Recuperação – Geometria Analítica

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais - LOB

Nome:____ Nº USP:____________ Data: 05/08/2021

Atenção:

- Responda todas as questões de maneira prolixa, explicando todos os seus passos.

Questão 1. (2,5 pt) Sejam $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base, $\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{v} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$ e $\vec{w} = a\vec{e_1} + b\vec{e_1} + c\vec{e_1}$. Deduza uma condição necessária e suficiente sobre a, b e c para que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja base.

Questão 2 – (2,5 pt) A órbita de um satélite é uma elipse que tem a Terra em um de seus focos. Esse satélite atinge velocidade máxima e mínima nos pontos de menor e maior proximidade da Terra, respectivamente, quando então essas velocidades são inversamente proporcionais às distâncias do satélite a Terra (com mesma constante de proporcionalidade). Calcule a excentricidade da órbita do satélite, sabendo também que a velocidade máxima é o dobro da velocidade mínima.

Questão 3 – (2,5pt) Seja I o ponto de intersecção entre as retas:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 5t, \quad t \in \Re \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

a) Determine, caso existam, as equações da reta que passa por I e é paralela ao eixo Oz.

b) Estude a posição relativa entre a reta encontrada no item (a) e a reta

$$m: \begin{cases} x = 2 \\ y - 1 = \dfrac{z}{3} \end{cases}.$$

Questão 4. (2,5 pt) Determinar a equação da superfície esférica, sabendo que o centro está em C(-2, 3, 4) e é tangente ao eixo dos y.

Boa Prova!!!

Questão 1:

Para que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja base, o conjunto precisa ser L.I.

Portanto, a $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$.

Então, $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \neq 0$

$$1 \cdot (1 \cdot c - 1b) - 1(1 \cdot c - 1 \cdot a) + 0(1 \cdot b - 1 \cdot a) \neq 0$$

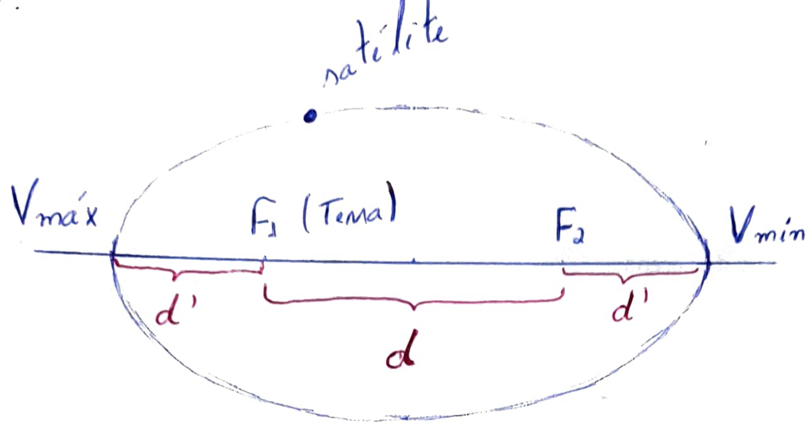
$$c - b - c + a \neq 0$$

$$a - b \neq 0$$

$$\therefore \underline{a \neq b}$$

A condição necessária e suficiente para que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja uma base é que os coeficientes a e b sejam diferentes.

Questão 2:



Excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{d}{d+2d'}$

Sendo as velocidades inversamente proporcionais às distâncias do satélite à Terra, temos: (com a mesma constante de proporcionalidade):

$$V_{máx} = \frac{\alpha}{d'} \quad e \quad V_{mín} = \frac{\alpha}{d+d'}$$

$$\alpha = V_{máx} \cdot d' = V_{mín} \cdot (d+d')$$

→ como $V_{máx} = 2\, V_{mín}$

$$2\, \cancel{V_{mín}} \cdot d' = \cancel{V_{mín}} (d+d')$$

$$2d' = d + d'$$

$$\therefore d' = d$$

$$e = \frac{d}{d+2 \cdot d} = \frac{d}{3d} = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad \boxed{e = \frac{1}{3}}$$

Questão 3:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 5t \\ z = 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro de r, temos:

$$t = \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{2}$$

$$x = 3 \cdot \left(\frac{y-4}{5}\right) + 2 = \frac{3}{5}y - \frac{2}{5}$$

$$x = 3\left(\frac{z}{2}\right) + 2 = \frac{3}{2}z + 2$$

Substituindo x em S, temos:

- $y = 2\left(\frac{3}{5}y - \frac{2}{5}\right) + 1$

  $\underline{y = -1}$

- $z = \dfrac{\left(\frac{3}{2}z + 2\right)}{2} - \dfrac{3}{2}$

  $\underline{z = -2}$

- $y = 2x + 1$

  $\underline{x = -1}$

Logo, o ponto de interseção entre as retas r e S é $\underline{I = (-1, -1, -2)}$.

a)

A equação da reta pode ser determinada por um ponto e um vetor diretor:

$$P = I(-1,-1,-2)$$

$$\vec{v} = (0,0,1)$$

Sabendo que: $\overrightarrow{IP} = \lambda \vec{v}$

$$P = I + \lambda \vec{v}$$

$$(x,y,z) = (-1,-1,-2) + \lambda(0,0,1)$$

Essa é a equação vetorial da reta.

As equações paramétricas da reta são:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

b) $r_1: \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$ $\therefore$ $\overrightarrow{v_{r_1}} = (0,0,1)$, $P_{r_1}\ (-1,-1,-2)$

$m: \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{z}{3} + 1 \end{cases}$ $\therefore$ $\overrightarrow{v_m} = (0,1,3)$, $P_m(2,1,0)$

São paralelas?

$$-\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{-2}{0}$$ $\therefore$ não são paralelas.

São coplanares?

$(\vec{v_{r_1}}, \vec{v_m}, \overrightarrow{P_{r_1}P_m})$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

Como $(\vec{v_{r_1}}, \vec{v_m}, \overrightarrow{P_{r_1}P_m})$ é diferente de zero, as retas r_1 e m são reversas.

Questão 4:

$C(-2,3,4)$ esfera tangente a y

Se a esfera é tangente a y (eixo y), pode-se encontrar o raio da esfera como a distância entre o centro da esfera e o eixo y.

ponto sobre o eixo y: $y_1(0,3,0)$

$$d(y_1, c) = \sqrt{(-2-0)^2+(3-3)^2+(4-0)^2}$$
$$= \sqrt{4+16}$$
$$= \sqrt{20} \text{ u.c.}$$

$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2 = a^2$ → eq. da sup. esférica

$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2 = (\sqrt{20})^2$$
$$x^2+4x+4+y^2-6y+9+z^2-8z+16-20=0$$
$$\boxed{x^2+y^2+z^2+4x-6y-8z+9=0}$$ //.