

Física Experimental IV

<https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=90535>

2º Semestre 2021

Exp. 2 – Computador Óptico

Atividade 4 – Simulação, plano de Fourier

Semana 7 - 7/Outubro

Prof. Henrique Barbosa

hbarbosa@if.usp.br

<http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa>

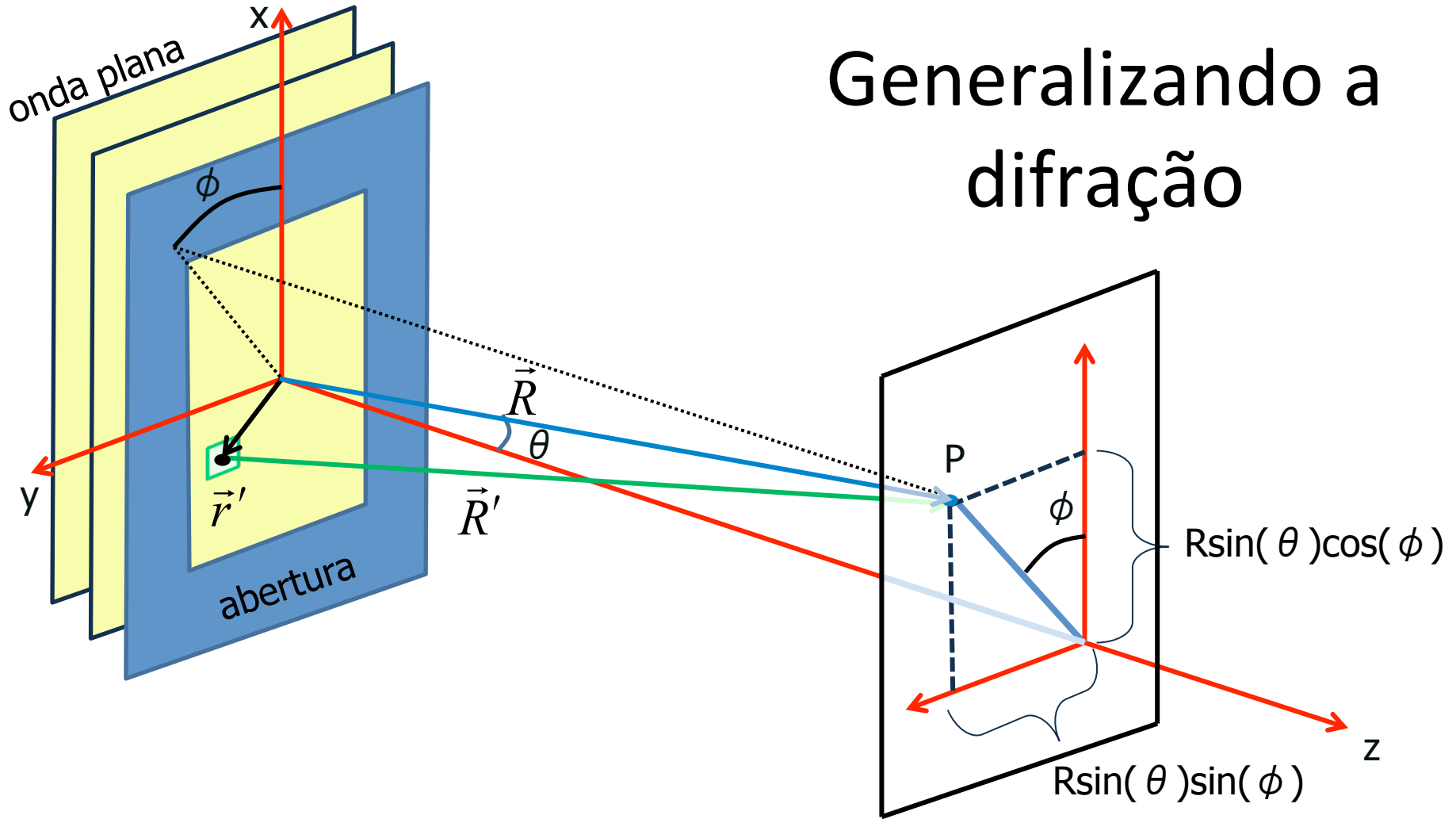
Exp. 2 – Computador Óptico

- Objetivos
 - Investigar a natureza ondulatória da luz através do estudo da difração e interferência.
 - Estudar a difração como uma transformada de Fourier.
 - Construir um computador ótico.

Cronograma

- 5 atividades:
 - **Atividade 1:** Estudo qualitativo de difração e interferência
 - **Atividade 2:** Estudo quantitativo de difração em fendas simples
 - **Atividade 3:** Processamento de imagens (ImageJ)
 - **Atividade 4:** Simulação do computador óptico, Plano de Fourier
 - **Atividade 5:** Aplicação do computador óptico, objeto vs. sua T.F.

Generalizando a difração



Generalizando a difração

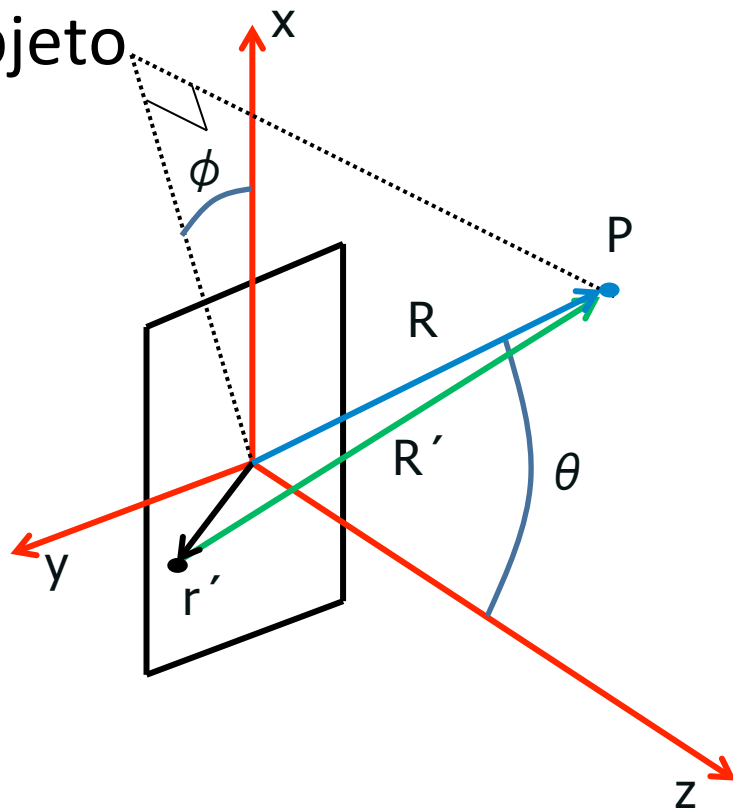
- Campo elétrico incidente no objeto

$$\hat{E} = E_0 e^{j\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t}$$

- Por simplicidade:

$$\hat{E} = E_0 e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

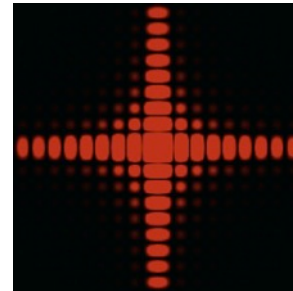
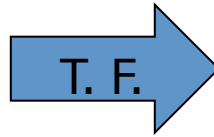
- Qual o campo elétrico em R?



Difração e transformada de Fourier

- A figura de difração está relacionada à transformada de Fourier do objeto iluminado

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$



Difração e transformada de Fourier

- A intensidade luminosa em uma dada posição está relacionada às intensidades para cada frequência espacial

$$\hat{E}(\vec{R}) \rightarrow \hat{E}(R_x, R_y) \rightarrow \hat{E}(k_x, k_y)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \varphi \\ k_y = k \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

Difração e Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier em 2D

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

- Difração de Fraunhofer:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Generalizando ainda mais a TF

- Para uma onda plana incidente:
 - $E_0(x,y)$ é constante.
- Uma onda qualquer pode ser decomposta numa soma de ondas planas.
 - Então já consideramos todos os casos?
- Não! E se a abertura **não** for uma fenda? E se houver uma **lente** ou um **objeto opaco** que modifiquem a **amplitude** ou a **fase** de $E(x,y)$ em cada ponto?

Generalizando ainda mais

- Se houver uma lente, o que interessa é o campo transformado por ela, ou seja:

$$E_0(x, y) \xRightarrow{\text{LENTE}} \varepsilon(x, y)$$

A função da abertura é o campo incidente transformado pelo objeto/fenda/lente/etc onde ocorre a difração.

Generalizando ainda mais

- A distribuição de campo elétrico na figura de difração de Fraunhofer é a transformada de Fourier da distribuição do campo elétrico na abertura.

$$\hat{E}(k_x, k_y) = \iint \varepsilon(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint \hat{E}(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Exemplo: Fenda Simples

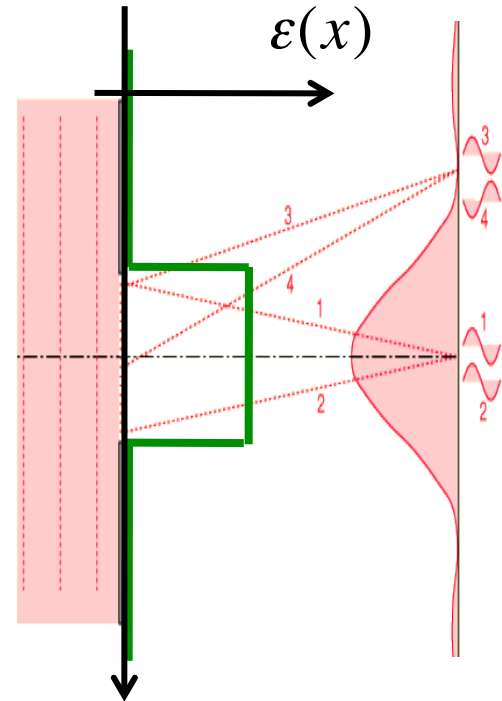
- Na fenda simples

$$\hat{E}(k_x) = \int \varepsilon(x) e^{-jk_x x} dx$$

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int E(k) e^{jk_x x} dk$$

- A função da abertura é:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} E_0, & \text{se } |x| < d/2 \\ 0, & \text{se } |x| > d/2 \end{cases}$$



Exemplo: Fenda Simples

- Vamos fazer a integral da onda quadrada:

$$\hat{E}(k_x) = \int \varepsilon(x) e^{-jk_x x} dx = E_0 \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jk_x x} dx = E_0 \left[\frac{e^{-jk_x x}}{-jk_x} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

- Lembrando da notação complexa para o seno:

$$\hat{E}(k) = \frac{E_0}{k_x} \frac{\left(e^{+jk_x d/2} - e^{-jk_x d/2} \right)}{j} = 2 \frac{E_0}{k_x} \sin(k_x d / 2)$$

Exemplo: Fenda Simples

- Multiplicando e dividindo por d , temos:

$$\hat{E}(k_x) = E_0 d \frac{\sin(k_x d / 2)}{k_x d / 2}$$

- O k_x é a projeção do vetor de onda em x :

$$k_x = k \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

- Como só temos 1 dimensão: $k_x = k \sin(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta)$

Exemplo: Fenda Simples

- Portanto, o campo elétrico fica:

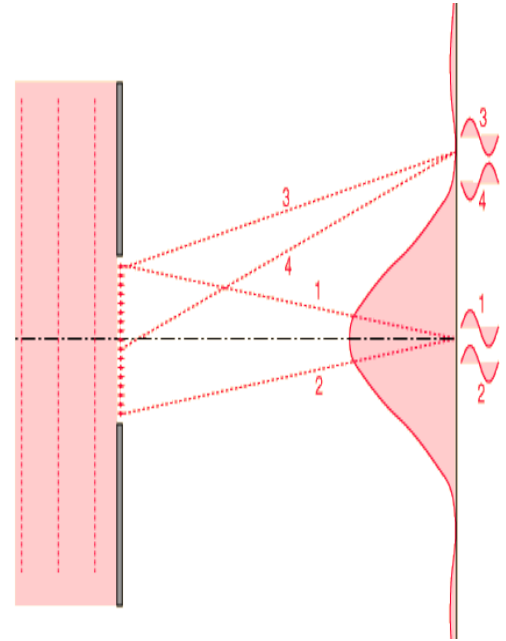
$$\hat{E}(k) = E_0 d \frac{\sin \beta}{\beta}$$

A intensidade depende da largura da fenda

$$\beta = \frac{k_x d}{2} = \pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

Exatamente o que tínhamos antes!



Exemplo: T.F.

- Qual a posição e a intensidade dos máximos?

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \beta = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

- Para **os máximos SECUNDÁRIOS**, **$\sin(\beta)=\pm 1$**

$$\sin \beta = 1 \Rightarrow \beta = \pm(2m + 1) \frac{\pi}{2}, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta = \pm(2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

Exemplo: T.F.

- E as posições são:

$$\Rightarrow \sin \theta_{\max} = \pm \frac{\lambda}{2d}, \pm 3 \frac{\lambda}{2d}, \pm 5 \frac{\lambda}{2d}, \dots$$

- Portanto **os máximos SECUNDÁRIOS** ficam

$$I(\theta_{\max}) = \frac{I_0}{\beta^2} = \frac{1}{(2m+1)^2} \frac{4I_0}{\pi^2} = 1 \frac{4I_0}{\pi^2}, \frac{1}{9} \frac{4I_0}{\pi^2}, \frac{1}{25} \frac{4I_0}{\pi^2}, \dots$$

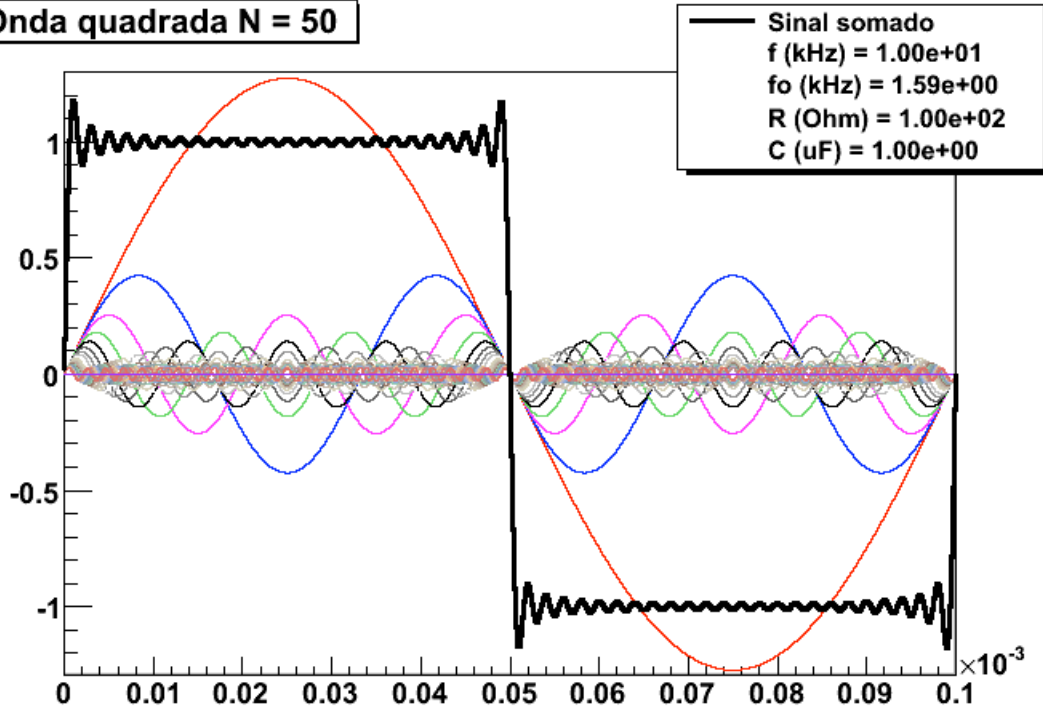
$$k_x = \pm k_1, \pm 3k_1, \pm 5k_1, \dots \quad \left| \hat{E} \right| = E_1, \frac{E_1}{3}, \frac{E_1}{5}, \dots$$

Lembram da T.F. da onda quadrada ?

Exemplo: Onda Quadrada

$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$

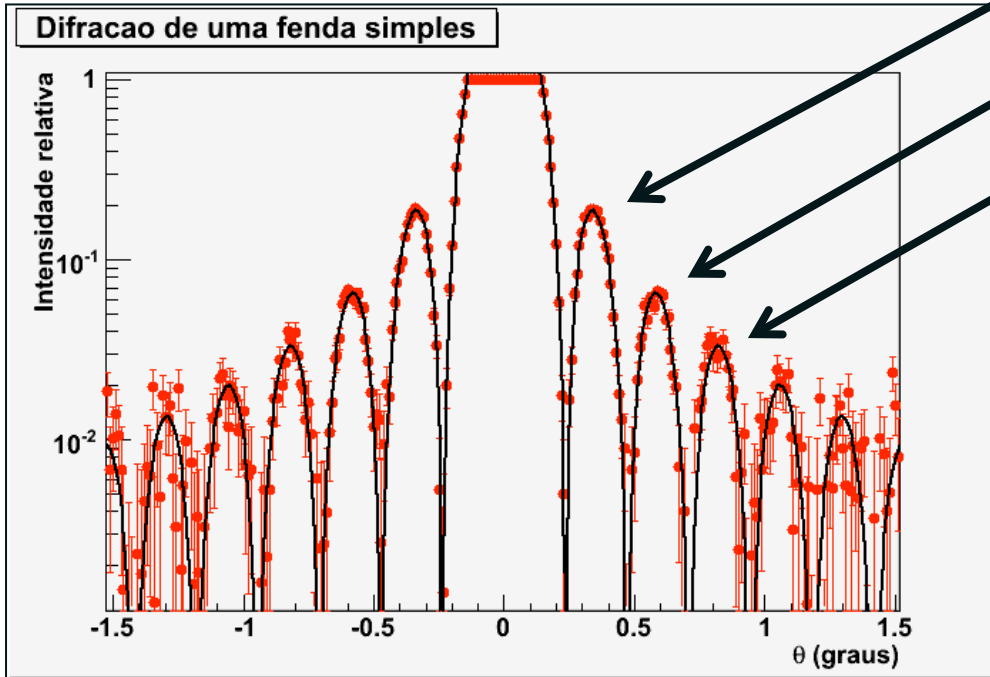
Onda quadrada N = 50



Freq	Amp
ω	1
3ω	$1/3$
5ω	$1/5$
...	...

Exemplo: Onda Quadrada

$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$



Freq	Amp
ω	1
3ω	$1/3$
5ω	$1/5$
...	...

Computador óptico

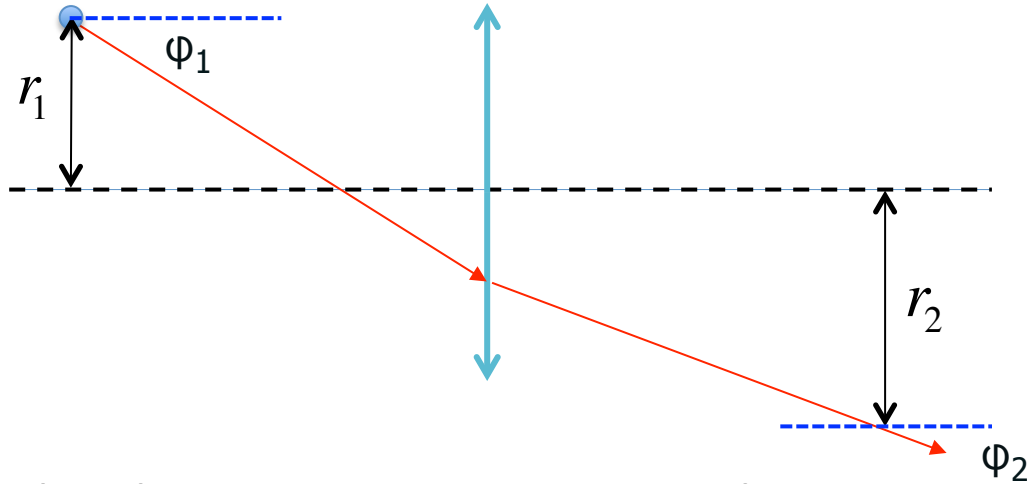
- Condição de Fraunhofer é $F = d^2/\lambda L. \ll 1.$
- No caso das fendas fotografadas:

$$F = \frac{d^2}{\lambda L} = \frac{(72 \times 10^{-6})^2}{633 \times 10^{-9} \cdot 1.194} = 0.007$$

- Mas no caso de objetos maiores (computador óptico), não será possível observar a figura de difração de Fraunhofer.

Lente simples

- Seja um raio luminoso em um sistema óptico do tipo:



- Vamos relembrar como tratamos as lentes...

T.F. e o método matricial

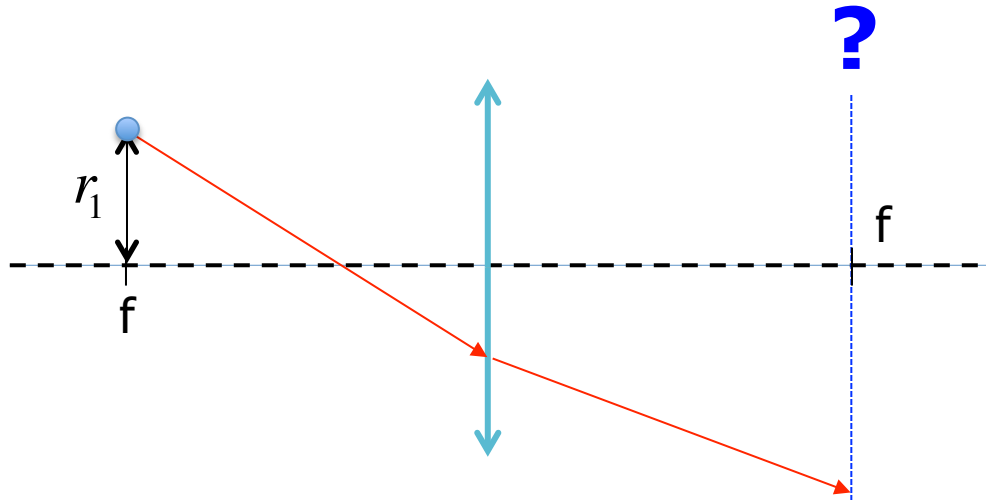
- Seja uma transformação do tipo:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = Ar_1 + B\varphi_1 \\ \varphi_2 = Cr_1 + D\varphi_1 \end{cases}$$

- Se $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, todos os raios de mesmo ângulo $\boldsymbol{\phi}_1$ passam pelo mesmo ponto \mathbf{r}_2
- Se $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, todos os raios de mesmo ponto de origem \mathbf{r}_1 emergem com o mesmo ângulo do sistema óptico $\boldsymbol{\phi}_2$.

Lente simples

- Agora vamos considerar uma fonte pontual no plano focal da lente: o aparece no outro plano focal?

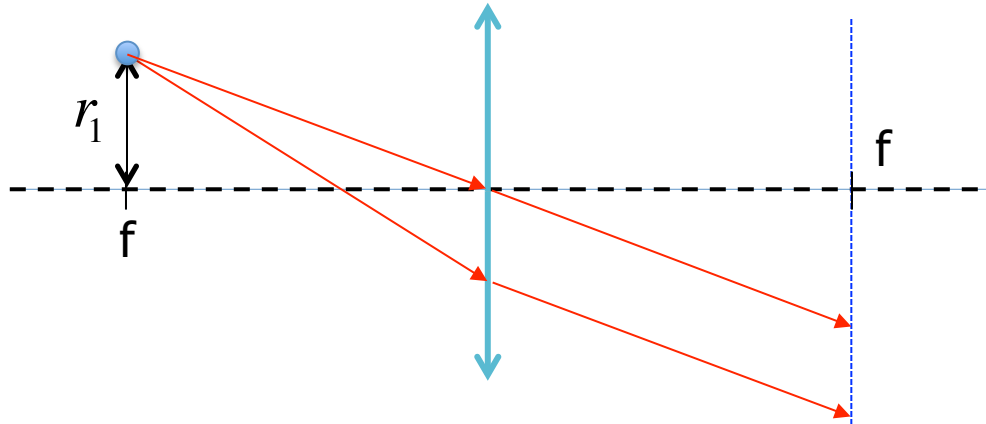


Calculando...

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

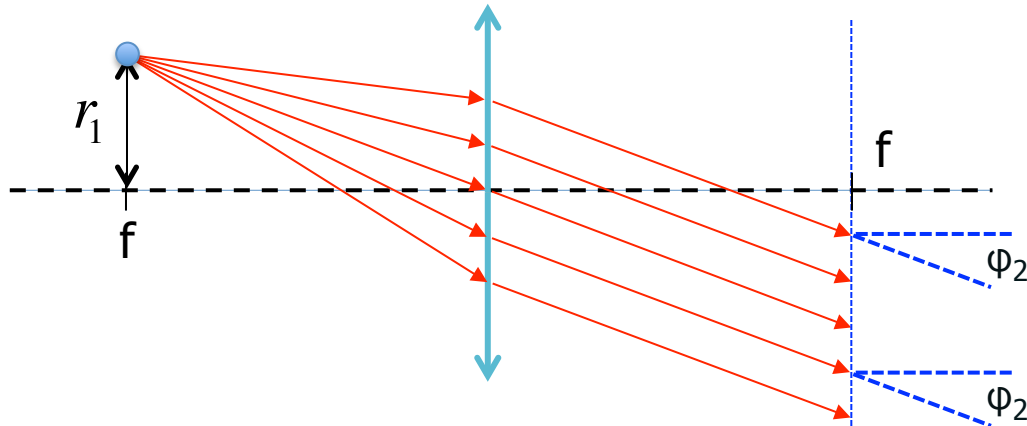
$$r_2 = f\varphi_1$$
$$\varphi_2 = -\frac{1}{f}r_1$$

- O ângulo depende apenas da posição, ou seja, os raios emergem paralelos (onda plana)



Lente simples

- Fonte pontual no plano focal: **saída é uma onda plana**
 - O que está acontecendo? Porque um fonte pontual se transforma em uma onda plana??



$$r_2 = f\varphi_1$$
$$\varphi_2 = -\frac{1}{f}r_1$$

Função delta

- A transformada de Fourier: $g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-jkx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$
- A transformada inversa: $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{jkx} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}$
- Usando $f(x)$ na definição de $g(x)$, temos:

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(K)e^{jKx} \frac{dK}{\sqrt{2\pi}} \right] e^{-jkx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(K) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(K-k)x} dx \right] dK$$

Função delta

- A expressão tem que ser verdade para qualquer $g(k)$

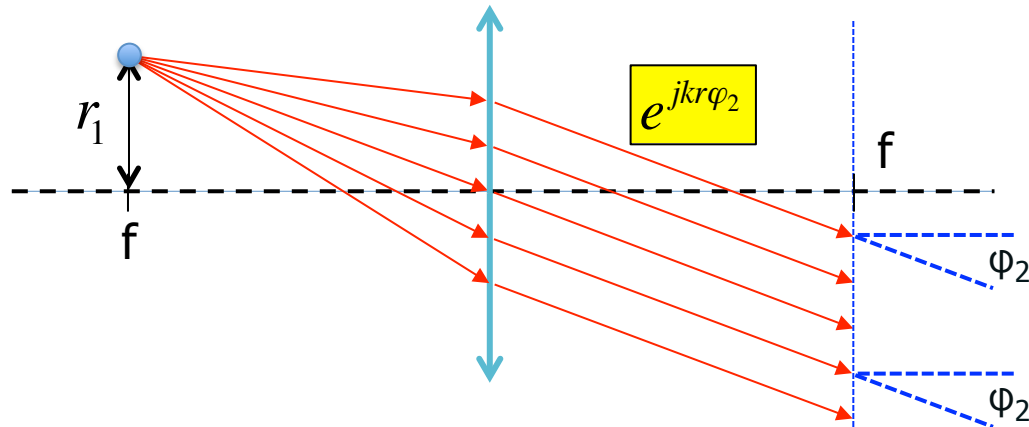
$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(K) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(K-k)x} dx \right] dK$$

- Então o termo entre [] é uma função delta de Dirac

$$\delta(K - k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(K-k)x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jKx}}{\sqrt{2\pi}} e^{-jkx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

Lente simples

- Fonte pontual no plano focal: a distribuição do campo elétrico é proporcional à transformada de Fourier
- A transformada exata aparece na posição **f**. Há uma fase em outras posições (mas só estamos medindo a intensidade).



Lente simples

- A onda plana é:

$$e^{jkr\varphi_2} = e^{j\frac{2\pi}{\lambda}r\varphi_2} = e^{j2\pi\mu r}, \quad \mu = \frac{\varphi_2}{\lambda} = \frac{r_1}{f\lambda}$$

- Como μ é uma frequência espacial, tem dimensão de $\mathbf{1/[L]}$, de tal forma que $\mathbf{d=1/\mu}$ tem dimensão de $\mathbf{[L]}$:

$$\mu = \frac{\varphi_2}{\lambda} \Rightarrow d\varphi_2 = \lambda$$

Finalmente...

- A equação de primeira ordem de um objeto difrator é

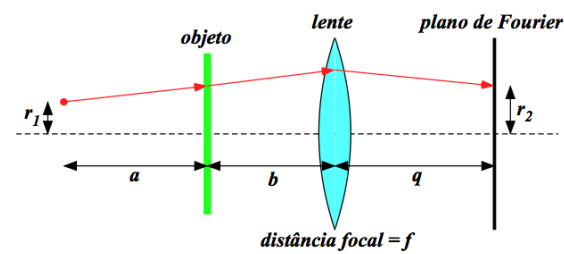
$$d\varphi_2 = \lambda$$

Lembrar da equação:

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$$

- O padrão de difração corresponde à transformada de Fourier (do campo elétrico), e a lente permite obter essa TF na distância **f**.

Generalizando...

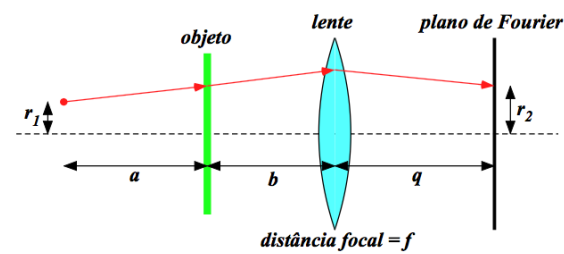


- Se calcularmos a matriz de transferência dessa situação (deduzam), vamos obter:

$$r_2 = \left(1 - \frac{q}{f}\right)r_1 + \left(a + b - \frac{aq}{f} - \frac{bq}{f} + q\right)\phi_1 + \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

$$\phi_2 = -\frac{r_1}{f} + \left(-\frac{a}{f} - \frac{b}{f} + 1\right)\phi_1 + \left(1 - \frac{b}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

Generalizando...



- r_2 deve ser independente de φ_1

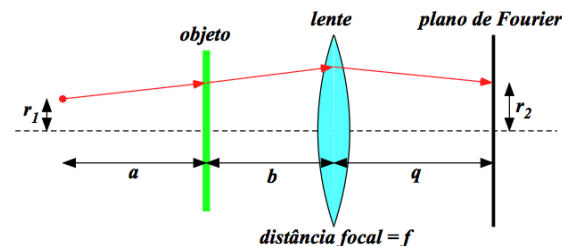
$$a + b - (a + b) \frac{q}{f} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a + b}$$

- O padrão de difração (r_2) não pode depender da direção dos raios que são emitidos pela fonte (independente de φ_1).
- q é a posição do Plano de Fourier (onde aparece a difração).

Posição do plano de fourier

- A posição do plano de Fourier de uma lente depende tanto da posição da fonte (**a**) quanto do objeto em relação a lente (**b**).

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a+b}$$



- Caso a fonte esteja no infinito, o plano de Fourier encontra-se na distância focal da lente e **INDEPENDENTE** da posição do objeto.

$$a \rightarrow \infty \Rightarrow q = f$$

“Tamanho” da transformada

- A posição, já sem o termo em φ_1 :

$$r_2 = \left(1 - \frac{q}{f}\right)r_1 + \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

- Se a fonte está no eixo óptico ($r_1=0$):

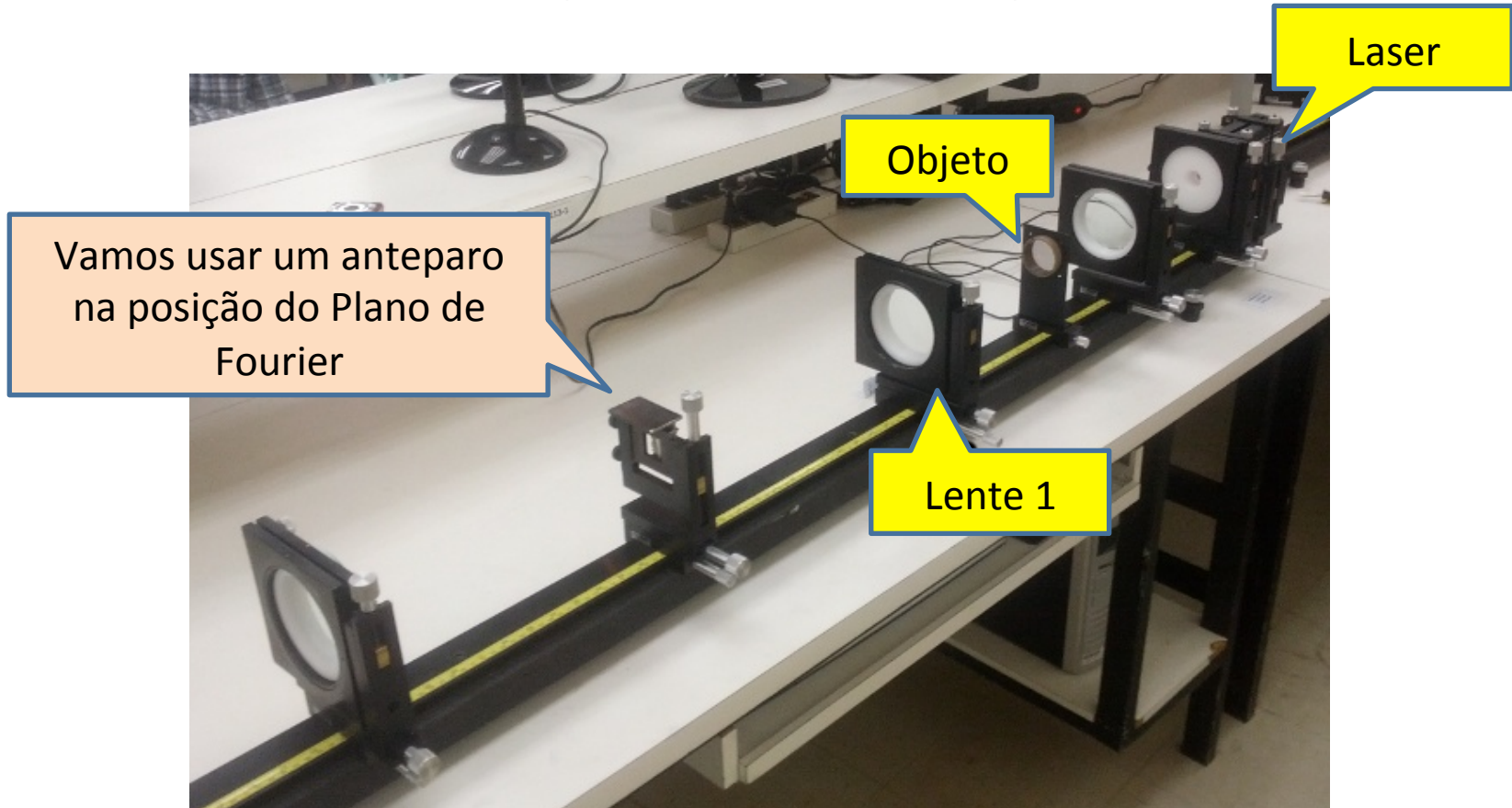
$$\Rightarrow r_2 = \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

$$= \left(\frac{qa}{a+b}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

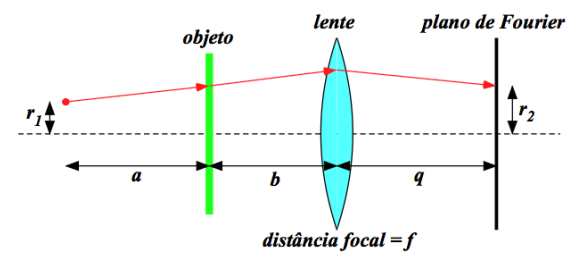
- Se o objeto está na distância focal, $\mathbf{b=f}$,
e/ou a fonte está no infinito, $\mathbf{q=f}$:

$$\Rightarrow r_2 = f \frac{m\lambda}{d}$$

Computador Óptico



Atividades

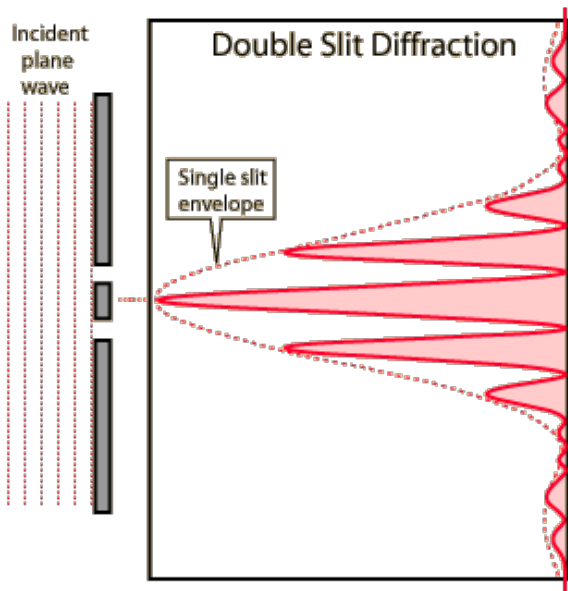


- Simular o computador óptico com o Optgeo
 - Variar a fonte: raios paralelos a fonte pontual
 - Variar a posição do objeto e da lente convergente
 - Medir o tamanho da transformada
- Objetivo: entender o funcionamento do computador óptico e a teoria por traz

Montagem

- Desenhe no Optgeo
 - A lente divergente (começar com $f_d=100\text{mm}$)
 - A **rede de difração** com 300 linhas/mm
 - mostrando as ordens $m= -1, 0, 1$
 - distante 200 mm da lente divergente
 - A lente convergente com $f_c = 200\text{ mm}$
 - Um feixe vermelho de 633 nm
 - 5 raios e diâmetro de 40 mm.

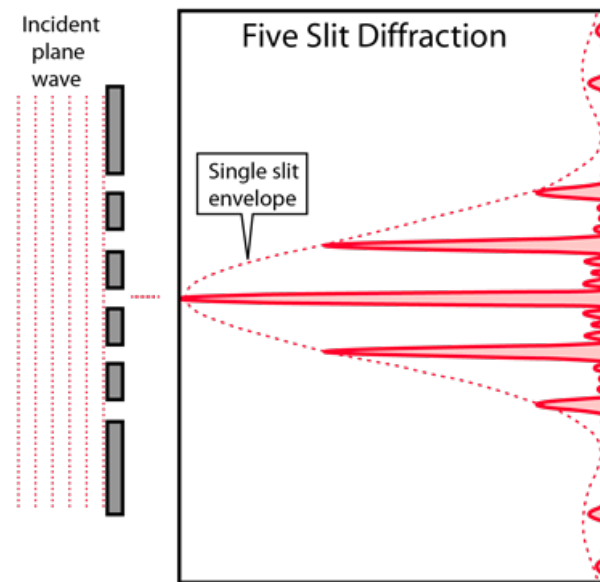
Fenda dupla x Rede de difração

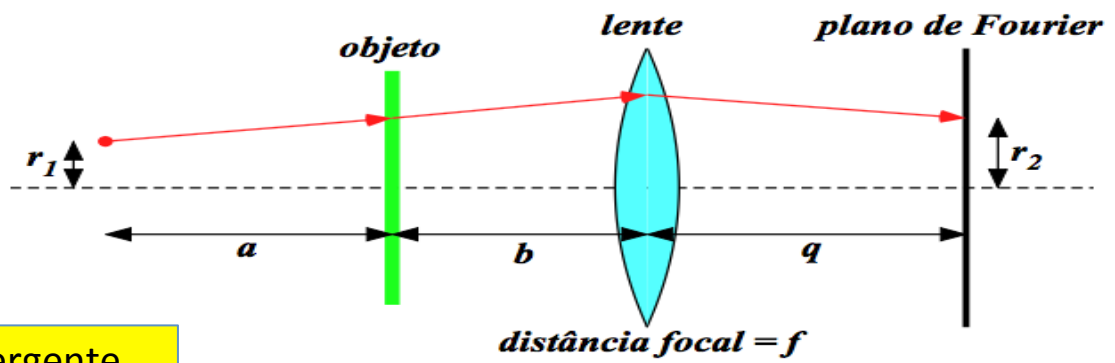


Na medida em que aumentamos o número de fendas, os máximos ficam bem localizados.

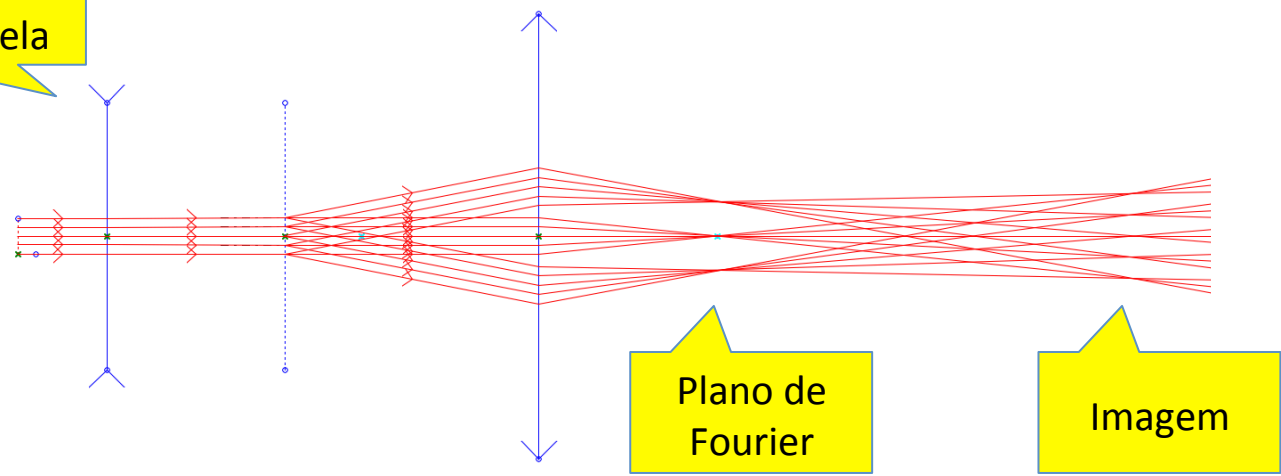
Rede de difração

- Muitas fendas espaçadas de d
- Máximos em $m\lambda = d \sin(\theta)$

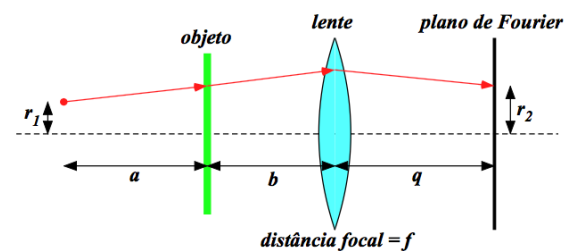




Lente divergente para variar a fonte pontual => paralela

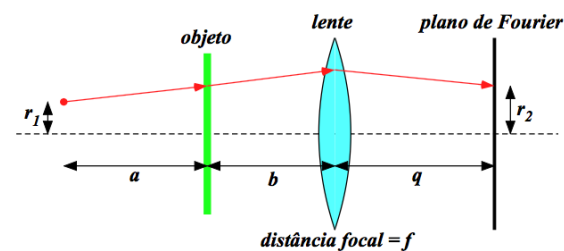


Análise



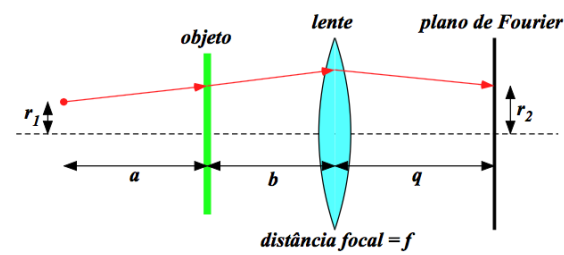
- Feixe paralelo:
 - Sem retirar a lente divergente, escolha um valor de f_d adequado para simular um feixe paralelo.
 - Verificar o que acontece com o plano de Fourier e tamanho da imagem nesse plano ao se mover horizontalmente a lente convergente ou o objeto.
 - Explicar o que foi observado.
 - Medir a posição do plano de Fourier e o tamanho da imagem nesse plano para $m = 1$ e comparar com o obtido por meio das equações.

Análise



- Variar fd para simular diferentes distâncias (a) da fonte ao objeto.
 - casos $fd = 100$ mm e $fd = 400$ mm
- Variar a distância do objeto à lente convergente (b).
 - casos $b = 300$ mm e $b = 400$ mm.
- Nas 04 combinações possíveis
 - Determine a posição do plano de Fourier e tamanho da TF (para $m = 1$)
 - Comparar com o calculado com as equações de hoje
 - Determine a posição e tamanho da imagem
 - Compare com o calculado pelas equações de Gauss e do aumento linear

Discutir



- Quantos pontos temos na TF? Porque?
- Quantos pontos temos na Imagem? Porque?
- Observando o plano de Fourier e a imagem do objeto formada, vocês conseguem vislumbrar um filtro que possa eliminar, por exemplo, um ponto da extremidade da imagem? Justifique.

Para a nossa AT4



Atividade 4 - Estudo da posição e tamanho do plano de Fourier por meio de simulação



Slides sobre a Atividade 4 e 5



Síntese da Atividade 4 do Experimento 2



Video do prof. Nelson explicando a simulação no Optgeo.
Vejam a partir de 19min 45seg

<https://www.youtube.com/watch?v=D5TjfLoa6YE>

Na nossa pasta

Aula com os pedidos:

- [EXP2_CompOptico_Aula_04_2021.pdf](#) ✓