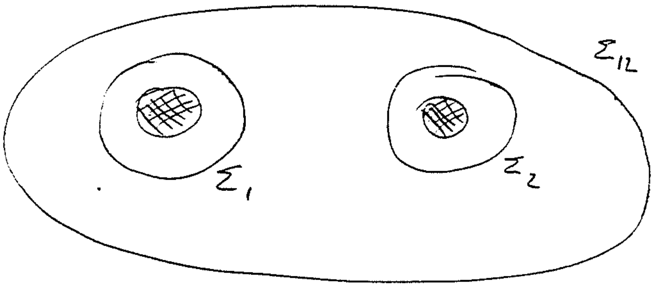
1) invariante de gauge
2) conservado no tempo
3) independente da superfície Σ escolhida para englobar o monopolo, desde que ela o englobe somente uma vez.

tão a classe de homotopia associada com o monopolo é um "número quântico" topológico que aparece a nível clássico.

caso do monopolo de 't Hooft - Polyakov nós encontramos uma representação tegral para eles. No caso geral esta fórmula ainda não é conhecida.

questão que ~~aparece~~ surge é: Como estes "números quânticos" topológicos ombinam, isto é, como se somam?

ada ~~[illegible]~~ a configuração:



~~[illegible]~~ o campo de Higgs define classes de homotopia C_1, C_2 e C_{12} ssociadas a cada superfície Σ.

omo podemos determinar ~~[illegible]~~ C_{12} a partir de C_1 e C_2.

Em geral C_{12} não é unicamente determinada a partir de C_1 e C_2. Mas a condição suficiente para que C_{12} seja unicamente determinada é que M_0 seja simplesmente conexo.

Esta condição é ~~[illegible]~~ equivalente a

$$\tilde{\pi}_1(M_0) = 0$$

ou seja todas as curvas em M_0 são homotópicas umas as outras.

Dada esta condição a lei de combinação (de C_1 e C_2) é dada pela operação e grupo que tem um papel importante em teoria de homotopia. Veja ~~[illegible]~~ abaixo).

$\pi_n(Y)$ são chamadas de classes absolutas de homotopia. As que são realmente importantes são as classes relativas de homotopia $\Pi_n(Y)$. Elas são definidas ~~[illegible]~~ para aqueles mapas ~~[illegible]~~ em que a imagem de um dado ponto fixo de S^n é mapeado num ponto fixo $y_0 \in Y$. (Se Y é conexo então $\Pi_n(Y)$ é independente do ponto base y_0)

A razão para isso é que podemos definir uma operação ~~de~~ binária em $\Pi_n(Y)$ transformando ele num grupo, chamado grupo de homotopia. Para ver isso representamos ~~a~~ S^n como um cubo unitário em $\mathbb{R}^n$ com os pontos da superfície identificados: (pois estamos interessados em equivalência por deformação)

$$I^n = \{ X = (x_1, x_2 \ldots x_n) \mid 0 \leq x_r \leq 1 \text{ para } 1 \leq r \leq n \}$$

e a fronteira

$$\partial I^n = \{ X \in I^n \mid x_r = 0 \text{ ou } 1 \text{ para algum } r \}$$

identificada como um único ~~em~~ ponto.

Considere os mapas

$$\phi : I^n \to Y$$

satisfazendo

$$\phi(X) = y_0 \quad \text{para} \quad X \in \partial I^n .$$

dos dois mapas ϕ_1 e ϕ_2 deste tipo definimos ϕ_{12} como

$$\phi_{12}(x_1, x_2 \ldots x_n) = \begin{cases} \phi_1(2x_1, x_2 \ldots x_n) & 0 \le x_1 \le \frac{1}{2} \\ \phi_2(2x_1 - 1, x_2 \ldots x_n) & \frac{1}{2} \le x_1 \le 1 \end{cases}$$

classe de homotopia de ϕ_{12} depende somente das classes de homotopia e ϕ_1 e ϕ_2. Definimos então a operação

$$\phi_{12} = \phi_1 + \phi_2$$

sta operação satisfaz ~~a~~ os axiomas de grupo.

ara $n \geq 2$ este grupo é abeliano

$$\phi_1 + \phi_2 = \phi_2 + \phi_1$$

~~ara ver isso usamos o fato que I^n é topologicamente equivalente a ola unitária $B^n = \{x \mid |x| \le 1\}$~~

omo a operação de grupo em $\pi_2(M_0)$ é a lei de combinação das cargas magnéticas. vemos que estas podem ser vistas sempre como cargas aditivas

$$C_{12} = C_1 + C_2 = C_2 + C_1$$

mos então que a carga magnética é determinada pelo segundo grupo de omotopia de M_0, ~~Φ_2~~

$$\pi_2(M_0)$$

(Se $\pi_1(M_0)=0$, pois as classes absolutas e relativas de homotopia só são iguais se M_0 é simplesmente conexo)

o caso em que G age transitivamente em M_0 temos

$$M_0 \simeq G/H$$

, daí para termos carga magnética, é preciso que

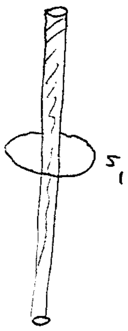
$$\pi_2(G/H) \neq 0$$

No caso em que $\Pi_0(G) = \pi_1(G) = 0$ temos $\pi_2(G/H) \simeq \pi_1(H)$
Exp
e $\pi_1(G/H) = \pi_0(H)$

Outros objetos topológicos

É possível ~~to~~ obter soluções clássicas de teorias de gauge com simetria espontaneamente quebrada que possuem cargas topológicas mas não ~~são~~ ~~[illegible]~~ "bolas".

Um exemplo é a string (cósmica)



Consiste de um cilindro infinitamente longo de raio R_0 ~~[illegible]~~ que da é determinado pela massa das partículas de gauge.
Fora do cilindro temos ~~as~~ o vácuo de Higgs e portanto o mapa.

$$\phi: S_1 \longrightarrow M_0$$

ste caso o grupo de homotopia relevante é o $\pi_1(M_0)$, e novamente G age transitivamente em M_0 podemos escrever

$$\pi_1(M_0) = \pi_1(G/H)$$

x

$$G = U(1), \quad H = 1$$

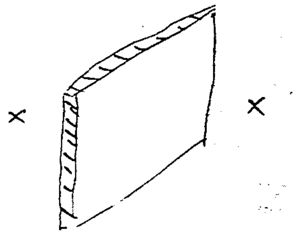
(strings ou vortex lines de Nielsen e Olesen (73))

$$G/H = U(1) = S_1$$

daí $\pi_1(G/H) = \pi_1(S_1) = Z$

m teorias de grande unificação estas strings são importantes na construção de modelos para explicar a formação de galáxias.

utro exemplo é o "domain wall" ou paredes.



De novo temos o vácuo de Higgs fora da parede e o mapeamento

$$\phi: S_0 \to M_0$$

onde S_0 são os dois pontos mostrados na figura

S_μ é dada pela superfície $x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ x_{\mu+1}^2 = a^2$

e portanto S_0 é dado por $x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$

as classes de homotopia relevantes são

$$\pi_0(G/H)$$

ampos de Higgs na representação adjunta

A representação adjunta é dada por aquelas matrizes $d_{ij}(g)$ definida como:

$$g T_i g^{-1} = T_j d_{ji}(g)$$

e

$$d(T_a)_{ij} = i f_{iaj}$$

Pois se $g = 1 + i\varepsilon_a T_a \Rightarrow g T_a g^{-1} = T_a + i\varepsilon_b [T_b, T_a] = T_a + i\varepsilon_c d(T_c)_{ba} T$

$$\Rightarrow T_a + i\varepsilon_b i f_{bac} T_c \Rightarrow d(T_b)_{ca} = i f_{cba}$$

Para encontrar os geradores de H que é o grupo de simetria do vácuo de Higgs, nos precisamos achar quais geradores de G que aniquilam o vácuo, pois

$$D(g)\,\phi_0 = \phi_0 \quad \Rightarrow \quad D(T)\,\phi_0 = 0 \qquad (g = 1 + T)$$

H é dado por:

$$H = \{ g \in G \mid D(g)\,\phi = \phi \}$$

tanto se T é um gerador de H, temos:

$(d(T)\,\phi_0)_i = 0$

$= d_{ij}(\beta_a T_a)\,\phi_{0j} = i\beta_a f_{iaj}\,\phi_{0j} = i\beta_a f_{aji}\,\phi_j = 0$

Multiplicando por T_i e somando sobre i temos

$$\beta_a f_{aji} T_i \phi_{0j} = \beta_a [T_a, T_j]\,\phi_j = [\beta_a T_a, \phi_j T_j]$$

Definindo

$$\phi = \phi_i T_i$$

temos

$$[T, \phi] = 0 \qquad \text{para qualquer gerador } T \text{ de } H \quad (T = \beta_a T_a)$$

É claro que ϕ é um gerador de H pois ele comuta com si próprio. Mas pela equação acima ϕ comuta com todos os geradores de H. Portanto H não é semi simples pois ele possui um subgrupo U(1) invariante

$$U(1)_\phi = e^{i\theta\phi}$$

Na verdade isto é o que acontece na ~~natureza~~ realidade, pois a simetria exata da natureza possui um fator U(1) que é do eletromagnetismo ~~[illegible]~~ $(U(1) \otimes SU(3))$

ntanto localmente H tem a forma

$$H = U(1)_\phi \otimes K$$

entanto não sabemos se $U(1)_\phi$ é compacto ou não (se é um rculo ou ~~uma~~ a reta dos reais)

fato de G ter que ser compacto (para termos energias positivas) implica que $U(1)_\phi$ (que é um subgrupo) tem que ser compacto mo veremos adiante.

nterpretamos ϕ como sendo o gerador de carga elétrica.
mparando as derivadas covariantes calculamos Q.
emos

$$D_\mu = \partial_\mu - ie\, D(T_a)\, W^a_\mu$$

efinindo A_μ como a componente de W_μ na direção de ϕ

$$A_\mu = \frac{\phi^a}{a} W^a_\mu \quad \text{onde} \quad \phi^2 = a^2$$

emos que A_μ é o campo de gauge do $U(1)_\phi$ e seu coeficiente na derivada covariante é

$$-ie\, D(T^a)\frac{\phi^a}{a} = -ie\frac{D(\phi)}{a}$$

~~Z~~ A derivada covariante do U(1) é

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{D(Q)}{\hbar} A_\mu$$

daí

$$D(Q) = e\hbar\,\frac{D(\phi)}{a}$$

se $U(1)_\phi$ é compacto o grupo gerado por Q é compacto. Portanto existe um angulo α não nulo tal que

$$e^{i\alpha Q} = 1$$

Se q é o autovalor de Q nós devemos ter

$$\alpha q = 2\pi n$$

e portanto a carga eletrica é quantizada.

Este é um resultado de Yang (1970)

Esta quantização não necessita da existência de monopolos magnéticos, mas somente do fato de $U(1)_\phi$ ser compacto.

No entanto nem sempre $U(1)_\phi$ é compacto. Vejamos alguns exemplos.

SU(2)

Todo gerador compacto de SU(2) pode ser rodado em T_3 que gera um subgrupo U(1). Como.

$$T_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

seus autovalores são quantizados e portanto todos subgrupos U(1) de U(2) são compactos.

<u>U(3)</u> As matrizes de Gell-Mann diagonais são

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

Subgrupo U(1) gerado por qualquer desses geradores é compacto pois todos os autovalores são múltiplos inteiros um do outro.

autovalores de λ_3 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 1$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to -1$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to 0$

" de λ_8 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to -\frac{2}{\sqrt{3}}$

No entanto $\lambda_3 + \lambda_8$ é um gerador de H tão bom quanto λ_3 e λ_8 e seus autovalores são $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, $-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$; $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

que são mi- irracionais

Portanto exponenciando $\lambda_3 + \lambda_8$ obtemos um U(1) <u>que não é compacto</u>

$e^{i\theta(\lambda_3+\lambda_8)}$ gira num torus que é o produto direto de $U(1)_3$ e $U(1)_8$ e nunca volta ao mesmo ponto.

Isto no entanto que em grande unificação o grupo G é semisimples e compacto. Como G é compacto então H também é.

Para um subgrupo semisimples de um grupo compacto também é compacto

portanto K em $H = U(1) \otimes K$ é compacto se ele for semisimples

mas H é compacto é preciso que U(1) seja compacto.

Logo ~~o~~ se G e K forem semisimples segue que U(1) é compacto

a carga é quantizada.

Vimos que obtemos monopolos magnéticos (com carga em Z) ~~se~~ em uma teoria se

$$\Pi_2(G/H) = \Pi_1(H_0) = \Pi_1(U(1)_\phi \otimes K) = Z$$

que é verdade somente se $U(1)_\phi$ for compacto.

Portanto quantizações da carga elétrica e monopolos magnéticos ~~em~~ em ~~este~~ teorias de grande unificação estão intimamente relacionados.

A condição de quantização no caso visto é:

$$(*) \qquad \epsilon^{ig\,Q/\hbar} = k \quad \text{onde} \quad k \in K \quad (H = U(1) \otimes K)$$

No caso de Dirac ~~[illegible]~~ $K = 1$ e daí

$$gQ = 2\pi n\hbar .$$

amos examinar isto em mais detalhe.

é um estado é singleto de K, então

$$e^{igQ/\hbar}|\psi\rangle = k|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

se a carga é q $\quad Q|\psi\rangle = |\psi\rangle$ obtemos

$$e^{igq/\hbar} = 1 \Rightarrow gq = 2\pi n\hbar$$

é a quantização de Dirac.

Da relação (*) nós vemos que k é um elemento de $U(1)_Q$ e um elemento de K. Mas como é um elemento de $U(1)_Q$ ele tem que comutar com todos os elementos de K, pois comuta com todo H.

Portanto k é um elemento do centro de K.

Pelo lema de Schur ele deve ser um múltiplo da identidade.

No caso de SU(3).

$$k = \lambda \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Para que $\det k = 1$ temos q. ter $\lambda = 1,\ e^{2\pi i/3},\ e^{4\pi i/3}$

que são os elementos do grupo ~~cíclico~~ cíclico de ordem 3, que é chamado Z_3. Que é isomorfico ao centro de SU(3) a verdade o centro de um grupo semisimples é sempre finito e liano.

m um estado de quark. (caso em que K = SU(3))

í

$$k|q\rangle = \omega|q\rangle \qquad \text{onde} \quad \omega = 1,\ e^{2\pi i/3},\ e^{4\pi i/3}$$

aí se $Q|q\rangle = q|q\rangle$ temos

$$e^{igq/\hbar} = 1,\ e^{2\pi i/3} \text{ ou } e^{4\pi i/3}$$

e tomamos $2\pi i/3$ temos

$$\frac{gq}{\hbar} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad gq = 2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{3}\right)$$

que é diferente da condição de Dirac.

ortanto os estados de quark podem ter carga fracionária e inda satisfazer a condição de quantização.

Therefore, any small variation of $\vec{\phi}$ inside the Higgs vacuum does not change g_Σ, and so g_Σ depends on the homotopy classes of the mapping $\Sigma \rightarrow M_0$. Such invariance of g_Σ can be extended to any change in $\vec{\phi}$ that can be built from small variations. The time evolution of the solution provokes smooth variations in $\vec{\phi}$. However, if Σ is kept far away the variations of $\vec{\phi}$ on Σ will not take it out of the Higgs vacuum. Consequently, if Σ is sufficiently large we observes that g_Σ is time independent. In addition, smooth gauge transformations also provokes smooth changes in $\vec{\phi}$, and so should not change g_Σ. Therefore, g_Σ is a gauge invariant and conserved charge.

Since g_Σ depends on the homotopy classes of the mapping $\Sigma \rightarrow M_0$, we conclude that it is quantized. The reason is that in the case under discussion the homotopy classes are given by the integers, since $\Sigma \sim M_0 \sim S^2$, and $\tilde{\Pi}_2(S^2) = \mathbb{Z}$. The integer labeling the homotopy classes gives the widing number, i.e. the number of times one sphere wraps around the other under the mapping $\Sigma \rightarrow M_0$. In fact, we have

$$g_\Sigma = -\frac{4\pi N}{e}\,; \qquad N \equiv \frac{1}{8\pi a^3}\int_\Sigma \varepsilon_{ijk}\vec{\phi}\cdot\left(\partial^j\vec{\phi}\wedge\partial^k\vec{\phi}\right)\,ds^i \tag{8.14}$$

and N is an integer that counts the number of times Σ covers M_0. It is the widing number, the so called Brouwer degree or the Poincaré-Hopf index of the map.

The smallest unit of electric charge in the theory (7.1) is $q = \frac{1}{2}e\hbar$, and therefore

$$q\; g_\Sigma = -2\pi N\hbar \tag{8.15}$$

Therefore, we get the Dirac's quantization rule from the topology of classical solutions.

Notice that the above considerations lead us to the conclusion that a necessary condition for the existence of solutions carrying magnetic charges is that the second homotopy group of the Higgs vacuum should be non trivial, i.e.

$$\tilde{\Pi}_2(M_0)\ \text{non trivial} \quad \rightarrow \quad \text{necessary condition for monopole solutions} \tag{8.16}$$

8.1 The 't Hooft-Polyakov monopole solution

Consider the theory (7.1) for the gauge group $SO(3)$ with Higgs field in the triplet (adjoint) representation. We want a static, finite energy solution which looks like a monopole seen from large distances. Since we want a static configuration we break the Lorentz symmetry down to the spatial rotations. The fact it is localized in space it breaks the translation symmetry. In addition, we can not have the solution invariant under rotations and gauge transformations at the same time. The reason is that invariance under the $SO(3)$ gauge group forces the Higgs field to vanish everywhere, and therefore we do not get finite energy since ϕ does not approach the Higgs vacuum at spatial infinity. The invariance under the $SO(3)$ rotation group forces ϕ to be constant asymptotically and therefore the mapping $\Sigma \rightarrow M_0$, discussed above, will be trivial, and so the magnetic charge vanishes. Consequently, we look for solutions invariant under the diagonal $SO(3)$, i.e.

$$J \equiv -i\vec{r}\wedge\vec{\nabla} + T \tag{8.17}$$

where $-i\vec{r}\wedge\vec{\nabla}$ generates the spatial rotations and T are the generators of the $SO(3)$ gauge group.

In 1974 't Hooft [3] and Polyakov [4] constructed a static solution with such properties, and the appropriate ansatz is (we use $a, b, c = 1, 2, 3$ as $SO(3)$ gauge indices, and $i, j, k = 1, 2, 3$ as space indices)

$$\begin{aligned}\phi_a &= \frac{r_a}{er^2}H(\xi)\\ A_i^a &= -\varepsilon_{aij}\frac{r^j}{er^2}\left(1-K(\xi)\right)\\ A_0^a &= 0\end{aligned}\tag{8.18}$$

where $\xi \equiv \langle\phi\rangle er$, with $\langle\phi\rangle \equiv a$ being the vacuum expectation value of the Higgs field (see (7.6)).

The equations of motion for the theory (7.1) becomes

$$\begin{aligned}\xi^2\frac{d^2K}{d\xi^2} &= K\,H^2 - K(K^2-1)\\ \xi^2\frac{d^2H}{d\xi^2} &= 2K^2\,H + \frac{\lambda}{e^2}\,H(H^2-\xi^2)\end{aligned}\tag{8.19}$$

The boundary conditions for finite energy are

$$\begin{aligned}K-1\leq O(\xi)\ \ ;\ \ H\leq O(\xi) &\qquad \text{for } \xi\to 0\\ K\to 0\ \ ;\ \ H\sim\xi &\qquad \text{for } \xi\to\infty\end{aligned}\tag{8.20}$$

The solution was worked out numerically. However, at large distances one has

$$F_{ij}^a \sim \frac{1}{er^4}\varepsilon_{ijk}r^a\,r^k \sim \frac{1}{er^3}\varepsilon_{ijk}r^k\,\frac{\phi^a}{\langle\phi\rangle}\tag{8.21}$$

So, the only component of the field tensor that survives is in the direction of the Higgs field, as we saw in (8.7). The $U(1)$ magnetic field at large distances is then

$$B^i = -\frac{1}{e}\frac{r^i}{r^3}\tag{8.22}$$

and so, the magnetic charge is

$$g = -\frac{4\pi}{e}\tag{8.23}$$

Since, the smallest possible charge of the theory is $\frac{1}{2}e\hbar$ one has $q\,g = -2\pi\hbar$. Therefore, according to Dirac's quantization condition, the 't Hooft-Polyakov solution carries a unit magnetic charge.

The mass of the monopole is given by

$$M = \frac{4\pi\langle\phi\rangle}{e}f(\frac{\lambda}{e^2})\tag{8.24}$$

where $f(\frac{\lambda}{e^2})$ is a slowly varying function. In fact, $f(0) = 1$, $f(0.1) = 1.1$, $f(0.5) = 1.42$, $f(10) = 1.44$, and so on.

One can check that as $r \to \infty$

$$K = O\left(\exp\left(-\frac{mr}{\hbar}\right)\right) \qquad H - \xi = O\left(\exp\left(-\frac{\mu r}{\hbar}\right)\right) \tag{8.25}$$

where $m = \langle\phi\rangle e\hbar$ and $\mu = \sqrt{e\lambda}\langle\phi\rangle\hbar$. Therefore, the size of the monopole is determined by the Compton wavelength $\frac{\hbar}{m}$ and $\frac{\hbar}{\mu}$ of the heavy particles of the theory. On the other hand, that is determined by the vacuum expectation value of the Higgs field.

In 1975 Julia and Zee [31] constructed a solution like the 't Hooft-Polyakov monopole, but it also carried an electric charge besides the magnetic charge. Following Schwinger it was called dyon solution. It has a magnetic charge $\frac{4\pi}{e}$, but the electric charge is not fixed. In fact, it appears as a Noether charge and not as a topological charge.

It is worth mentioning that other types of solitonic solutions can appear in a theory like (7.1) with the gauge symmetry spontaneously broken. For instance if the $\tilde{\Pi}_1(M_0)$ is non trivial we can have solutions with the form of a string, which due to their importance in models of galaxy formation are called cosmic string. In addition, if $\tilde{\Pi}_0(M_0)$ is non trivial one can have the so called domain walls solutions [32]

9 The Bogomolny bound on the monopole mass

We now consider the theory (7.1) with the Higgs field in the adjoint representation of the gauge group G. As we have seen in (7.19) the little group of the Higgs vacuum has a $U(1)$ component. Therefore in a finite energy solution there is, at large distances, a $U(1)$ component of the field tensor which survives. It is obtained by projecting the field tensor on the $U(1)$ generator (see (7.20) and (8.7))

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{a}\phi_0 \cdot F_{\mu\nu} = \frac{1}{a}\operatorname{Tr}\left(\phi_0 F_{\mu\nu}\right) \tag{9.1}$$

where ϕ_0 is the value of the Higgs field in the vacuum.

The magnetic charge associated to such $U(1)$ gauge group is

$$g = \int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{a}\int_\Sigma B^j_a \phi^a_0 ds^j = \frac{1}{a}\int_\Sigma \operatorname{Tr}\left(B^j \phi_0\right) ds^j \tag{9.2}$$

where we have denoted $B^j \equiv B^j_a T_a$ and $\phi_0 \equiv \phi^a_0 T_a$, and where Σ is a closed surface at spatial infinity.

The Yang-Mills equations associated to (7.1) are

$$\mathcal{D}_\nu F^{\mu\nu} = ie[\phi, \mathcal{D}^\mu \phi] \tag{9.3}$$

$$\mathcal{D}_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{9.4}$$

where

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{9.5}$$

Using (9.4) for $\nu = 0$

$$\mathcal{D}_j B^j = 0\,; \qquad B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk} F_{jk} \tag{9.6}$$

Then, using the Gauss law one gets

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{a}\int_V \partial_j \operatorname{Tr}\left(B^j \phi_0\right) dV \\ &= \frac{1}{a}\int_V \left(\partial_j \operatorname{Tr}\left(B^j \phi_0\right) + ie \operatorname{Tr}\left(\left[A_j\,,\, B^j \phi_0\right]\right)\right) dV \\ &= \frac{1}{a}\int_V \operatorname{Tr}\left(\left(\mathcal{D}_j B^j\right)\phi_0 + B^j \mathcal{D}_j \phi_0\right) dV \\ &= \frac{1}{a}\int_V \operatorname{Tr}\left(B^j \mathcal{D}_j \phi_0\right) dV \end{aligned} \tag{9.7}$$

→ pois traço do comutador é zero

By similar arguments one obtains that the electric charge is ($E^j = -F^{0j}$)

$$\begin{aligned} q &= \int_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{s} \\ &= \frac{1}{a}\int_V \operatorname{Tr}\left(E^j \mathcal{D}_j \phi_0\right) dV \end{aligned} \tag{9.8}$$

$\partial_j E^j \sim [\phi, \partial^0 \phi]$

Now, the classical energy for such theory is the space integral of (8.1), and so we have

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_V dV \Theta_{00} \\ &\geq \frac{1}{2}\int_V dV \left(\left(E^j_a\right)^2 + \left(B^j_a\right)^2 + \left(\left(\mathcal{D}^j\phi\right)_a\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_V dV \left(\left(E^j_a - \left(\mathcal{D}^j\phi\right)_a \sin\theta\right)^2 + \left(B^j_a - \left(\mathcal{D}^j\phi\right)_a \cos\theta\right)^2\right. \\ &+ \left. 2E^j_a \left(\mathcal{D}_j\phi\right)_a \sin\theta + 2B^j_a \left(\mathcal{D}_j\phi\right)_a \cos\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_V dV \left(\left(E^j_a - \left(\mathcal{D}^j\phi\right)_a \sin\theta\right)^2 + \left(B^j_a - \left(\mathcal{D}^j\phi\right)_a \cos\theta\right)^2\right) \\ &+ a\left(q\sin\theta + g\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{9.9}$$

Therefore, for a classical solution at its rest frame (static) we get that its mass must satisfies

$$M \geq a\left(q\sin\theta + g\cos\theta\right) \tag{9.10}$$

The most stringent limit occurs for[3]

$$M \geq a\sqrt{q^2 + g^2} \tag{9.11}$$

This is called the Bogomolny bound [6].

---

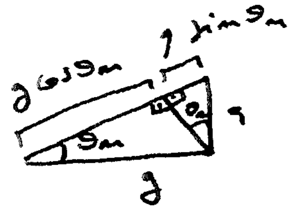
[3] Notice that the maximum of $q\sin\theta + g\sin\theta$ occurs at an angle θ_M such that $\tan\theta_M = q/g$, and therefore we have a right triangle with sides of length q, g and $\sqrt{q^2+g^2} = q\sin\theta_M + g\cos\theta_M$.

$\partial_\theta\left(q\sin\theta + g\cos\theta\right) =$

$= q\cos\theta - g\sin\theta = 0$

$\rightarrow \quad \frac{q}{g} = \operatorname{tg}\theta_M$

$\partial^2_\theta\left(q\sin\theta + g\cos\theta\right) = -\left(q\sin\theta_M + g\cos\theta_M\right)$



$g\cos\theta_M + q\sin\theta_M = \sqrt{q^2+g^2}$

In obtaining such bound we have dropped the terms $(\mathcal{D}_0\phi)^2$ and the Higgs potential $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - a^2\right)^2$ from Θ_{00}. So, if we want to saturate the Bogomolny bound (9.11) we have to take a vanishing Higgs potential. However, in order to get non trivial magnetic charge we have to break the gauge symmetry spontaneously. Therefore, we take the limit $\lambda \rightarrow 0$ but still keep $\langle\phi\rangle \rightarrow a$ as $r \rightarrow \infty$. That is called the Prasad-Sommerfield limit [7].

If we consider solutions with no electric charge then we should take $E^j_a = 0$, and so $\theta = 0, \pi$. Therefore, to saturate the Bogomolny bound (9.11), i.e.

$$M = a \mid g \mid \tag{9.12}$$

we have to impose

$$\mathcal{D}_0\phi = 0\,; \qquad E^j_a = 0\,; \qquad V(\phi) = 0 \tag{9.13}$$

and also

$$B^j_a = \pm\left(\mathcal{D}^j\phi\right)_a \tag{9.14}$$

The relations (9.14) are called the Bogomolny equations [6].

One can check that the first order differential equations (9.13) and (9.14) imply the (second order) equations of motion for the theory (7.1) with the Higgs field in the adjoint representation and vanishing Higgs potential. That resembles the case of instantons which are solutions of the self-duality equations $F_{\mu\nu} = \pm\tilde{F}_{\mu\nu}$, which are of first order and imply the Yang-Mills equations which are of second order. For that reason, the Bogomolny equations (9.14) are refered as a self-duality equation. In fact, the analogy with self-dual Yang-Mills in Euclidean space can be pushed further. Since the Higgs is in the adjoint representaion, it has the same number of components as the dimension of the group. Therefore, introduce a fictitious fifth space dimension with cordinate x_4 and introduce a fifth component of the gauge potential as [33]

$$A^a_4 \equiv \phi^a \tag{9.15}$$

Then, since nothing depends upon x_4, we have

$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu A_4 + ie[A_\mu\,,\, A_4] = \partial_\mu A_4 - \partial_4 A_\mu + ie[A_\mu\,,\, A_4] = F_{\mu 4} \tag{9.16}$$

and $(\alpha = 0,1,2,3,4)$

$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi = -\mathcal{D}_\mu F^{\mu 4} = -\mathcal{D}_\alpha F^{\alpha 4} \tag{9.17}$$

In addition

$$\mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} + ie[A_4\,,\, F^{4\nu}] = \mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} + \mathcal{D}_4 F^{4\nu} = \mathcal{D}_\alpha F^{\alpha\nu} \tag{9.18}$$

Therefore, the equations

$$\mathcal{D}_\alpha F^{\alpha\beta} = 0\,; \qquad\qquad \alpha, \beta = 0,1,2,3,4 \tag{9.19}$$

are the same as the the equations of motion of the theory (7.1) for vanishing Higgs potential

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\nu F^{\mu\nu} &= ie[\phi\,,\, \mathcal{D}^\mu\phi] \\ \mathcal{D}^\mu\mathcal{D}_\mu\phi &= 0 \end{aligned} \tag{9.20}$$

Introducing the dual

$$f^{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}F_{\gamma\sigma} \tag{9.21}$$

we get the identity

$$\mathcal{D}_{\alpha}f^{\alpha\beta\gamma} = 0 \tag{9.22}$$

If we now impose

$$F^{\alpha\beta} = f^{\alpha\beta\gamma}v_{\gamma} \tag{9.23}$$

for some constant vector v_γ we get that (9.19) is automatically satisfied. Choosing

$$v = (1,0,0,0,0) \tag{9.24}$$

one gets that (9.23) becomes

$$F^{mn} = \tilde{F}^{mn}\,; \qquad F^{0m} = 0\,; \qquad m,n = 1,2,3,4 \tag{9.25}$$

where $\tilde{F}^{mn}\frac{1}{2}\varepsilon^{mnpq}F_{pq}$. But (9.25), together with $V(\phi) = 0$ are equivalent to (9.13) and (9.14). So, the Bogomolny equations are mathematically very close to the self-dual Yang-Mills equations.

9.1 The BPS monopole

Using the ansatz (8.18) one can check that the equations (9.13) and (9.14) are equivalent to (for time independent configurations)

$$\xi\frac{dK}{d\xi} = -K\,H\,; \qquad \xi\frac{dH}{d\xi} = H - (K^2 - 1) \tag{9.26}$$

The solution found by Prasad and Sommerfield in 1975 is quite simple

$$H = \xi\,\overset{\text{cotanh}}{\cancel{\cosh}}\,\xi - 1\,; \qquad K = \frac{\xi}{\sinh\xi} \tag{9.27}$$

Such solution corresponds to a monopole with magnetic charge $g = \frac{4\pi}{e}$ and mass $M = a \mid g \mid$. Contrary to the 't Hooft-Polyakov monopole, this is an exact solution. These solutions are called the BPS (Bogomolny-Prasad-Sommerfield) or self-dual monopoles.

At large distances we have

$$H(\xi) - \xi = 1 + O(\exp{(-\xi)})\;; \qquad \xi \to \infty \tag{9.28}$$

and therefore

$$\phi^a \to \langle\phi\rangle\frac{r^a}{r} + \frac{r^a}{er^2} + \ldots \tag{9.29}$$

So, the Higgs field approaches the vacuum at large distance much slower than in the 't Hooft-Polyakov monopole solution. That has to do with the fact that, although we have spontaneous breakdown of the gauge symmetry, generating mass for some gauge fields, the Higgs field itself is massless. Therefore, the BPS monopoles, contrary to the 't Hooft-Polyakov monopole, are not localized in space.

The fact that the photon and the Higgs are massless has an interesting consequence. The Higgs field intermediate a Coulomb type interaction between the charged gauge bosons which is always attractive, irrespective of the relative sign of their charges (as it is always true for interactions intermediated by spin zero particles). Since the Higgs couples to the gauge bosons with the same strength as the photon, it follows that it exactly cancels the repulsion, intermediate by the photon, between gauge bosons of the same charge, and doubles the attraction between bosons of opposite charges. That can be verified by calculating the scattering of gauge bosons at tree level.

An interesting result about BPS monopole dynamics was obtained by Manton in 1977 [34] by studying their scattering. He showed that BPS monopoles of opposite charge interact via a Coulomb potential when well separated. In addition, monopoles of the same charge do not interact when at rest, and monopoles of opposite charge have an attraction which is the double of that expected from the strength of their charges. Such result, compared to the static interaction of gauge particles, has reinforced the arguments in favor of a duality conjucture about the quantum theory of BPS monopoles [9, 8]. Montonen and Olive [8] have conjectured that the theory describing the dynamics of such monopoles is a gauge theory where the massive gauge bosons are the BPS monopoles, with the gauge coupling e replaced by its inverse. The massive gauge bosons would appear in the dual theory as solitons, like the BPS monopoles have risen in the original theory. In addition, the photon and the Higgs would be the same in both theories. The ideas concerning such conjecture have evolved a lot since then, and are the subject of the series of lectures by David Olive in this School [1].

One can also construct BPS dyon solutions. Their masses saturate the Bogomolny bound (9.11), and so are given $M = a\sqrt{q^2+g^2}$. The electric charge is given by $q = g\tan\theta = -\frac{4\pi}{e}\tan\theta$. Therefore, like the Julia-Zee dyons the electric charge of the BPS dyons are not fixed but can vary in a continuous range.

9.2 The Bogomolny moduli

Manton's result [34] mentioned above, allows a nice interpretation of the number of parameters entering in a N-monopole solution. The solution for one monopole has 4 parameters, where 3 of them account for its position and 1 for the $U(1)$ gauge symmetry (one can always rotate the solution in the internal space, since $U(1)$ is still a gauge symmetry of the theory). According to Manton, BPS monopoles of the same charge do not interact when at rest. Therefore, one can find static N-monopole solutions for the Bogomolny equations. The number of parameters of such solution is $4N$, with $3N$ to account for their positions and N for their $U(1)$ phases. One can in fact eliminate one parameter which correspond to a global rotation of the solution. Only the relative $U(1)$ phases are relevant. So, the N-monopole solution has in fact, $4N-1$ parameters.

Such result can be obtained more rigorously by studying the Bogomolny equations directly [35]. The Bogomolny equations are (9.14)

$$B_i^a = (\mathcal{D}_i\phi)^a \quad ; \qquad\qquad B_i^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}^a \tag{9.30}$$

where $i, j, k = 1, 2, 3$ and $a = 1, 2, 3$ are space and $SO(3)$ indices respectively.

A solução do monopolo de Wu-Yang (1968)

Esta é uma solução estática das eqs. de Yang-Mills sem campos de matéria, para o grupo SU(2).

~~Passemos para~~

A solução, em sua forma original, é dada por:

$$A_0^a = \delta_{a3}\, i\, \frac{c}{er}$$

$$A_i^1 = A_i^2 = 0$$

$$A_i^3 = -\frac{1}{2er}\, \mathrm{tg}\, \frac{\theta}{2}\, \hat{u}_i$$

onde $\hat{u}_i$ é um vetor unitário constante e (r, θ, φ) são as coordenadas esféricas.

Note que a solução é singular para $\theta = \pi$.

6 Sine-Gordon Model: an example of two types of particles

As we will discuss below, the monopole (if it exists) is a different type of particle. It does not appear as the excitations of the fields present in the Lagrangean defining the theory. It appears as classical solutions with very special properties known as solitons. In addition, the magnetic charge is not a charge associated to a symmetry of the Lagrangean, like the electric charge, but it appears as a topological charge. Therefore, to illustrate such ideas let us discuss a toy model where similar things happens.

The sine-Gordon model [23] is a two dimensional field theory with a scalar field ϕ, defined by the Lagrangean

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 + \frac{\mu^2}{\beta^2}\left(\cos\left(\beta\phi\right) - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - \frac{2\mu^2}{\beta^2}\left(\sin\frac{1}{2}\beta\phi\right)^2 \equiv T - V \qquad (6.1)\end{aligned}$$

The corresponding equation of motion is

$$\partial^2\phi + \frac{\mu^2}{\beta}\sin\beta\phi = 0 \qquad (6.2)$$

Notice that the potential V is periodic, and the theory is invariant under the discrete symmetries

$$\phi \to \phi + \frac{2\pi n}{\beta}\ ; \qquad \phi \to -\phi \qquad (6.3)$$

The theory possesses therefore an infinite number of vacua. That will play an important role in its properties.

First type of particle

Take the linearization of the equation (6.2)

$$\partial^2\phi + \mu^2\phi = 0 \qquad (6.4)$$

The quantum fluctuations around the vacuum solution $\phi = 0$, or any other vacuum $\phi = \frac{2\pi n}{\beta}$, give particles of mass

$$m = \mu\hbar \qquad (6.5)$$

The are the particles associated to the filed ϕ, and we call them fundamental particles.

Second type of particle

Let us look for classical solutions of the equation (6.2) with finite energy. In order for that to happen we need that the field should approach a vacuum at space infinity ($\phi \to \frac{2\pi n}{\beta}$

$X = tg\, y \qquad y = \text{arc tan}\, x$

$\sigma = 4\ \text{arc tan}\ x$

$\frac{dx}{dx} = 1 = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2 y} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 y} \qquad \frac{d}{d}$

$\frac{d(\text{arc tan} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

$1 + tg^2 = \frac{1}{\cos^2}$

as $x \to \pm\infty$). We shall denote $\sigma = \beta\phi$. The energy of the system (6.1) is then

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(\dot{\sigma}^2 + \sigma'^2 + \left(2\mu \sin\frac{\sigma}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(\dot{\sigma}^2 + \left(\sigma' \pm 2\mu\sin\frac{\sigma}{2}\right)^2 \mp 4\mu\sigma'\sin\frac{\sigma}{2}\right) \\ &\geq \mid \frac{2\mu}{\beta^2}\int_{\sigma(-\infty)}^{\sigma(\infty)} d\sigma\, \sin\frac{\sigma}{2} \mid = \mid \frac{4\mu}{\beta^2}\cos\frac{\sigma}{2} \mid_{\sigma(-\infty)}^{\sigma(\infty)} \\ &= \frac{8\mu}{\beta^2}\,; \qquad \text{if } \sigma(-\infty) = 0 \text{ and } \sigma(\infty) = 2\pi \end{aligned} \tag{6.6}$$

That constitutes some sort of Bogomolny bound on the energy, namely $E \geq \frac{8\mu}{\beta^2}$, and the saturation of such bound occurs when

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= 0 \\ \sigma' &= \pm 2\mu\sin\frac{\sigma}{2} \end{aligned} \tag{6.7}$$

These two first order differential equations imply the (second order) sine-Gordon equation of motion (6.2). In addition, notice that if $\sigma'(x_0) = 0$ for some finite x_0, then (6.7) imply that $\sigma^{(n)}(x_0) = 0$, i.e. all space derivatives at x_0 vanish. Therefore, non trivial solutions of (6.7) can not have vanishing derivative. The only way is for σ to interpolate between successive vacua as x varies from $-\infty$ to ∞. It can not interpolate between non successive vacua because $\sin\frac{\sigma}{2}$ and so σ' would vanish as it passes through intermediate vacua.

Consider the topological current

$$j^\mu \equiv \frac{1}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\sigma \tag{6.8}$$

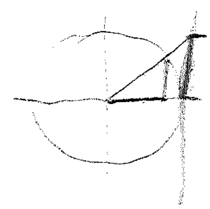
with corresponding topological charge

$$Q \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, j^0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \sigma' = \frac{1}{2\pi}\left(\sigma(\infty) - \sigma(-\infty)\right) \tag{6.9}$$

For the finite energy solutions one needs $\sigma(\pm\infty)$ to be a vacuum, and so such topological charge is quantized (classically), i.e. $Q \in \mathbb{Z}$. The equations (6.7) have two non trivial solutions with charges $Q = \pm 1$. For $Q = 1$ the solution interpolates between $\sigma(-\infty) = 0$ and $\sigma(\infty) = 2\pi$, whilst for $Q = -1$ it interpolates between $\sigma(-\infty) = 2\pi$ and $\sigma(\infty) = 0$. They are the soliton and anti-soliton solutions, respectively, of the sine-Gordon model. These solutions propagate without dispersion, and scatter with each other without losing their identities (the effect of scattering is a phase shift). Therefore, they behave like particles. It is legitimate to interpret the energy of such classical configurations in their rest frame (static solutions) as their classical masses. The soliton (and anti-soliton) mass is then

$$M = \frac{8\mu}{\beta^2} = \frac{8\mu}{\hbar\beta^2}m \tag{6.10}$$

$$\sin(2\arctan x) = 2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x) = 2\tan(\text{arc ta}) \cos^2(\text{arc ta}$$



$$= \frac{2x}{1+tg^2(\arctan x)} = \frac{2x}{1+x^2}$$

where m is the mass (6.5) of the fundamental particle associated to the field ϕ. Notice, that the weaker the coupling is (small β) the larger is the soliton mass. That already indicates that the soliton properties can not be studied perturbatively.

At the quantum level we have two types of particles. The quantum fluctuations of the field ϕ, with mass $\mu\hbar$ and vanishing topological charge, and solitons and anti-solitons of mass $\frac{8\mu}{\beta^2}$, with topological charges $Q = \pm 1$. The question now is what dynamics the solitons obey. The sine-Gordon model is one of the few theories where that question has been answered in a more detailed way [24, 25, 26]. The field associated to the solitons and anti-solitons obey the dynamics of the massive Thirring model, defined by the Lagrangean

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_F\bar{\psi}\psi - \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{6.11}$$

The massless Thirring model is exactly solvable [27] and one can then make a perturbation expansion in powers of m_F. Such expansion involves the n-point function of the operator $\bar{\psi}\psi$. On the other hand, one can make a perturbation expansion of the sine-Gordon model in powers of μ^2, which involves therefore the n-point functions of the operator $\cos\beta\phi$. Coleman [25] has shown that such n-point functions are the same for any n, if the following identifications are made

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2}{\beta^2}\cos\beta\phi &= -m_F\bar{\psi}\psi \\ -\frac{\beta}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi &= \frac{1}{\hbar}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ \frac{\beta^2\hbar}{4\pi} &= \frac{1}{1+g\hbar/\pi} \end{aligned} \tag{6.12}$$

In addition, such equivalence is only valid for $\beta^2 < 8\pi$, since for $\beta^2 > 8\pi$ the sine-Gordon Hamiltonian is unbounded below (for a more detailed discussion of such equivalence, see chap. 7 of [28]). The relations (6.12) are called the bosonization rules.

The Thirring model has a $U(1)$ global symmetry

$$\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi \tag{6.13}$$

and the corresponding conserved Noether current and charge are

$$j^\mu_{\text{Noet.}} = \frac{1}{\hbar}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \, ; \qquad Q_{\text{Noet.}} = \frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^\dagger\psi \tag{6.14}$$

So, the fields $\psi^\dagger$ and ψ have $Q_{\text{Noet.}}$ charges 1 and -1 respectively. Therefore, following Skyrme [24] one can identify the quantum solitons of the sine-Gordon theory as the particles associated to the Fermi fields of the Thirring model. The topological charge of sine-Gordon is then identified as the Noether charge of the Thirring model. Such equivalence between solitons and topological charges of one theory with fundamental particles and Noether charges of other theory, as we will see in the next sections, is perhaps what happens with magnetic monopoles and gauge particles in a non abelian gauge theory with symmetry spontaneously broken by a Higgs field. Such equivalence will constitute in fact, a generalization of the Maxwell-Dirac electromagnetic duality.

Aula 1 - O conceito de sóliton

Modelo de Sine-Gordon

Carga topológica

Eq. de Bogomolny   Teorema de Derrick

Energia $\propto \frac{1}{\beta^2}$

weak ⟷ strong coupling

Aula 2 - Modelo CP^1 / $O(3)$ não-linear

Carga topológica

Eq. Bogomolny → instantons

submodelo / curvatura nula

Aula 3 - Modelo de Skyrme-Faddeev

sólitons   Carga topológica de Hopf

Hopfions

vórtices

ansatz

Aula 4 - Monopolos Magnéticos

Aula 1

- Papel das simetrias em Física
  - Teorias de gauge - int. eletro., fraca, forte
  - Relatividade Geral. gravitação
- papel dos objetos fundamentais - partículas
  - ondas
- O que entender - simetrias das interações
  - problemas não perturbativos
- Simetrias escondidas
- Exemplo Sine-Gordon

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + \frac{m^2}{\beta} \sin(\beta \varphi) = 0$$

simetrias : Poincaré em 2d

$$\varphi \to \varphi + \frac{2\pi n}{\beta}$$

$$\varphi \to -\varphi$$

$$\partial_+ A_- - \partial_- A_+ + [A_+, A_-] = 0$$

$$A_+ = -\frac{m^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\beta\varphi} \\ \lambda e^{-i\beta\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_\pm = \frac{x_0 \pm x_1}{2}$$

$$A_\pm = A_0 \pm A_1$$

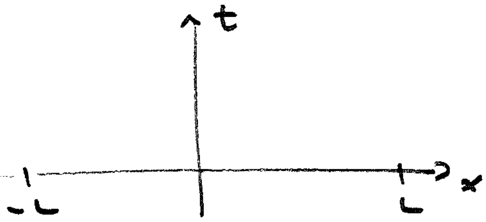
$$A_- = \begin{pmatrix} -\frac{i\beta}{2}\partial_-\varphi & 1/\lambda \\ 1 & \frac{i\beta}{2}\partial_-\varphi \end{pmatrix}$$

Simetria

$$A_\mu \to g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g\, g^{-1}$$

Cargas conservadas: autovalores de

$$W = P\, e^{\int_{-L}^{L} A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma}$$



Teorema de Stokes não abeliano: curvatura nula implica independência do caminho de integração.

Idéia p/ mais dimensões:

Superfície em M → caminho no espaço dos loops

Conexão no espaço dos loops:

Em 2+1 dim:

$$A = \int_\gamma d\sigma \, W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu$$

$$\frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0$$

curvatura nula $\delta A + A \wedge A = 0$

invariância por reparametrização implica

$$A \wedge A = 0$$

localidade → Coleman-Mandula.

Sine-Gordon (Cap 6 - Erice lectures)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{m^2}{\beta^2}\left(\cos(\beta\varphi) - 1\right)$$

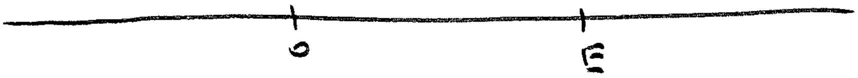
$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{2m^2}{\beta^2}\left(\sin\frac{\beta\varphi}{2}\right)^2$$

2 tipos de partículas :

$$\partial^2\varphi + m^2\varphi = 0 \quad \to \quad M = m\hbar$$

sóliton :

Energia de S.G eq. (6.6)



$$E' = \frac{1}{2\beta^2}\int_{-\infty} dx\left(\dot{\sigma}^2 + \left(\sigma' \pm 2\mu\sin\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$$

Escolhemos o sinal tal que $E - E' \geq 0$

I.5

$$\sigma' = \pm 2m \sin\frac{\sigma}{2} \rightarrow \quad \sigma'' = \pm 2m \frac{\sigma'}{2} \cos\frac{\sigma}{2}$$

$$= \pm 2m \left(\pm m \sin\frac{\sigma}{2}\right) \cos\frac{\sigma}{2}$$

$$= m^2 \sin\sigma$$

$$\ddot{\sigma} - \sigma'' + m^2 \sin\sigma = 0 \qquad (\dot{\sigma} = 0)$$

- $\sigma'(x_0) = 0 \rightarrow \sigma^{(n)}(x_0) = 0$
- só pode interpolar entre vácuos vizinhos.

Solution:

$$\sigma = \pm 4 \,\mathrm{ArcTan}\, e^{\pm m x} \rightarrow \mathrm{Tan}\left(\frac{\pm\sigma}{4}\right) = e^{\pm m x}$$

$$\mathrm{Tan}\,(\mathrm{ArcTan}\; x) = x \qquad y = \mathrm{ArcTan}\; x$$

$$\frac{d\,\mathrm{Tan}\,y}{dy}\,\frac{d\,\mathrm{ArcTan}\,x}{dx} = 1 \qquad \frac{d\,\mathrm{Tan}\,y}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \mathrm{Tan}^2 y$$

$$= 1 + x^2$$

$$\frac{d\,\mathrm{ArcTan}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sigma' = \pm 4 \frac{e^{\pm m x}}{1 + e^{\pm 2 m x}} (\pm m) = 4m \frac{\mathrm{Tan}\left(\pm\frac{\sigma}{4}\right)}{1 + \mathrm{Tan}^2\left(\pm\frac{\sigma}{4}\right)}$$

$$= 4m \frac{\mathrm{Tan}\left(\pm\frac{\sigma}{4}\right)}{\sin^2 + \cos^2} \cos^2\left(\pm\frac{\sigma}{4}\right) = 4m \sin\left(\pm\frac{\sigma}{4}\right) \cos\left(\pm\frac{\sigma}{4}\right)$$

$$= 2m \sin\left(\pm\frac{\sigma}{2}\right) = \pm 2m \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)$$

Aula 2

- Modelo O(3) sigma não linear

- Modelo CP^1

Lagrangeano, eqs de movimento, cargas Noether

carga topológica

Bogomolny bound

$$E = \int d^2x \left((\partial_0\phi)^2 + (\partial_m\phi)^2 \right) \qquad m = 1,2$$

$$= \int d^2x \Big[(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_m\phi_i - \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mn}\phi_j\partial_n\phi_k\right)^2$$

$$+ \varepsilon_{\underset{j}{i}\underset{i}{j}k}\varepsilon_{mn}\,\phi_{\underset{i}{j}}\,\partial_m\phi_{\underset{j}{i}}\,\partial_n\phi_k \Big]$$

$$\sum_{n=1}^{2} \varepsilon_{mn}\varepsilon_{nl} = \varepsilon_{m1}\varepsilon_{1l} + \varepsilon_{m2}\varepsilon_{2l} = \delta_{ml}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mn}\phi_j\partial_n\phi_k\,\varepsilon_{i\bar{j}\bar{k}}\varepsilon_{m\bar{n}}\phi_{\bar{j}}\partial_{\bar{n}}\phi_{\bar{k}} =$$

$$= \delta_{n\bar{n}}\left(\delta_{j\bar{j}}\delta_{k\bar{k}} - \delta_{j\bar{k}}\delta_{k\bar{j}}\right)\phi_j\phi_{\bar{j}}\partial_n\phi_k\partial_{\bar{n}}\phi_{\bar{k}}$$

$$= (\partial_n\phi_k)^2 - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\phi_j\partial_n\phi_j}}\;\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\phi_k\partial_n\phi_k}} = (\partial_n\phi_k)^2$$

$$Q = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\, \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mn}\phi_i\partial_m\phi_j\partial_n\phi_k$$

Bogomolny eqs:

$$\partial_m \phi_1 = \varepsilon_{mn} \left(\phi_2 \partial_n \phi_3 - \phi_3 \partial_n \phi_2 \right)$$

$$\partial_m \phi_2 = \varepsilon_{mn} \left(\phi_3 \partial_n \phi_1 - \phi_1 \partial_n \phi_3 \right)$$

$$\partial_m \phi_3 = \varepsilon_{mn} \left(\phi_1 \partial_n \phi_2 - \phi_2 \partial_n \phi_1 \right)$$

$$\partial_m (\phi_1 + i\phi_2) = \varepsilon_{mn} \left(-i (\phi_1 + i\phi_2) \partial_n \phi_3 - i\phi_3 \partial_n (\phi_1 \mp i\phi_2) \right)$$

$$u = u_1 + i u_2 = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{1-\phi_3} \rightarrow \quad u_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_3} \quad u_2 = \frac{\phi_2}{1-\phi_3}$$

$$\partial u_1 = \frac{\partial \phi_1}{1-\phi_3} + \frac{\phi_1 \partial \phi_3}{(1-\phi_3)^2} = \frac{\partial \phi_1 + \phi_1 \partial \phi_3 - \phi_3 \partial \phi_1}{(1-\phi_3)^2}$$

$$\partial u_2 = \frac{(1-\phi_3)\partial \phi_2 + \phi_2 \partial \phi_3}{(1-\phi_3)^2} = \frac{\partial \phi_2 + \phi_2 \partial \phi_3 - \phi_3 \partial \phi_2}{(1-\phi_3)^2}$$

$$\partial_1 u_1 = \frac{\partial_1 \phi_1 + \partial_2 \phi_2}{(1-\phi_3)^2} \qquad \partial_2 u_2 = \frac{\partial_2 \phi_2 + \partial_1 \phi_1}{(1-\phi_3)^2}$$

$$\partial_2 u_1 = \frac{\partial_2 \phi_1 - \partial_1 \phi_2}{(1-\phi_3)^2} \qquad \partial_1 u_2 = \frac{\partial_1 \phi_2 - \partial_2 \phi_1}{(1-\phi_3)^2}$$

So y*
$$\partial_1 u_1 = \partial_2 u_2$$
$$\partial_2 u_1 = -\partial_1 u_2$$
Cauchy - Riemann

Baby Skyrmion

$u = x_1 + i x_2$ $\qquad |u|^2 = x_1^2 + x_2^2 = r^2$

$$\phi = \frac{1}{1+r^2}\left(2x_1\,,\ 2x_2\,,\ r^2-1\right)$$

Take $f = 2\,\mathrm{ArcTan}\,\frac{1}{r} \to \mathrm{Tan}\,\frac{f}{2} = \frac{1}{r}$

$$1 + \mathrm{Tan}^2\frac{f}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{f}{2}} = 1 + \frac{1}{r^2} \to \cos^2\frac{f}{2} = \frac{r^2}{1+r^2}$$

$$\sin^2\frac{f}{2} = 1 - \frac{r^2}{1+r^2} = \frac{1+r^2-r^2}{1+r^2} = \frac{1}{1+r^2}$$

$$\cos^2\frac{f}{2} - \sin^2\frac{f}{2} = \cos f = \frac{r^2-1}{1+r^2}$$

$$2\cos\frac{f}{2}\sin\frac{f}{2} = \frac{2r}{1+r^2} = \sin f \to \frac{2x_1}{1+r^2} = \frac{x_1}{r}\sin f$$

$$\frac{2x_2}{1+r_2} = \frac{x_2}{r}\sin f$$

$\partial_1 u^* = 1 \qquad \partial_2 u^* = -i \qquad \varepsilon_{0ij}\,\partial^i u^*\,\partial^j u = 1\,i - (-i)\,1 = 2i$

$\partial_1 u = 1 \qquad \partial_2 u = i$

$$\frac{(-i)}{2\pi}\,\frac{\varepsilon_{0ij}\,\partial^i u^*\,\partial^j u}{(1+|u|^2)^2} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{(1+r^2)^2}$$

$$\int_0^\infty dr\int_0^{2\pi} r\,d\theta\ \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{(1+r^2)^2} = \frac{1}{\pi}\,2\pi\,\frac{1}{2}\int_0^\infty dr^2\,\frac{1}{(1+r^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{1+r^2}\Big|_0^\infty = \underline{1}$$

Aula 3

Modelos em d+1 dimensões

$$S = \int d^{d+1}x \, \left(H_{\mu\nu}^2\right)^{d/4}$$

$$H_{\mu\nu} = -2i \, \frac{(\partial_\mu u \, \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \, \partial_\mu u^*)}{(1+|u|^2)^4}$$

$$= \vec{n} \cdot (\partial_\mu \vec{n} \wedge \partial_\nu \vec{n})$$

$$\vec{n} = \frac{1}{1+|u|^2}\left(u+u^*, \, -i(u-u^*), \, |u|^2-1\right)$$

Derrick → energia invariante de escala

~~$A_\mu = \frac{1}{1+|u|^2}\left\{ -i \partial_\mu u \, T_+ \right.$~~

Eq. de movimento:

$$\partial^\mu K_\mu = 0$$

$$K_\mu = \left(H_{\rho\sigma}^2\right)^{\frac{d-4}{4}} H_{\mu\nu} \partial^\nu u$$

Note que $K_\mu \partial^\mu u = 0$

$K_\mu \partial^\mu u^* =$ real

Curvatura nula

$$A_\mu = \frac{1}{1+|u|^2}\left[-i\partial_\mu u\, T_+ - i\partial_\mu u^* T_- + (u\partial_\mu u^* - u^*\partial_\mu u)\, T_3\right]$$

$$B_\mu = \frac{1}{1+|u|^2}\left[K_\mu P_1^{(j)} - K_\mu^* P_{-1}^{(j)}\right]$$

$$\partial^\mu B_\mu = \frac{1}{(1+|u|^2)^2}\Big[\big(\partial^\mu K_\mu (1+|u|^2) - K_\mu \overset{①}{\cancel{\partial^\mu |u|^2}}\big) P_1^{(j)}$$

$$- \big((1+|u|^2)\partial^\mu K_\mu^* - K_\mu \overset{②}{\cancel{\partial^\mu |u|^2}}\big) P_{-1}^{(j)}\Big]$$

$$[A_\mu, B^\mu] = \frac{1}{(1+|u|^2)^2}\Big[\big[i\partial^\mu u\, K_\mu^* P_0^{(j)} + i\,\partial^\mu u^* K^\mu P_0^{(j)}\big]$$

$$+ K^\mu (\overset{①}{\cancel{u\partial_\mu u^*}} \underbrace{- u^*\partial_\mu u)}_{0} P_1^{(j)} - K_\mu^* \underbrace{(u\partial_\mu u^*}_{0} \overset{②}{\cancel{- u^*\partial_\mu u}}) P_{-1}^{(j)}\Big]\Big]$$

Portanto temos $\partial^\mu K_\mu = 0$ p/ qualquer j

Na verdade

$$J_\mu = \frac{\delta G}{\delta u} K_\mu - \frac{\delta G}{\delta u^*} K_\mu^*$$

$$G = G(u, u^*)$$

Soluções: Secção 5 do review IJMPA

Carga de Hopf: definição

$$u = \sqrt{\frac{1-g}{g}}\, e^{i\theta} \qquad \theta = \theta_1 + \theta_2$$

$$z_1 = \sqrt{1-g}\, e^{i\theta_1} \qquad z_2 = \sqrt{g}\, e^{-i\theta_2} \rightarrow \quad u = \frac{z_1}{z_2}$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \longrightarrow S^3$$

$$Q = \frac{1}{4\pi^2}\int d^3x\, \vec{A}\cdot(\vec{\partial}\wedge\vec{A})$$

$$\vec{A} = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{2}\left[z_k^* \vec{\partial} z_k - z_k \vec{\partial} z_k^* \right]$$

$$R^3 \longrightarrow S^3_z \longrightarrow S^2_u$$

SFI5876 - Teorias de gauge não abelianas e sólitons

Lista de Exercícios 1

1. Calcular a corrente de Noether associada à simetria de gauge da Lagrangeana
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} + \left(D_\mu \psi\right)^*\, D^\mu \psi$$
onde
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad\qquad D_\mu = \partial_\mu \psi + ieA_\mu \psi$$

2. Calcule a razão das forças elétrica entre dois elétrons e a magnética entre dois monopolos magnéticos de menor carga permitida. Assuma que a menor carga elétrica no Universo seja a do elétron. Assuma também que a distância entre os elétrons e os monopolos magnéticos sejam as mesmas.

3. Considere a experiência de Bohm-Aharanov de difração por duas fendas na presença de um solenóide. A experiência é realizada primeiramente com elétrons e depois com núcleos de hélio (partículas α). Calcule a razão das diferenças de fases observadas com campo magnético nulo e depois não nulo nas duas experiências.

4. Calcule as equações de movimento (Euler-Lagrange) associadas as sistema
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\text{Tr}\, \left(F_{\mu\nu}\right)^2 + \left(D_\mu \phi\right)^\dagger D^\mu \phi - V\left(\mid \phi \mid\right)$$
onde ϕ é um multipleto de bósons escalares que transformam sob uma representação R do grupo G de gauge.

   Calcule a corrente de Noether associada à simetria de gauge do sistema.

   Temos
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ie\left[\, W_\mu\, ,\, W_\nu\, \right] \qquad D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ieR\left(W_\mu\right) \phi$$

SFI5876 - Teorias de gauge não abelianas e sólitons

Lista de Exercícios 2

1. Calcule as equações de movimento (Euler-Lagrange) associadas as sistema
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\text{Tr}\,\left(F_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\left[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\left(D_{\mu}\psi\right) - \left(D^{\mu}\bar{\psi}\right)\gamma_{\mu}\,\psi\right]$$
onde ψ é um multipleto de N espinores de Dirac e
$$D_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi + i\,e\,R\left(W_{\mu}\right)\psi$$
onde R é uma representação matricial de dimensão N do grupo de gauge G, e
$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}W_{\nu} - \partial_{\nu}W_{\mu} + ie\left[\,W_{\mu}\,,\,W_{\nu}\,\right]$$
Calcule a corrente de Noether associada à simetria de gauge do sistema.

2. Mostre que a configuração de campos de gauge do $SU(2)$ dada por
$$eW_{\mu} = \frac{x^2}{x^2+\lambda^2}\left(-i\,\partial_{\mu}g\,g^{-1}\right)$$
onde $x^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x_{\mu}^2$, e
$$g = \frac{\vec{x}\cdot\vec{\sigma} \pm i x_0}{\sqrt{x^2}}$$
com σ_i, $i = 1, 2, 3$, sendo as matrizes de Pauli, é uma solução (instanton) das equações de auto-dualidade no espaço Euclideano
$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \tilde{F}^{\mu\nu} = \pm F^{\mu\nu}$$
Calcule a carga topológica desta solução
$$Q = \frac{1}{4}\int d^x\,\text{Tr}\,\left(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right)$$

Lista nº 3

Considere uma teoria de gauge com grupo $SU(2) \times U(1)_Y$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathrm{Tr} \left(F_{\mu\nu} \right)^2 - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^2 + (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi + V(\phi)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - i \frac{g}{2} [W_\mu, W_\nu] = F_{\mu\nu}^i \sigma_i$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2 i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

e

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i \frac{g'}{2} B_\mu \phi - i \frac{g}{2} W_\mu^i \sigma_i \phi$$

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

e ϕ é um dubleto (complexo) de $SU(2)$

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}$$

Temos que

$g \equiv$ constante de acoplamento de gauge $SU(2)$

$g' \equiv$ " " " " " $U(1)_Y$

O gerador do $U(1)_Y$ é a hipercarga Y:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e as matrizes de Pauli são:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Determine os valores de ϕ que minimizam o potencial (com $\mu^2 > 0$ e $\lambda > 0$)

2) Determine o subgrupo de gauge que resta após a quebra espontânea de simetria quando o vácuo escolhido é:

$$\phi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Qual o(s) gerador(es) deste subgrupo, escrito em termos dos geradores de $SU(2) \times U(1)_Y$.

3) Calcule as massas dos bosons de gauge após a quebra de simetria.