

# Física Experimental IV

<https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=90535>

2º Semestre 2021

Exp. 2 – Computador Óptico

Atividade 3 – Processamento de Imagens

**Semana 6 - 30/Setembro**

Prof. Henrique Barbosa

[hbarbosa@if.usp.br](mailto:hbarbosa@if.usp.br)

<http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa>

# Exp. 2 – Computador Óptico

- Objetivos
  - Investigar a natureza ondulatória da luz através do estudo da difração e interferência.
  - Estudar a difração como uma transformada de Fourier.
  - Construir um computador ótico.

# Cronograma

- 5 atividades:
  - **Atividade 1:** Estudo qualitativo de difração e interferência
  - **Atividade 2:** Estudo quantitativo de difração em fendas simples
  - **Atividade 3:** Processamento de imagens (ImageJ)
  - **Atividade 4:** Simulação do computador óptico, plano de Fourier
  - **Atividade 5:** Aplicação do computador óptico, objeto vs. sua T.F.

# Três “aproximações” para a ótica:

- **Ótica geométrica**

$\lambda \rightarrow 0$  e a luz é tratada como raio

- **Ótica física**

Princípio de Huygens-Fresnel: cada frente de onda é uma superposição de ondas esféricas

- **Ótica de Fourier**

Trata a propagação da luz como uma série de ondas planas: para cada ponto de uma frente de onda há uma onda plana cuja propagação é normal àquele ponto

# Joseph Fourier(1768-1830)

- História do Fourier:
  - <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fourier/>
- Aos 31 anos é nomeado por Napoleão prefeito de Grenoble.
  - Trabalhou então na drenagem dos pântanos da Borgonha.
  - Trabalho científico mais importante: *Sobre a propagação de calor em corpos sólidos.*
  - Só haviam soluções particulares para fontes de calor senoidal. Fourier então mostrou que função qualquer pode ser escrita como uma combinação linear de senos e cossenos



# Propagação do calor

- Fourier lê seu trabalho em 1807, no Instituto de Ciências de Paris:
  - Laplace e Lagrange não aceitam a derivação teórica
  - Biot reclama que não citou seu paper de 1804 (estava errado!)
- O Instituto cria um prêmio para quem resolvesse a equação de transporte de calor e Fourier submeteu o tratado de 1807.
  - O trabalho ganha o prêmio, mas a banca (Lagrange, Laplace, Malus, Haüy e Legendre) faz ressalvas:

*... the manner in which the author arrives at these equations is not exempt of difficulties and that his analysis to integrate them still leaves something to be desired on the score of generality and even rigour.*

# Séries de Fourier

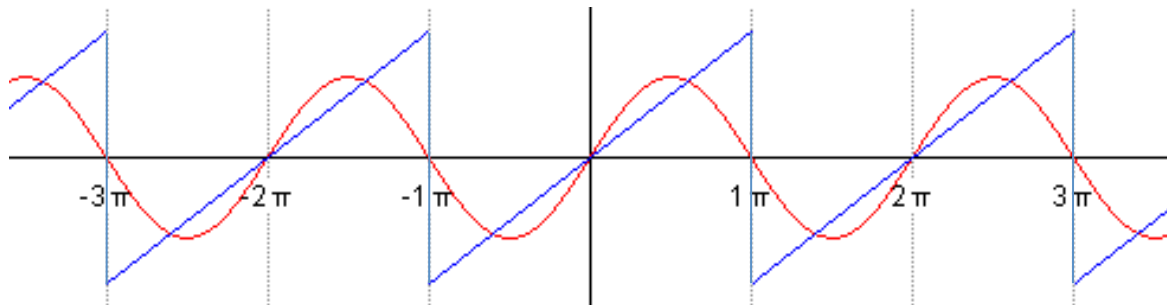
- Funções trigonométricas podem ser combinadas de tal forma a representar qualquer função periódica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- As constantes  $a_n$  e  $b_n$  podem ser obtidas a partir de:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$



# Séries de Fourier

Fórmula de Euler

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

- Hoje em dia, usamos formalismos mais abrangentes:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

- As constantes  $a_n$  e  $b_n$  da expressão tradicional podem ser obtidas como:

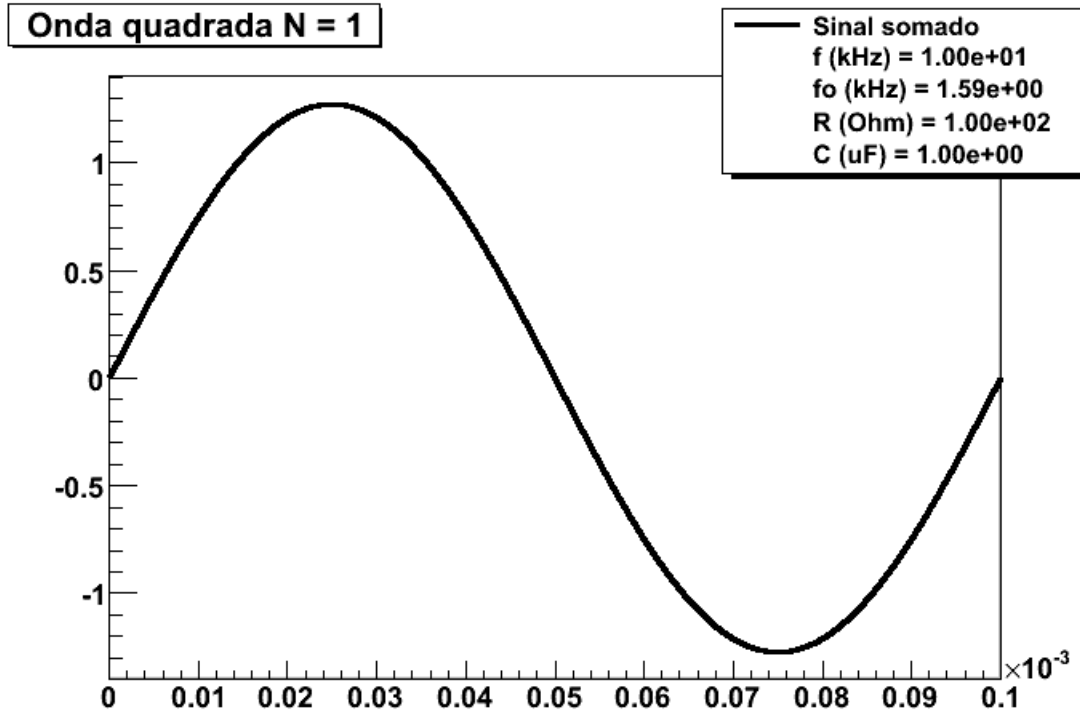
$$a_n = c_n + c_{-n}, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}), \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots$$



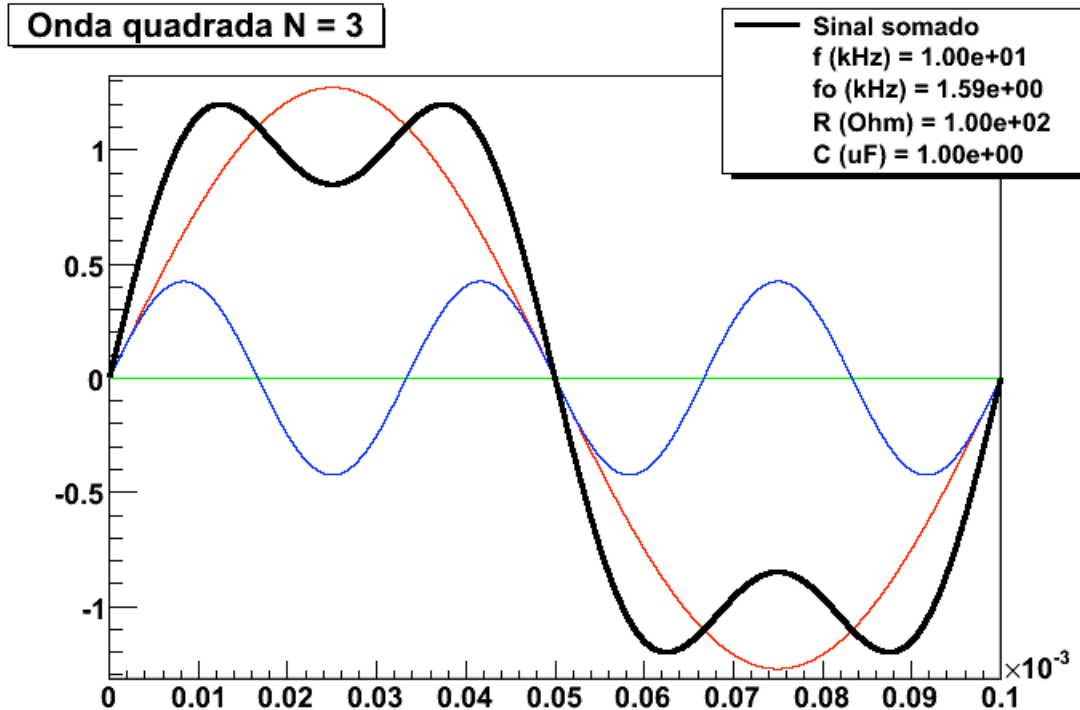
# Exemplo: Onda Quadrada

$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$



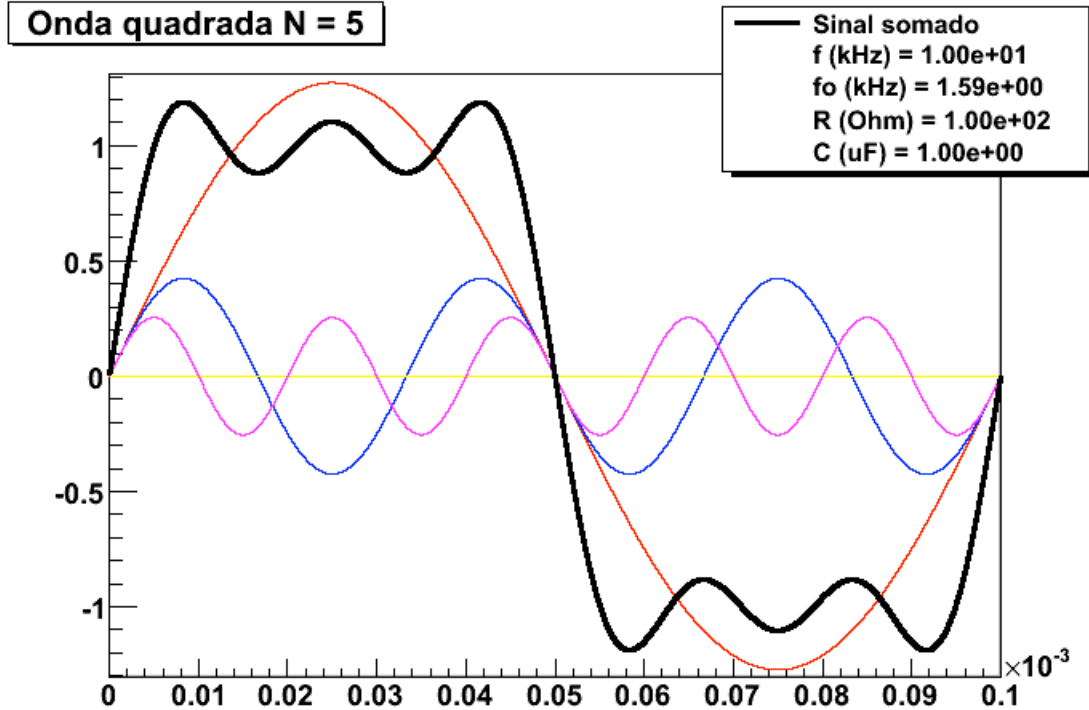
# Exemplo: Onda Quadrada

$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$



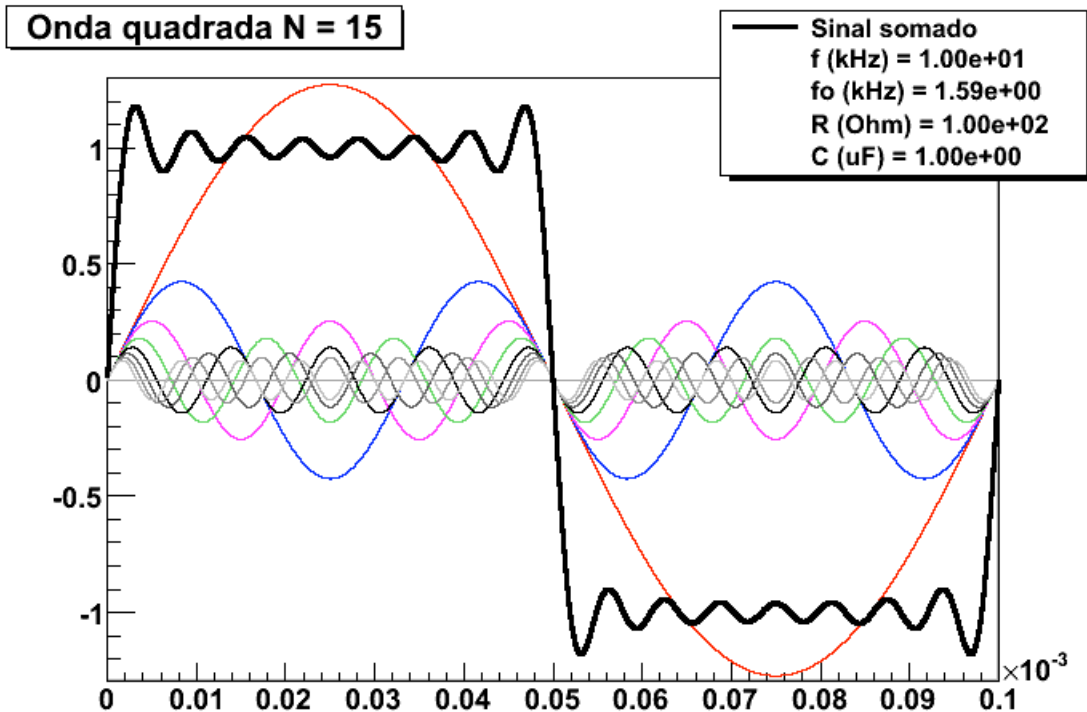
# Exemplo: Onda Quadrada

$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$



# Exemplo: Onda Quadrada

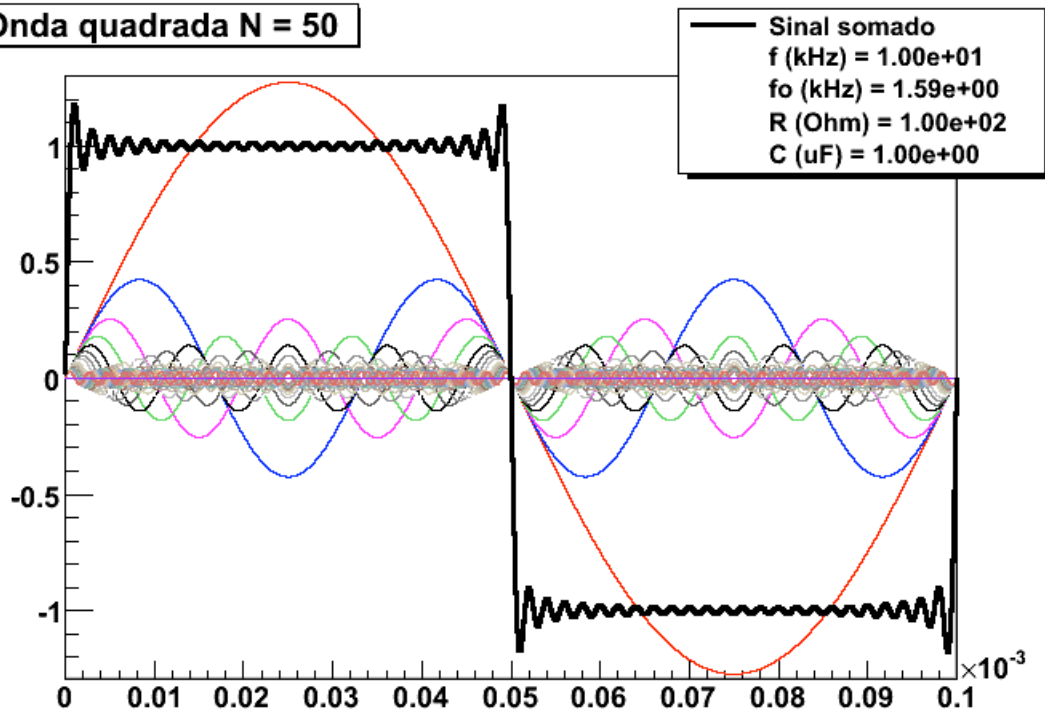
$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$



# Exemplo: Onda Quadrada

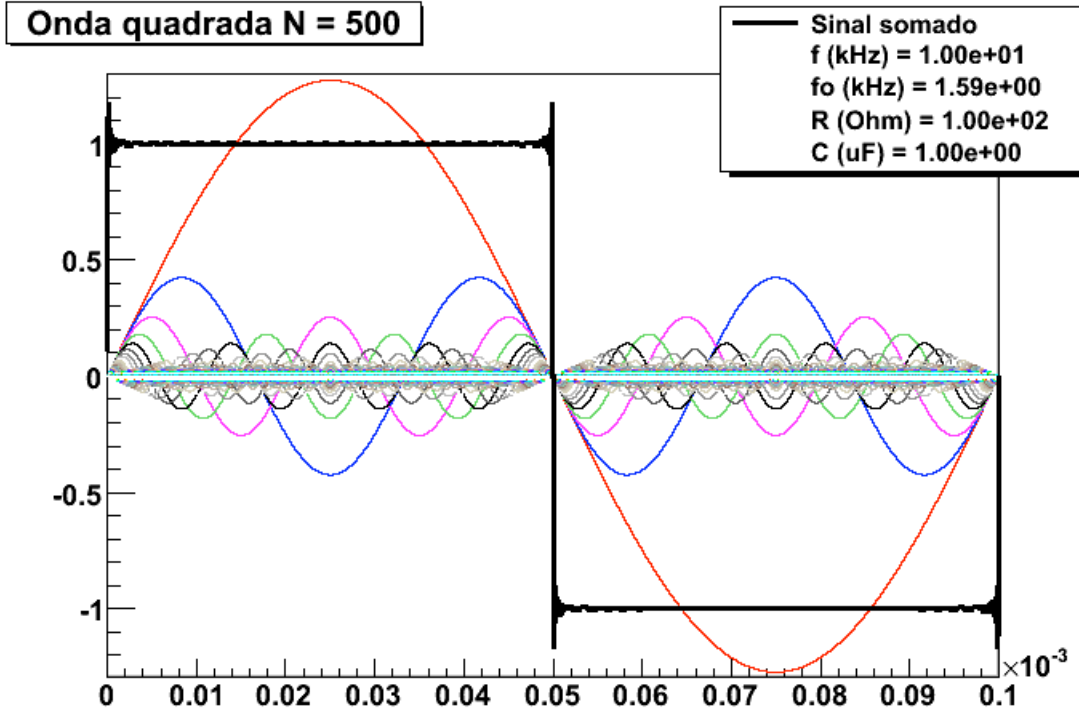
$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$

Onda quadrada N = 50



# Exemplo: Onda Quadrada

$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$

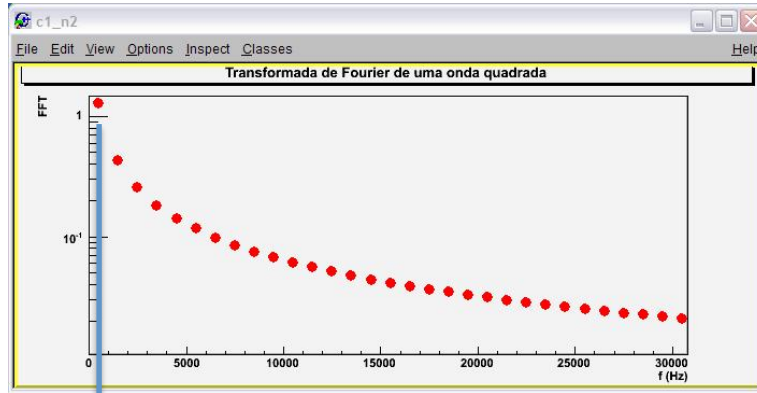


# Amplitudes

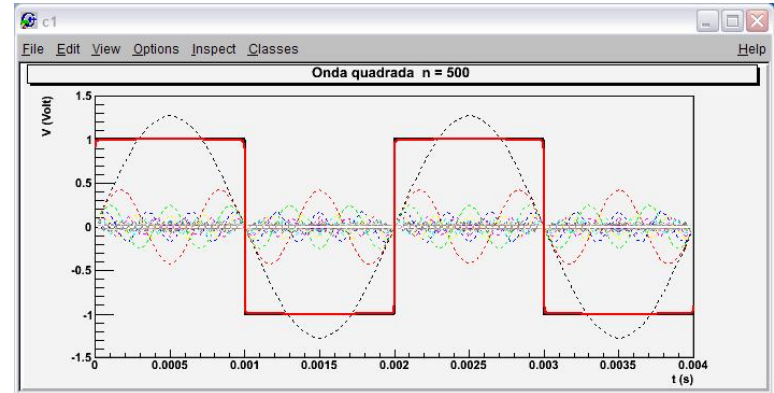
- O gráfico da amplitude,  $c_n$  para cada frequência  $n$ , mostra quais são mais importantes.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$



$$f = 1/T = 500 \text{ Hz}$$



$$T = 0.002 \text{ s}$$

# Série de Fourier em 2D

- É fácil generalizar para mais dimensões. Para duas, por exemplo, ficaria:

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

Podemos representar funções periódicas com frequências discretas

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-j(nx+my)} dx dy$$



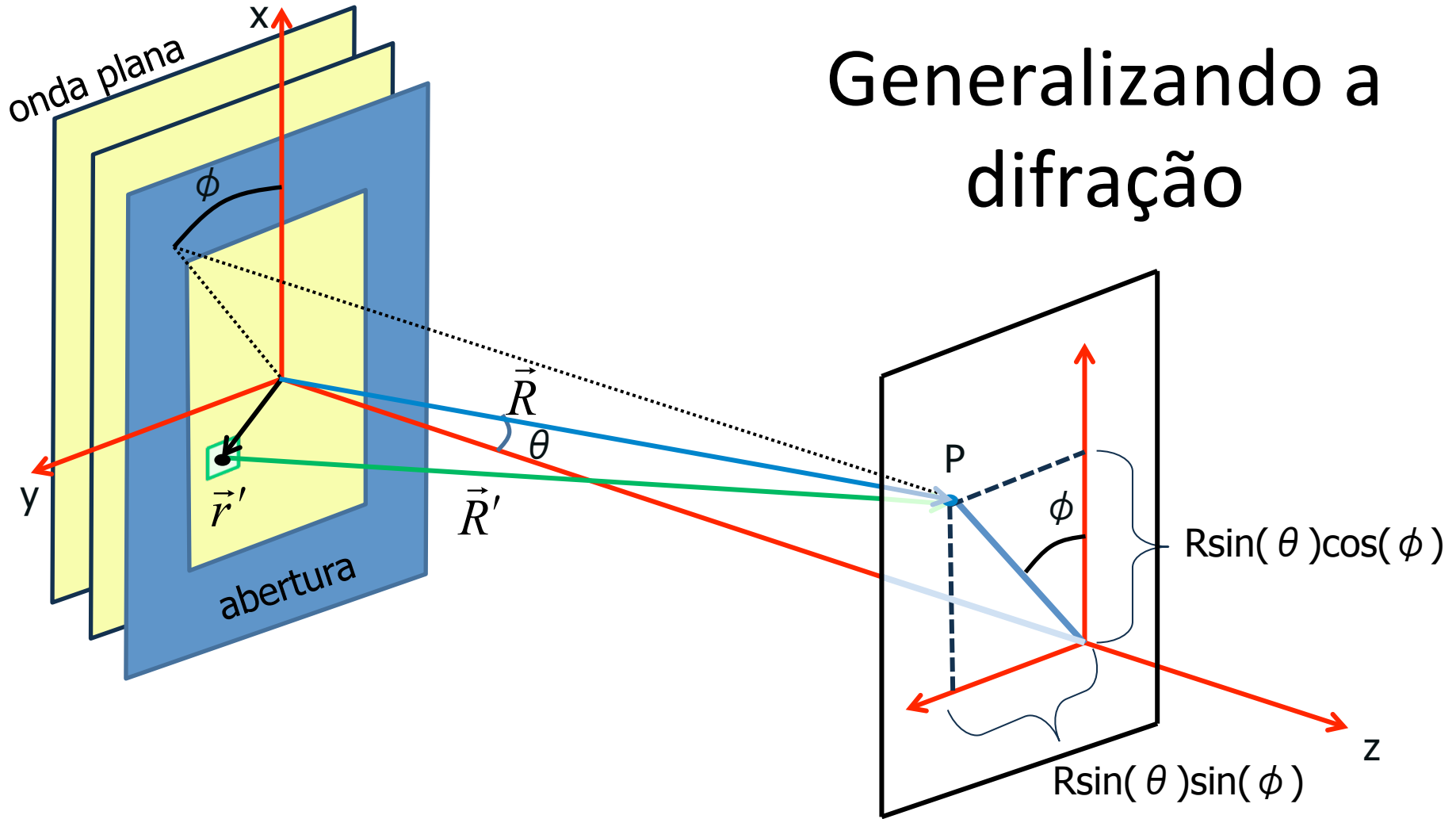
# Funções não-periódicas

- Para funções não periódicas, precisamos de uma **soma contínua (integral)** de exponenciais complexas.
- A **transformada de Fourier** é o limite da série de Fourier, quando o período da função  $\Rightarrow \infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \hat{f}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

# Generalizando a difração



# Generalizando a difração

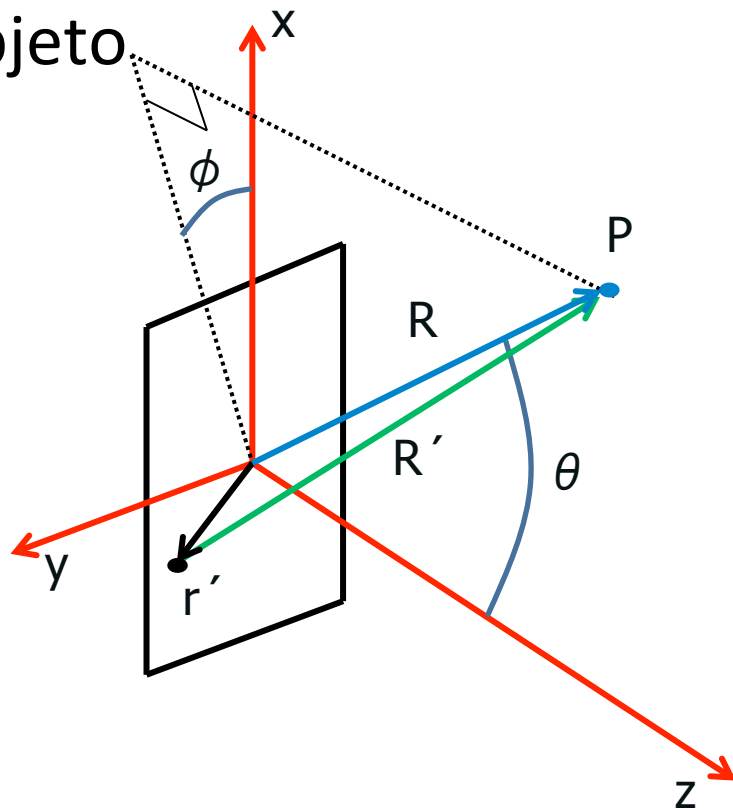
- Campo elétrico incidente no objeto

$$\hat{E} = E_0 e^{j\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t}$$

- Por simplicidade:

$$\hat{E} = E_0 e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

- Qual o campo elétrico em R?



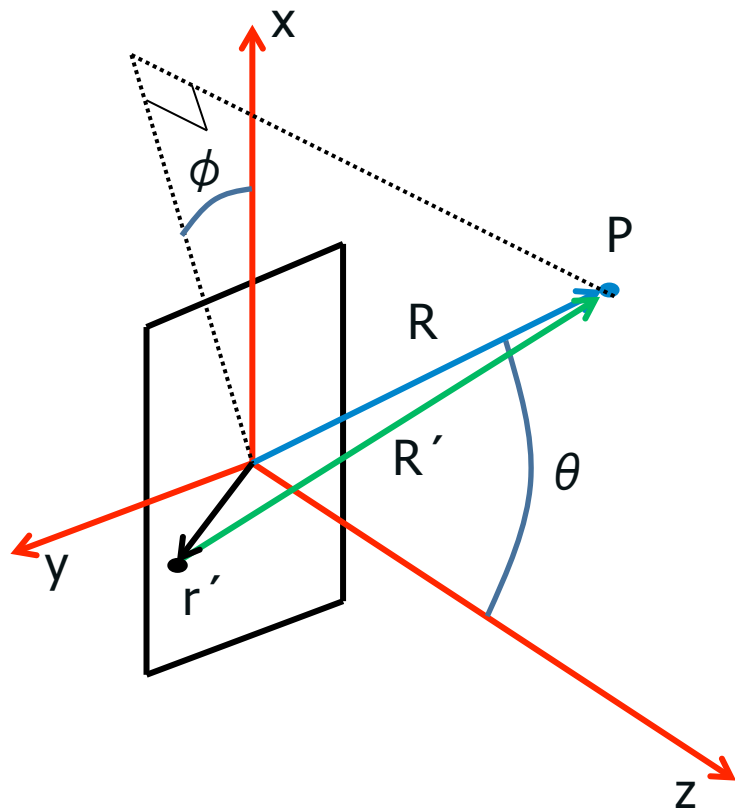
# Generalizando a difração

- Na posição R, o campo devido ao ponto em  $r'$  vale:

$$\hat{E}_{r'}(\vec{R}) = \frac{E_0(r')}{R'} e^{jk \cdot \vec{R}'}$$

- E o campo total fica:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \int_{abertura} \frac{E_0(r')}{R'} e^{jk \cdot \vec{R}'} dx dy$$



# Generalizando a difração

- No limite de Fraunhofer:

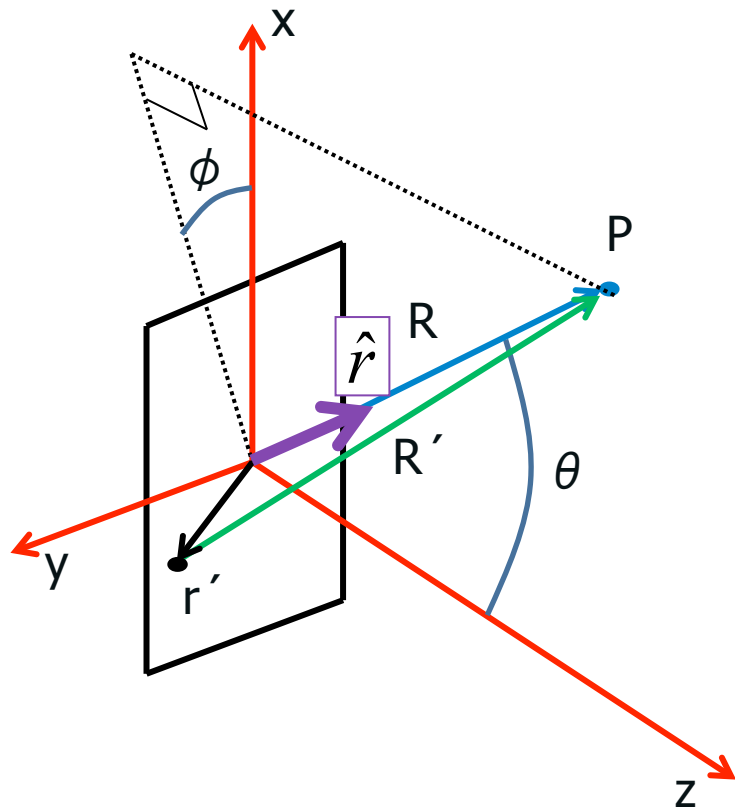
$$\vec{k} \approx k\hat{r}$$

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{r}' \approx R\hat{r} - \vec{r}'$$

- Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{jkR - \vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$

$$\hat{E}(\vec{R}) = e^{jkR} \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$



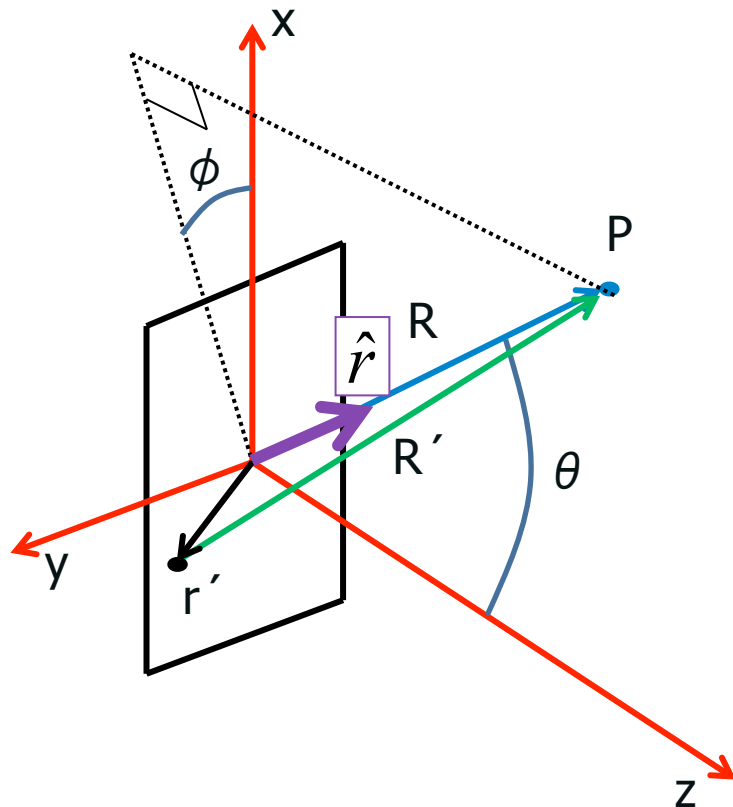
# Generalizando a difração

- Para grandes distâncias, temos:

$$R' \approx R$$

- Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$



# Generalizando a difração

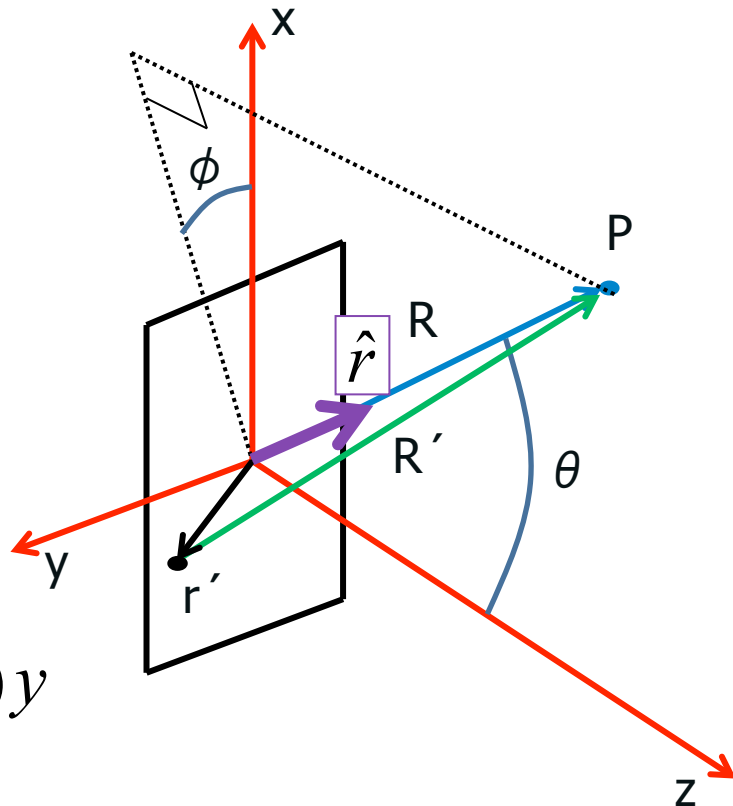
- Quem é  $\vec{k} \cdot \vec{r}'$  ?

$$\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\vec{k} = k\hat{r} = (k \sin \theta \cos \phi)\hat{x} + (k \sin \theta \sin \phi)\hat{y} + (k \cos \theta)\hat{z}$$

- Assim:

$$\vec{k} \cdot \vec{r}' = (k \sin \theta \cos \phi)x + (k \sin \theta \sin \phi)y$$

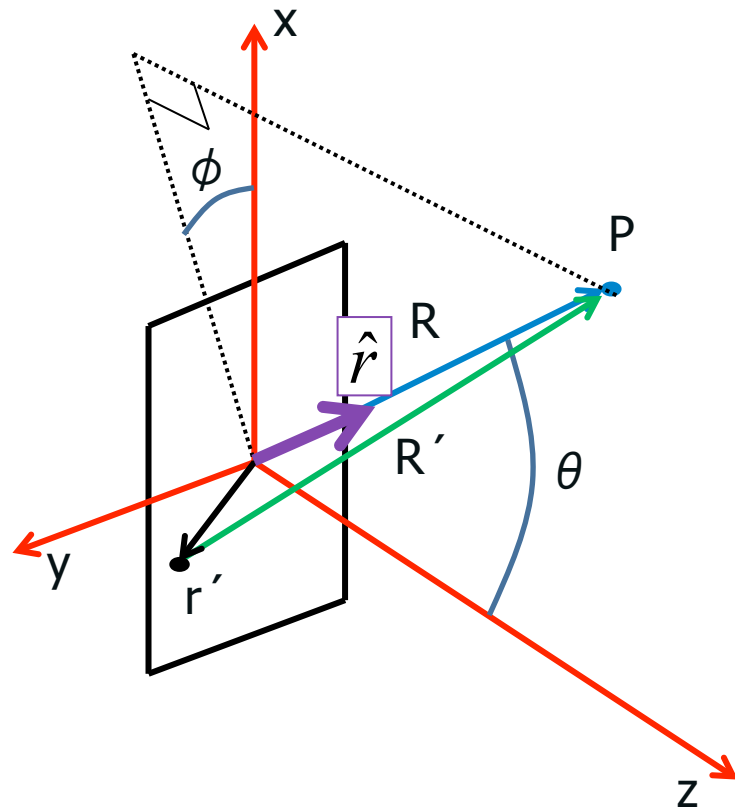


# Generalizando a difração

- Podemos ainda definir:

$$\begin{cases} k_x = (k \sin \theta \cos \phi) \\ k_y = (k \sin \theta \sin \phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}' = k_x x + k_y y$$





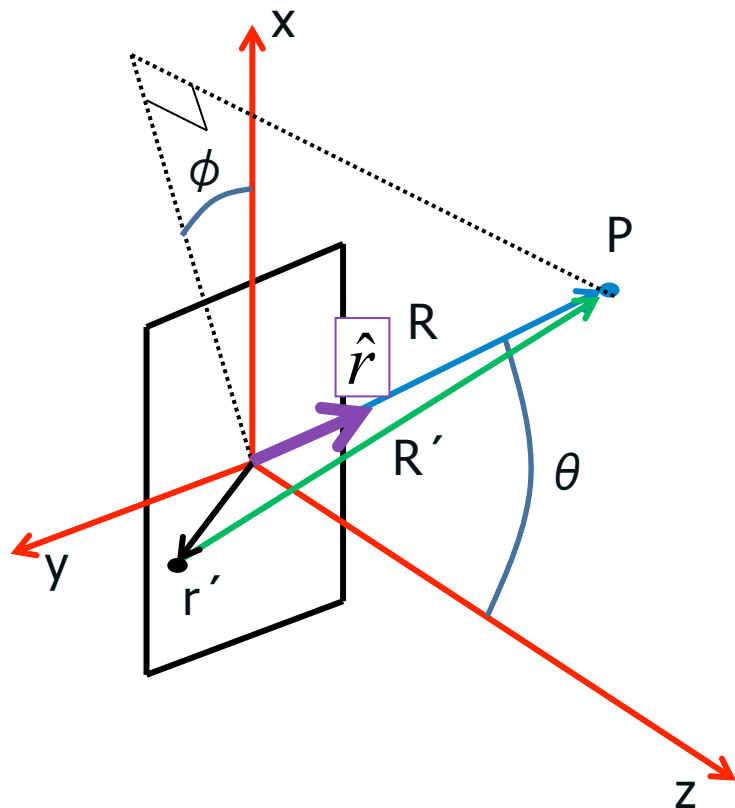
# Generalizando a difração

- A expressão era assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$

- E simplificamos para:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$



# Difração e Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier em 2D

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

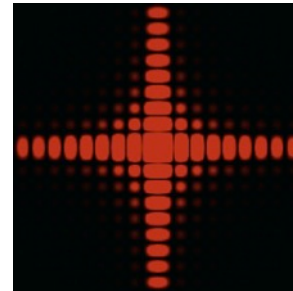
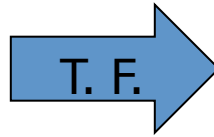
- Difração de Fraunhofer:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

# Difração e transformada de Fourier

- A figura de difração está relacionada à transformada de Fourier do objeto iluminado

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$



# Difração e transformada de Fourier

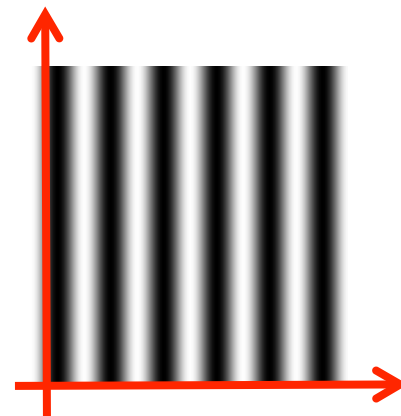
- A intensidade luminosa em uma dada posição está relacionada às intensidades para cada frequência espacial

$$\hat{E}(\vec{R}) \rightarrow \hat{E}(R_x, R_y) \rightarrow \hat{E}(k_x, k_y)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \varphi \\ k_y = k \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

# Série de Fourier: imagens

- Seja uma imagem bidimensional qualquer, monocromática
- Podemos representar qualquer ponto na imagem por uma intensidade luminosa  $I(x,y)$
- A **frequência espacial** é a frequência com que linhas claras e escuras se alternam ao longo de **eixo x**, e do **eixo y**.



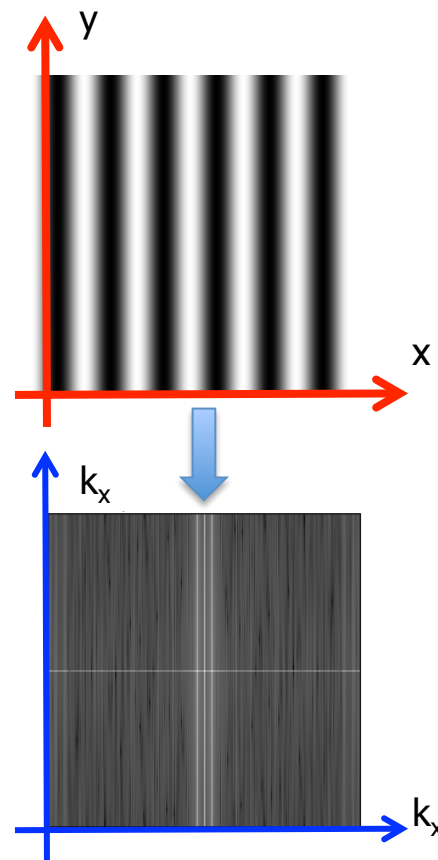
$$\hat{I}(k_x, k_y) = TF(I) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

# Série de Fourier: imagens

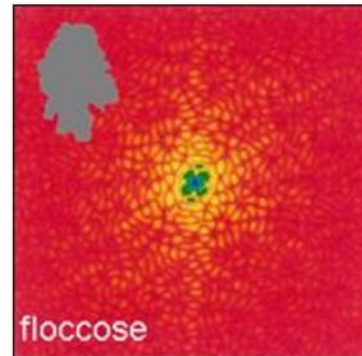
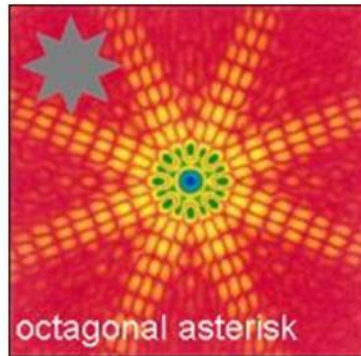
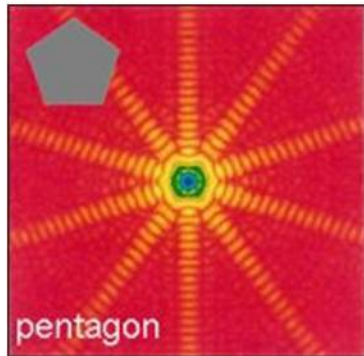
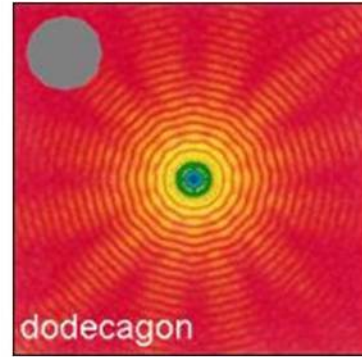
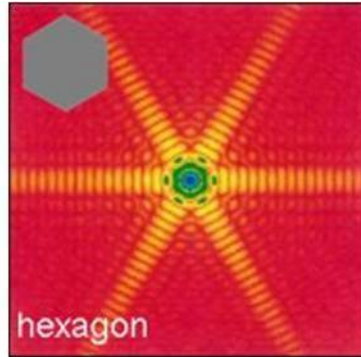
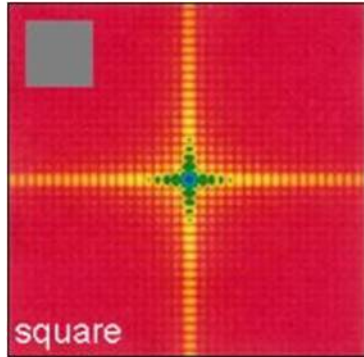
- Ao invés de fazer um gráfico em 1D, a transformada de Fourier corresponde a um gráfico em 2D, com as cores (3º eixo) correspondendo aos coeficientes  $c_{nm}$ .
- Se conhecemos **TF(I)**, podemos recuperar a **informação** de intensidade espacial através de:

$$I(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

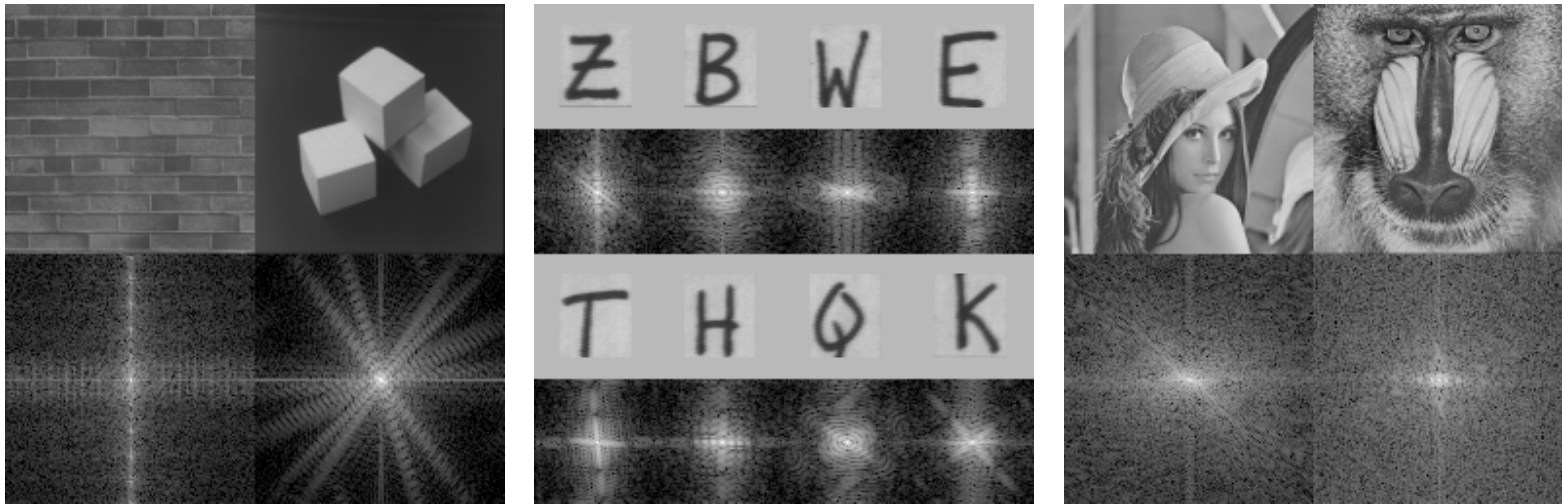
- Isto é a **transformada de Fourier inversa** (note o sinal trocado no expoente)



# Difração = Transformada de Fourier



# Mais algumas transformadas de Fourier

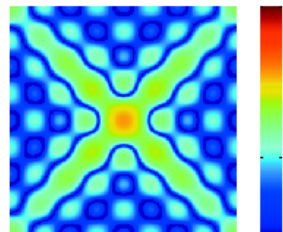
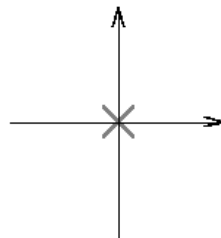
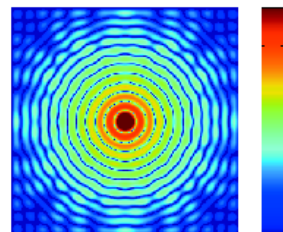
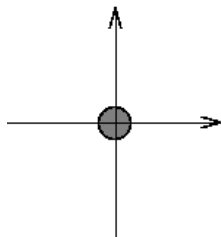
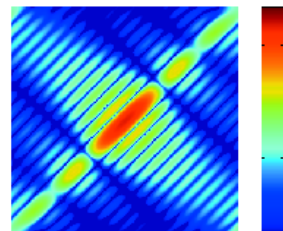
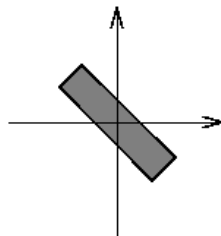


Imagens do site: <http://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html>



# Transformadas de Fourier

- Há uma **relação geométrica e quantitativa** entre a forma e sua transformada, isto é, entre a figura de difração e o objeto que a gerou.
- Dependendo da imagem, é mais fácil remover o padrão da TF do que da própria foto

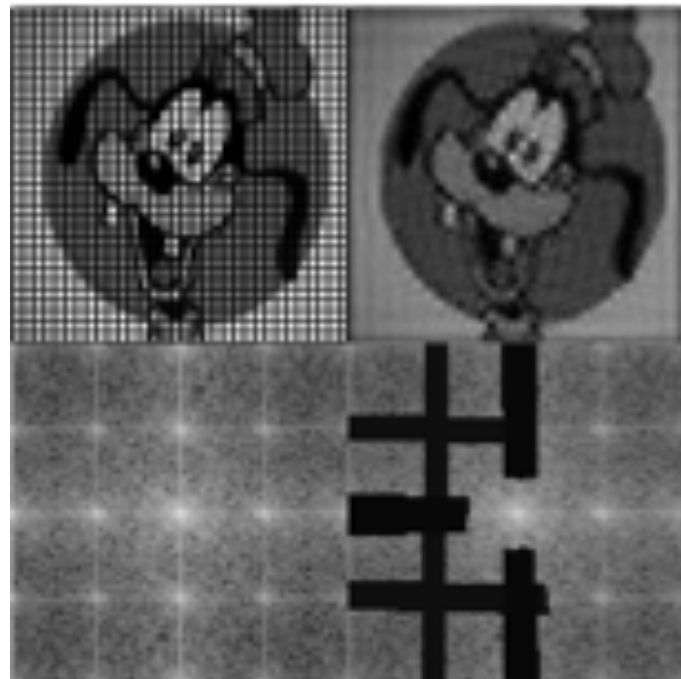


# TF para edição de imagens

- Em algumas circunstâncias, o uso da TF pode ser bastante útil na edição de imagens
- Por exemplo:
  - Remoção de ruídos e artefatos
    - Quando estes possuem frequências muito bem definidas, sendo bem localizada na TF
  - Remoção de padrões
    - Por exemplo, uma cerca pode ter um padrão de frequências bem definido
  - Filtros de efeitos especiais
    - A remoção de algumas frequências pode criar efeitos interessantes

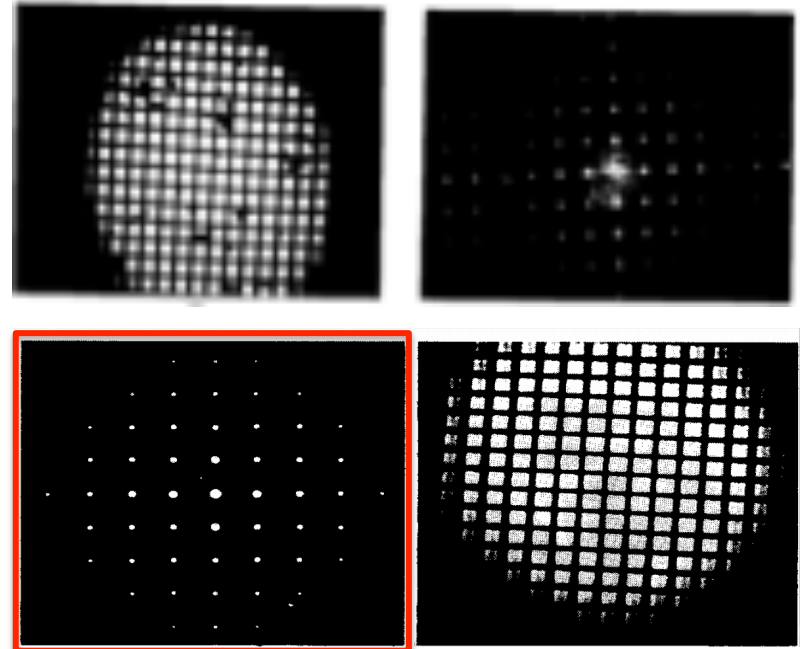
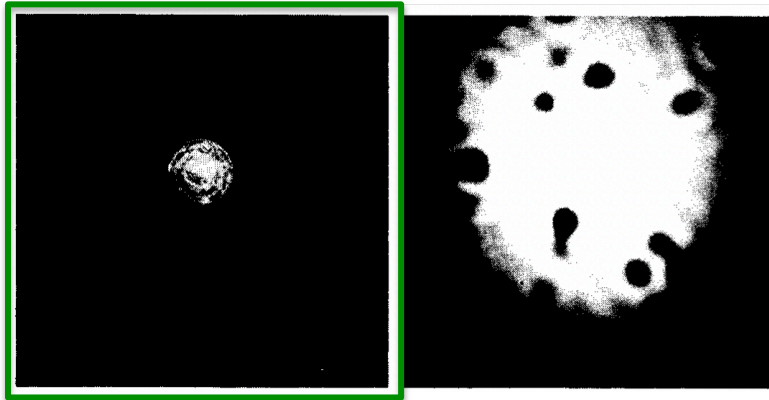
# Alguns exemplos

- Filtro para fazer contorno
  - Removem-se as baixas frequências
- Aumento de contraste
  - Ampliam-se as altas frequências, que amplificam as bordas
- Remoção de sombras
  - A sombra possui estrutura muito característica em frequência
- Remoção de uma estrutura espúria
  - Removendo / modificando as frequências pertinentes



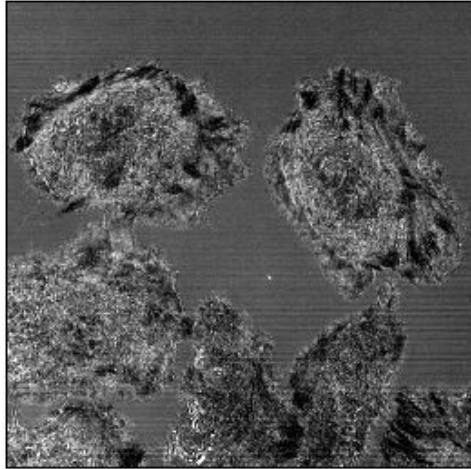
# Remoção de estrutura

- Grade com sujeiras
  - Filtrando a sujeira
  - Filtrando a grade

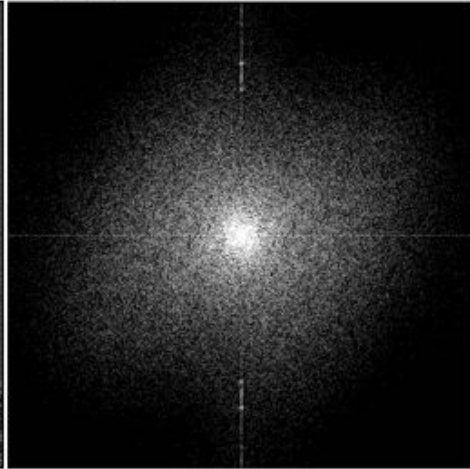


# Remoção de estrutura

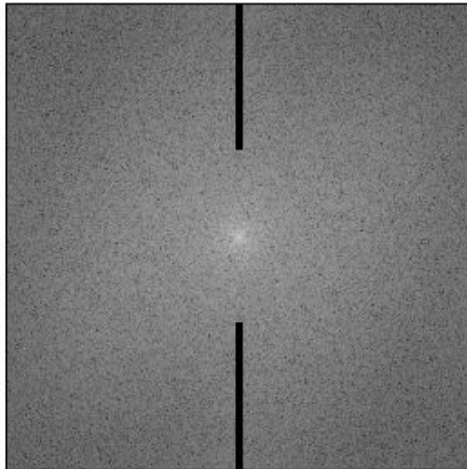
- Que frequências precisamos filtrar?



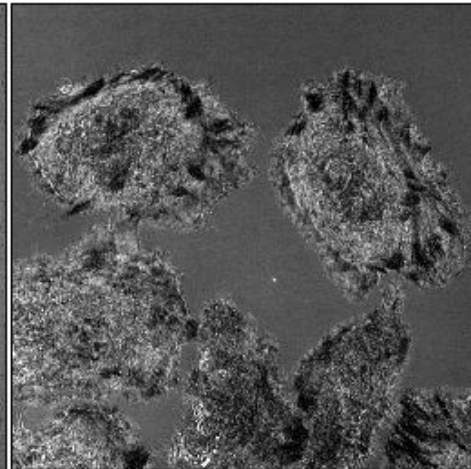
The original image. Reflectance mode of the confocal using the 458 nm line of an Ar laser. Note the horizontal lines.



The power spectrum calculated by ImageJ, contrast enhanced to show the bright spots that represent the X axis fluctuation.



The power spectrum with masks drawn on it.



The inverse transform applying the masks.

# Atividades



- Utilizar o programa ImageJ para o processamento das imagens usando a transformada de Fourier.
  - Determinar as dimensões dos objetos da imagem
  - Filtrar a imagem para obter os efeitos desejados

<http://rsbweb.nih.gov/ij/>

# Análise

- Para cada atividade, apresente:
  - A imagem inicial
  - A transformada de Fourier da imagem inicial
  - Nos casos de filtragem
    - A imagem da TF com o filtro. Justificar porque o filtro é adequado
    - Imagem depois do filtro, i.e. transformada inversa
  - Nos casos quantitativos
    - Indicar os pontos que foram utilizados para determinar as dimensões pedidas e como foi feita a análise
  - Comente os resultados




# Para a nossa AT3




 Atividade 3 - Simulação de filtragem como noção de processamento de imagens (ImageJ) 




  Slides sobre a Atividade 3 

  Tutorial ImageJ 

  Vídeo sobre o Computador Óptico 

  Resumo da Atividade 3 

  Imagens para a Atividade 3 

  Síntese da Atividade 3 do Experimento 2 



# Na nossa pasta

Aula com os pedidos:

- [EXP2\\_CompOptico\\_Aula\\_03\\_2021.pdf](#) ✓

Dados:

- [EXP2\\_CompOptico\\_Aula\\_03\\_2021\\_ImageJ.pdf](#) ✓