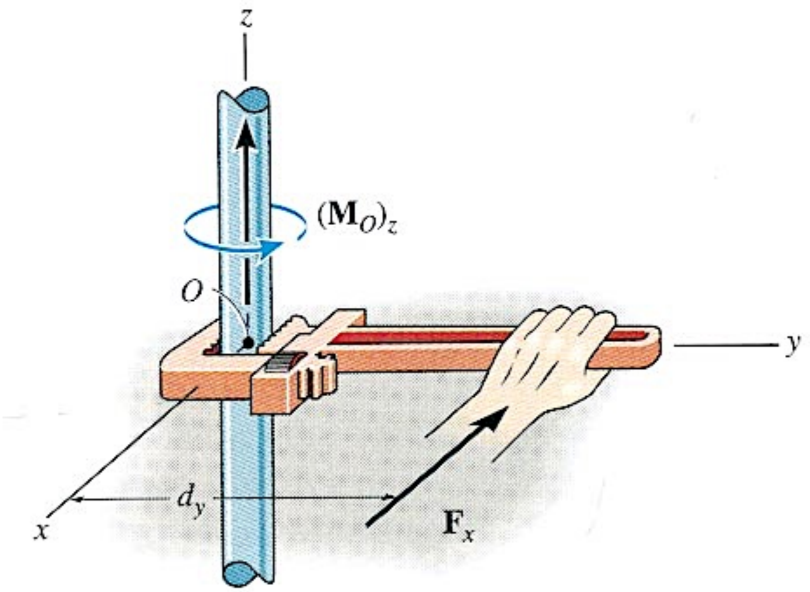
Resultante de Sistemas de Forças Atuantes

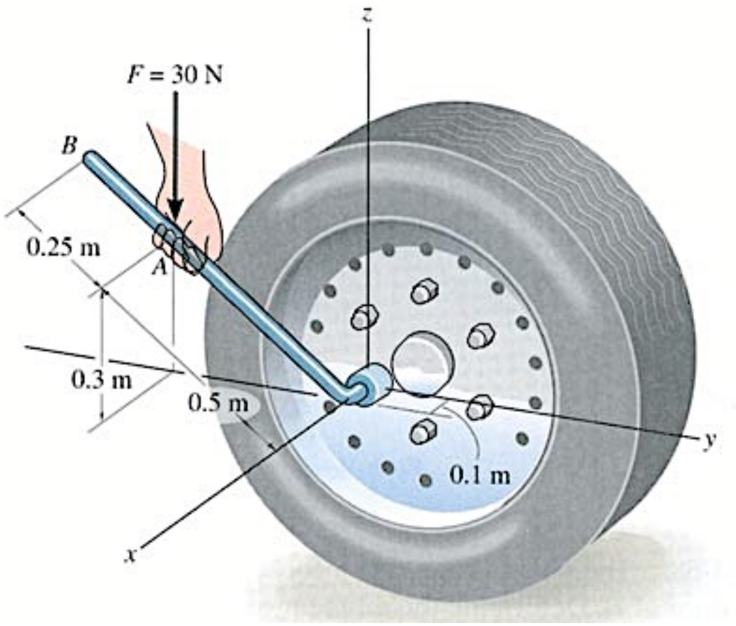
- *Part 1 – Momento de uma Força;*
- *Part 2 – Momento de uma Força em um Eixo Específico e Momento de um Binário;*
- *Part 3 – Sistemas Equivalentes;*
- *Part 4 – Redução de um Sistema Simples de Cargas Distribuídas.*

Prof. Assoc. Flávio D. Marques & Prof. Assoc. Leopoldo de Oliveira

MOMENTO DE UMA FORÇA

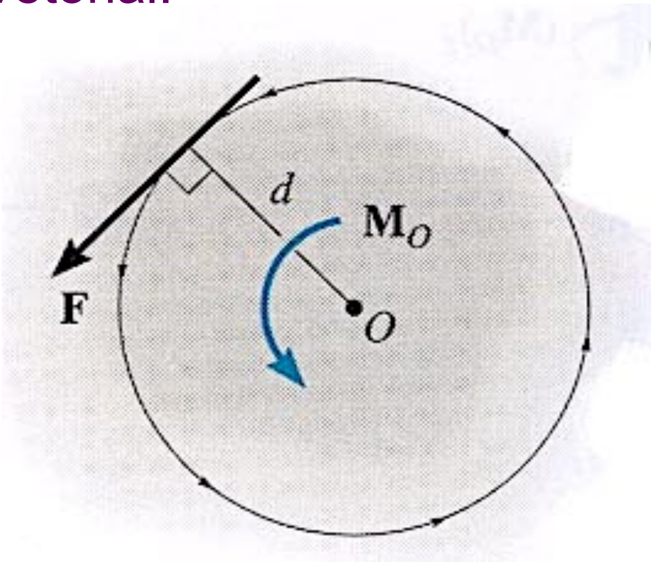
Momento de uma força em relação a um ponto é uma quantidade relacionada à <u>tendência de rotação</u> (também chamada de **torque**).





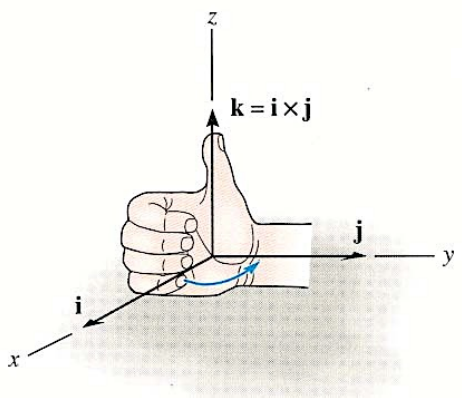
Momento de uma força é uma quantidade vetorial.

Momento de uma força para o caso de duas dimensões apresenta *magnitude*:



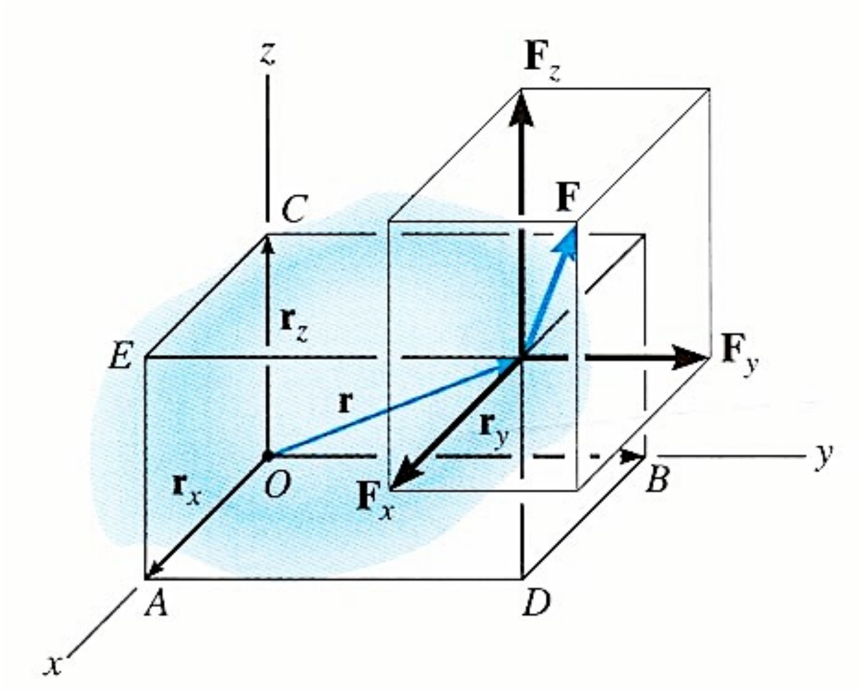
$$M_o = F\,d$$

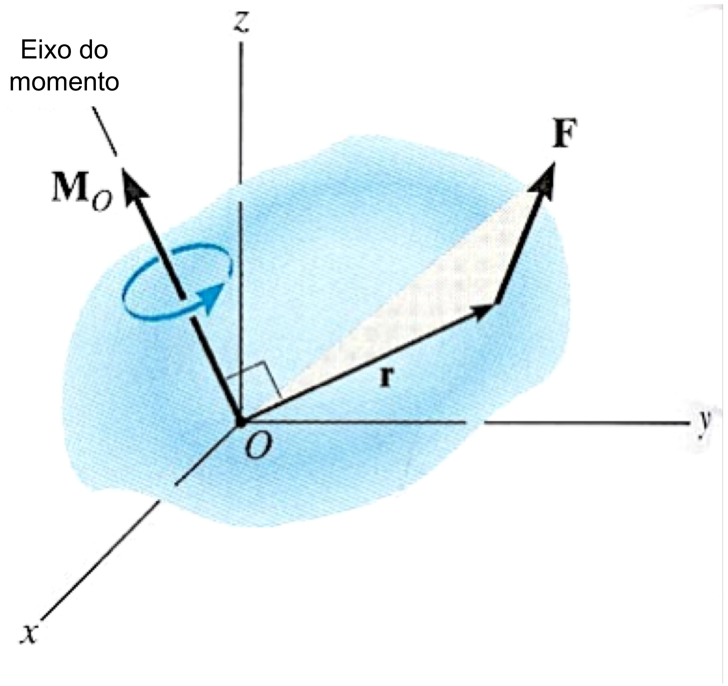
com *direção* e *sentido* podendo ser ***horário*** ou ***anti-horário*** através do eixo de rotação perpendicular ao plano em questão atendendo a



Regra da Mão Direita.
(RMD)

Momento de uma força – descrição vetorial:



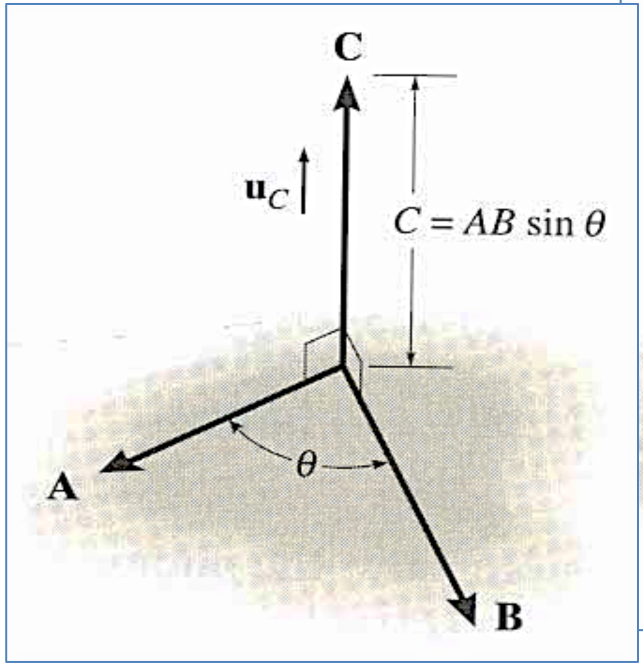


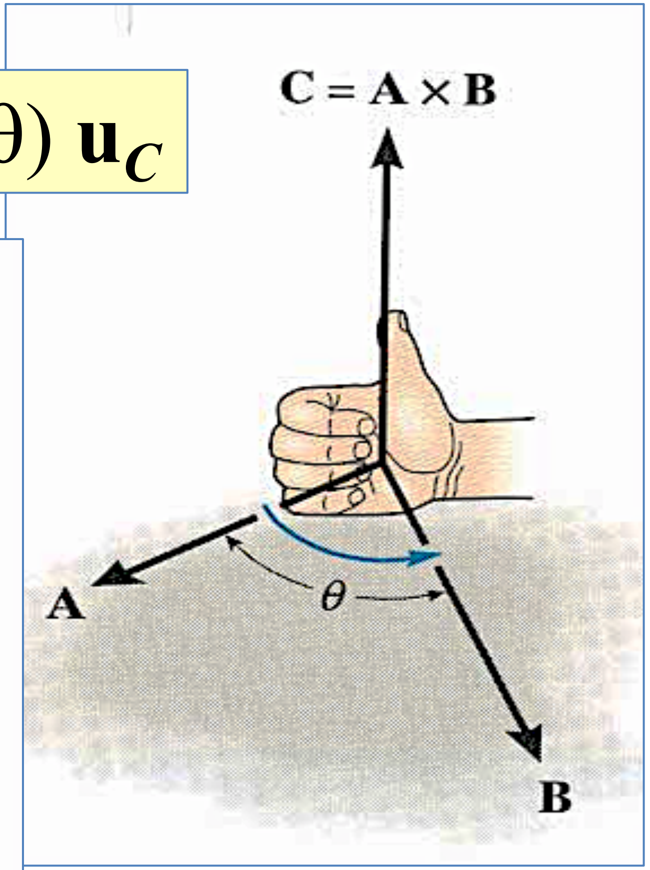
Usando do produto vetorial, $\boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

onde $\boldsymbol{r}$ é o vetor posição a partir do ponto O para ***qualquer ponto*** da linha de ação do vetor de força $\boldsymbol{F}$.

O Produto Vetorial (revisitado)

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = A\,B\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathbf{u}_C$$





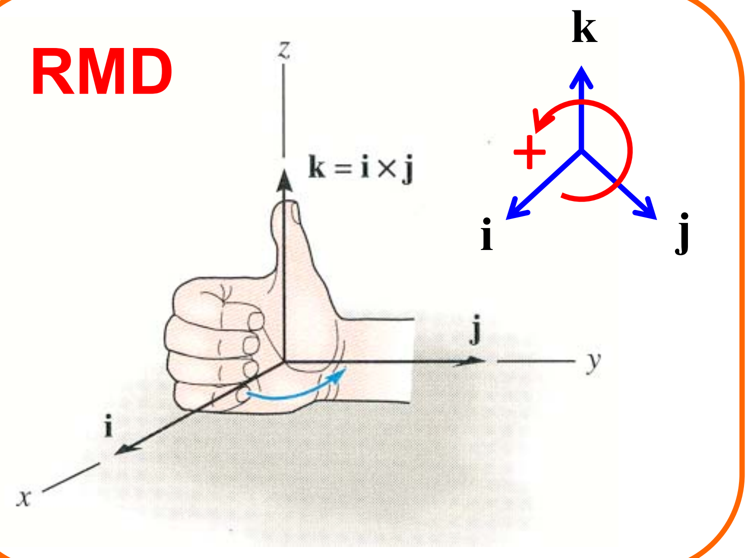
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y)$$

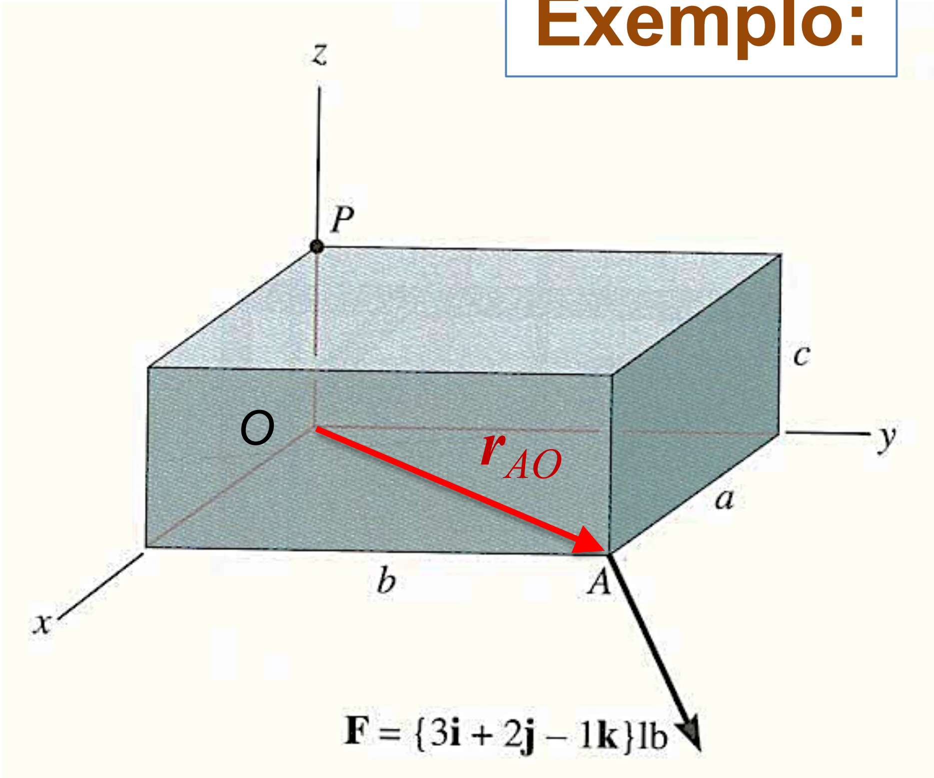
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\mathbf{j}(A_xB_z - A_zB_x)$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

RMD



Exemplo:



Dado: a = 3 pol, b = 6 pol e c = 2 pol.

Encontrar o momento de $\mathbf{F}$ em relação ao ponto *O*.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_{AO} = \{3\ \mathbf{i} + 6\ \mathbf{j} - 0\ \mathbf{k}\}\ \text{pol}$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

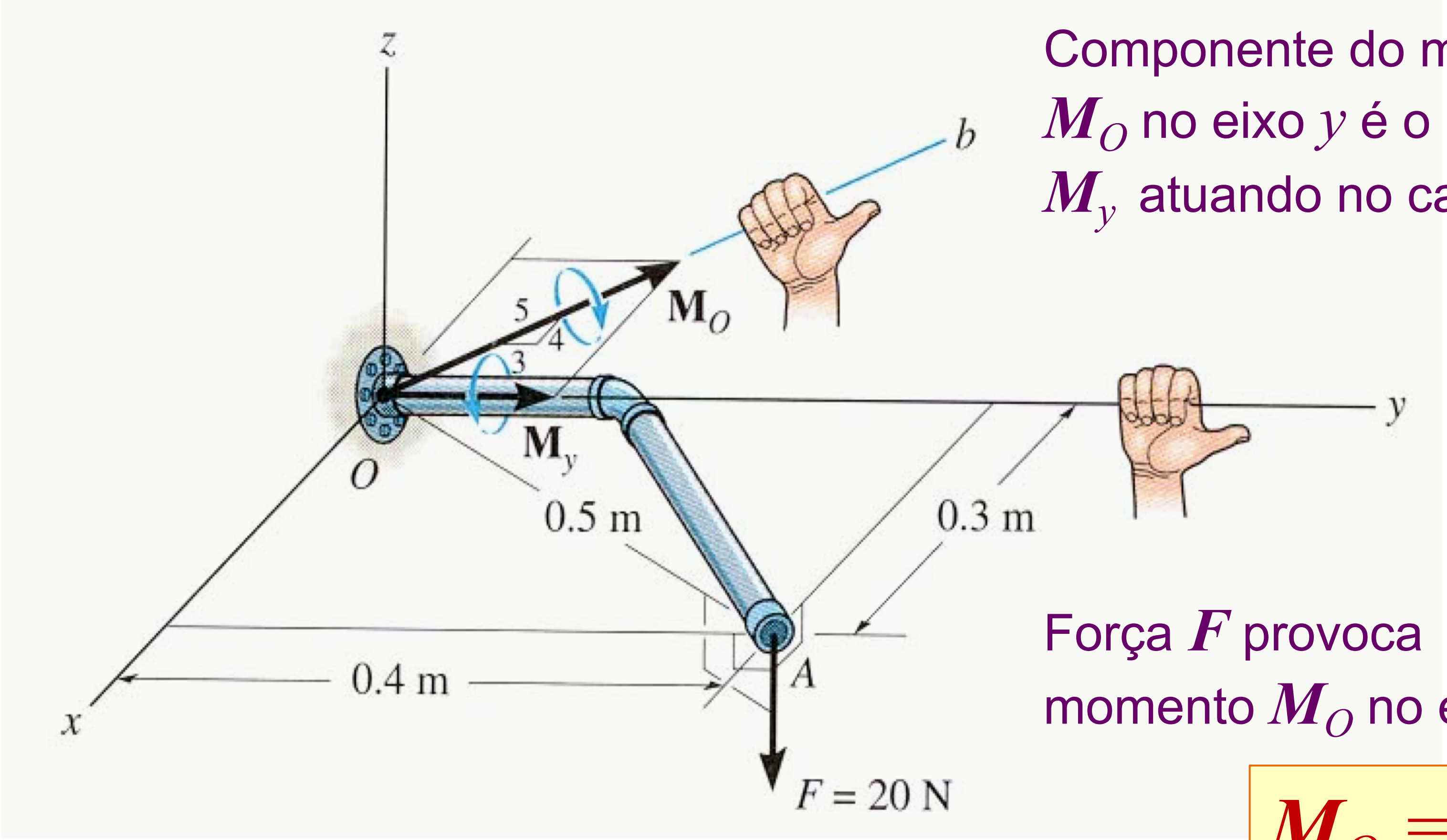
$$\mathbf{M}_O = [\{6(-1) - 0(2)\}\mathbf{i} - \{3(-1) - 0(3)\}\mathbf{j} + \{3(2) - 6(3)\}\mathbf{k}]\ \text{lb·pol}$$

$$= \{-6\ \mathbf{i}\ + 3\ \mathbf{j} - 12\ \mathbf{k}\}\ \text{lb·pol}$$

Resultante de Sistemas de Forças Atuantes

- *Part 1 – Momento de uma Força;*
- *Part 2 – Momento de uma Força em um Eixo Específico e Momento de um Binário;*
- *Part 3 – Sistemas Equivalentes;*
- *Part 4 – Redução de um Sistema Simples de Cargas Distribuídas.*

MOMENTO DE UMA FORÇA EM UM EIXO ESPECÍFICO

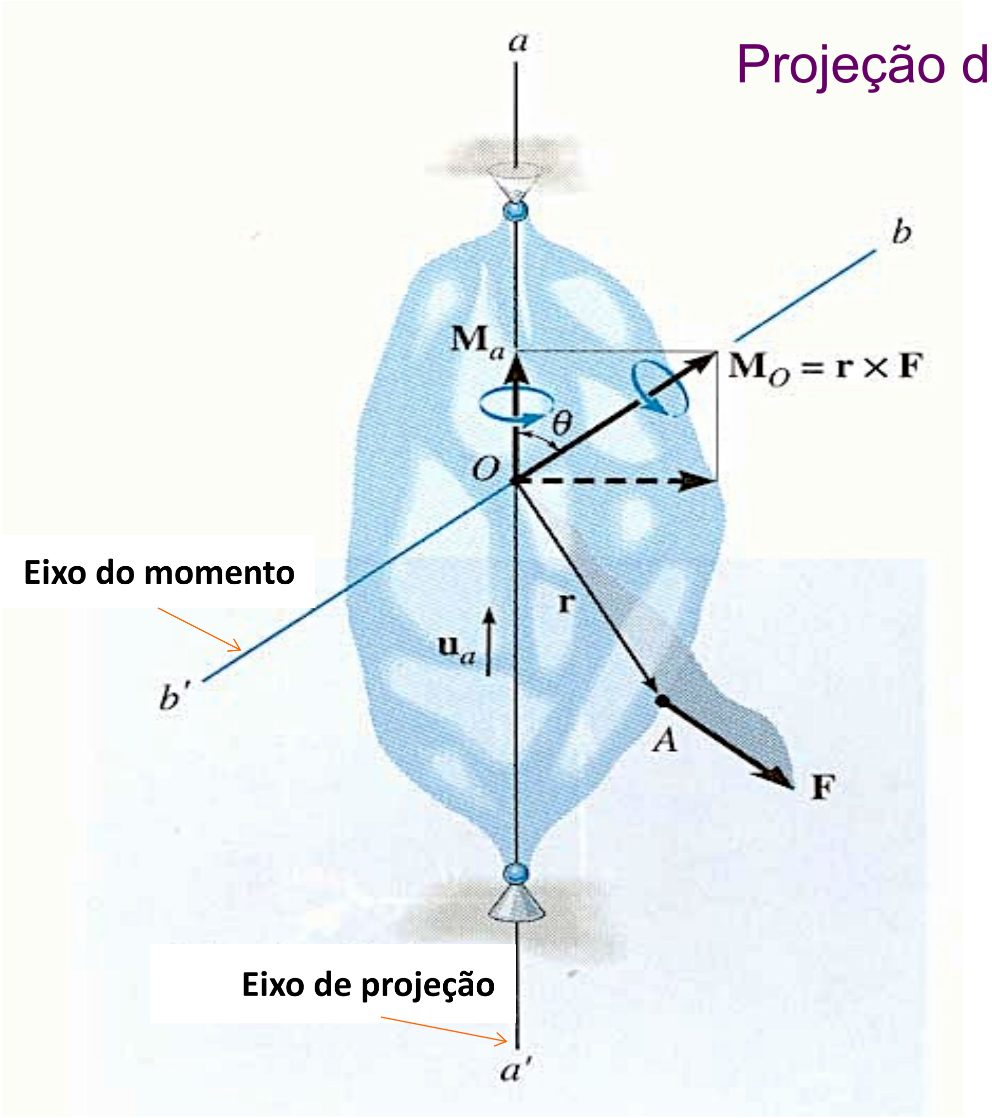


Componente do momento M_O no eixo y é o momento M_y atuando no cano.

Força F provoca momento M_O no eixo b.

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{AO} \times \mathbf{F}}$$

Projeção do momento $\boldsymbol{M}_O$ (eixo b) no eixo a:



$$M_a = \mathbf{u}_a \bullet \mathbf{M}_O$$

$$M_a = [u_{a_x}\mathbf{i} + u_{a_y}\mathbf{j} + u_{a_z}\mathbf{k}] \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= u_{a_x}(r_yF_z - r_zF_y) - u_{a_y}(r_xF_z - r_zF_x) + u_{a_z}(r_xF_y - r_yF_x)$$

$$\boxed{M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_{a_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}}$$

$$\mathbf{M}_a = M_a\,\mathbf{u}_a$$

Exemplo

Determine a magnitude do momento da força **F** em relação ao eixo z.

Sabe-se que $M_z = \mathbf{u} \bullet (\boldsymbol{r}_{BA} \times \mathbf{F})$,

onde $\mathbf{u} = 1\ \mathbf{k}$

$$\boldsymbol{r}_{BA} = \{0{,}25\ \text{sen}(30°)\ \mathbf{i} + 0{,}25\cos(30°)\ \mathbf{j}\}\ m$$

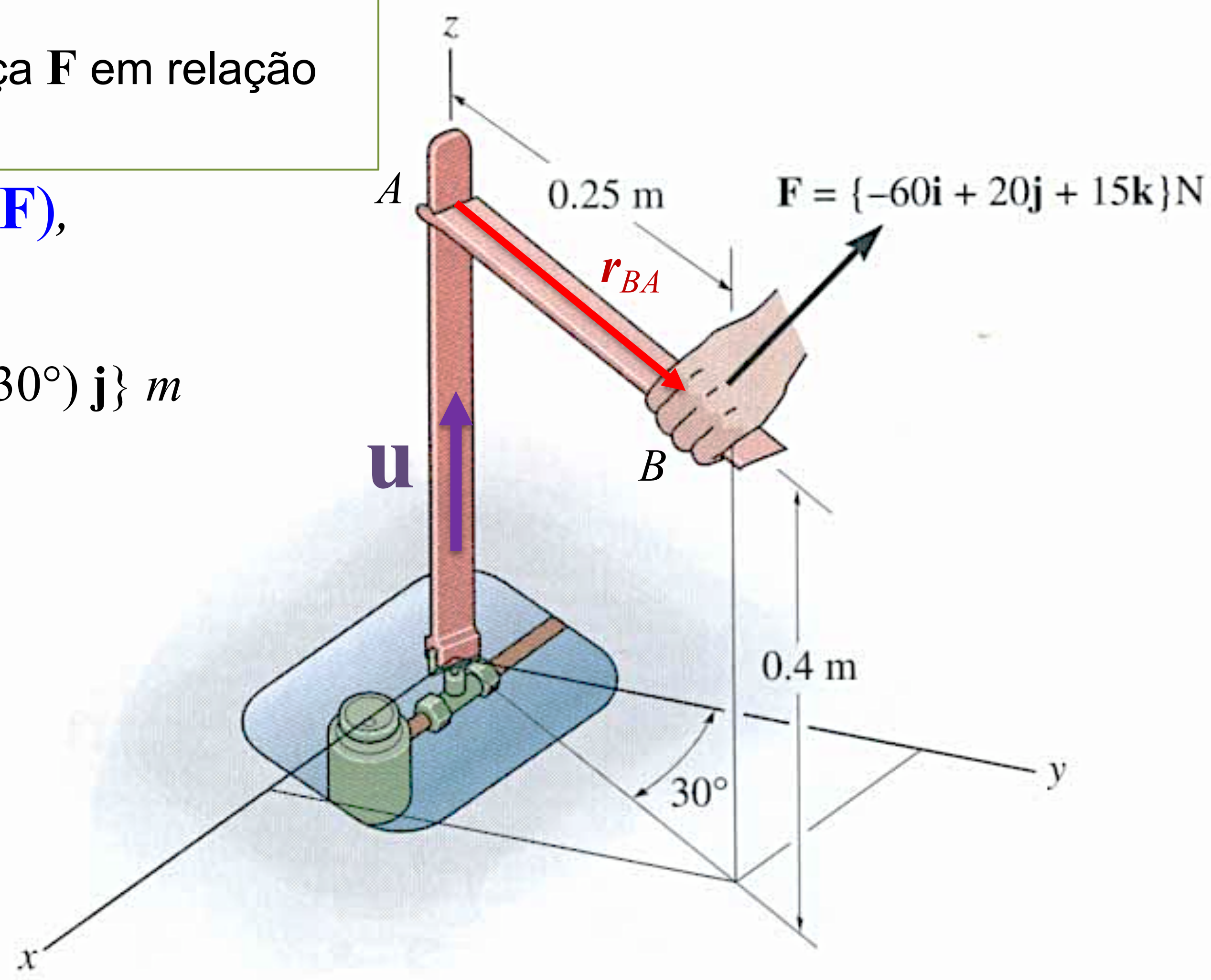
$$= \{0{,}125\ \mathbf{i} + 0{,}2165\ \mathbf{j}\}\ m$$

$$M_z = \mathbf{u} \bullet (\boldsymbol{r}_{BA} \times \mathbf{F})$$

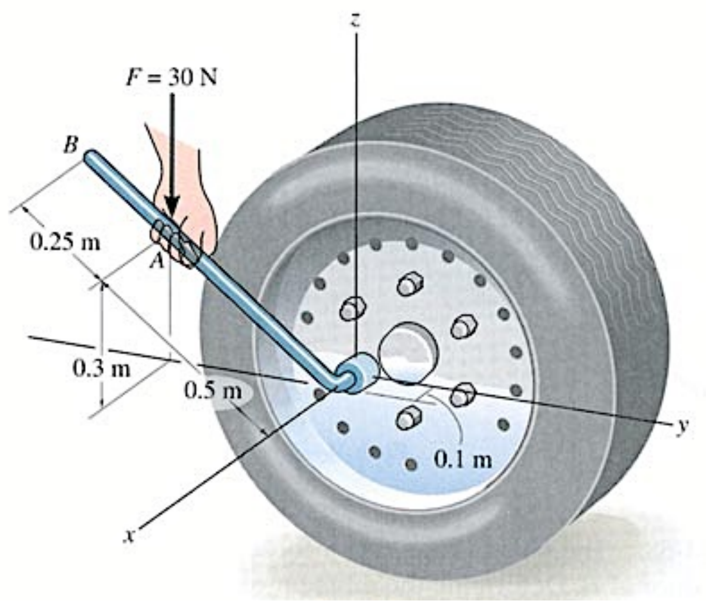
$$M_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0{,}125 & 0{,}2165 & 0 \\ -60 & 20 & 15 \end{vmatrix}$$

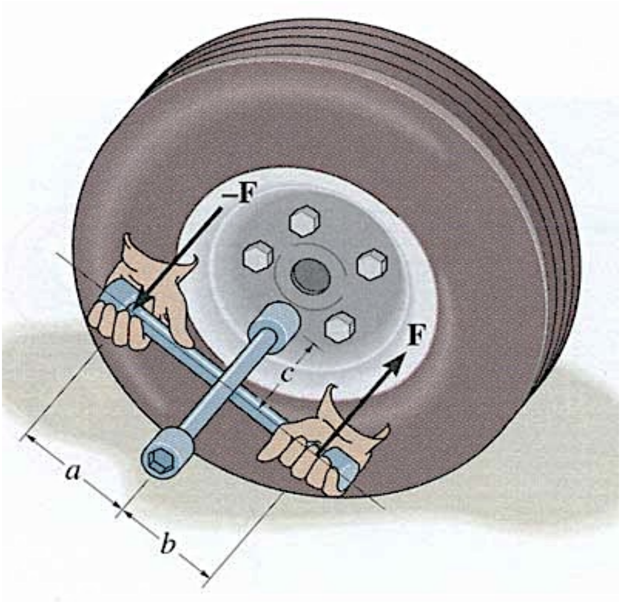
$$= (1)\ \{\ (0{,}125)(20) - (0{,}2165)(-60)\ \}$$

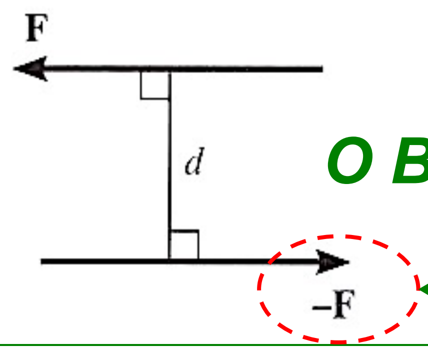
$$= 15{,}5\ Nm$$



MOMENTO DE UM BINÁRIO



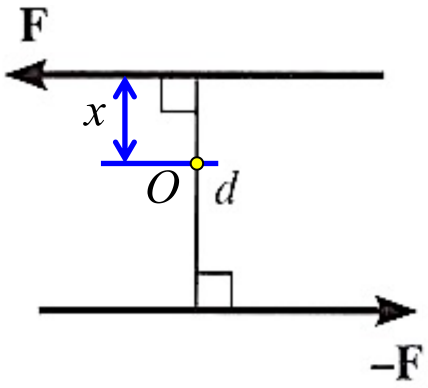




O BINÁRIO

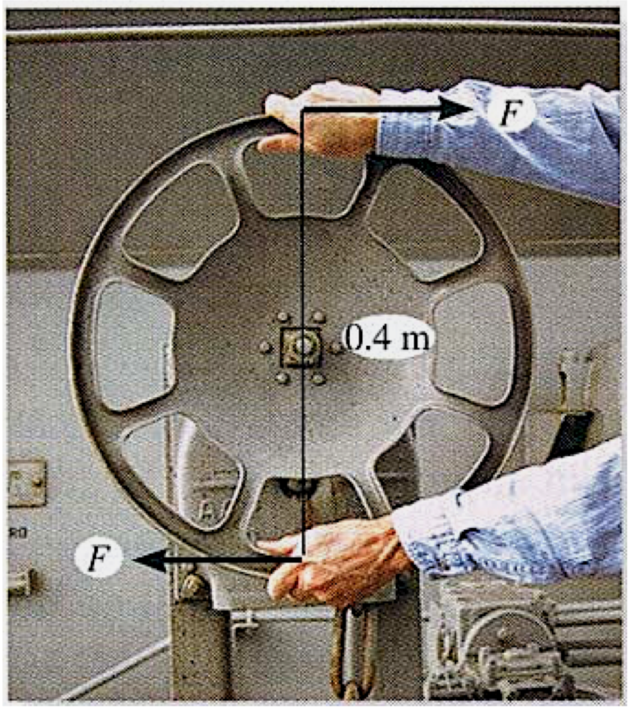
O par de forças paralelas de igual intensidade mas em sentidos contrários promovem tendência de rotação.

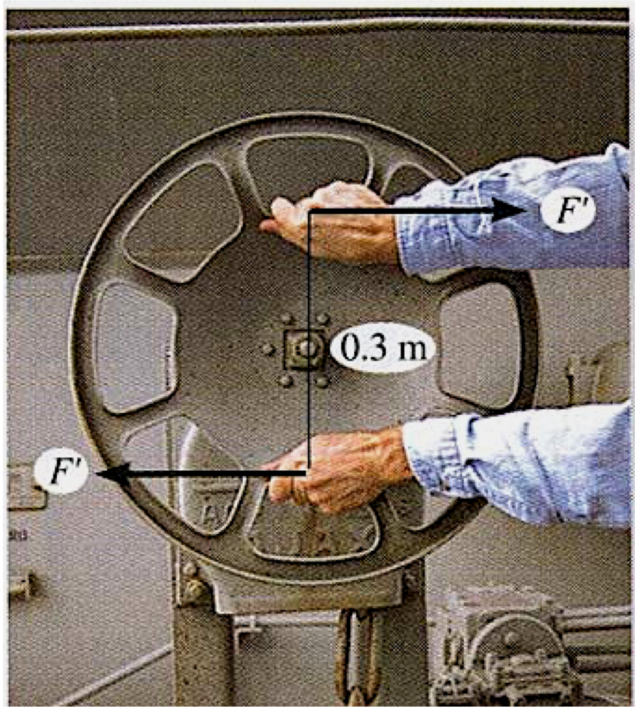
Sinal usado apenas para identificar como binário de forças.



Análise escalar:

$$M_O = F\,x + F\,(d - x) = F\,d$$

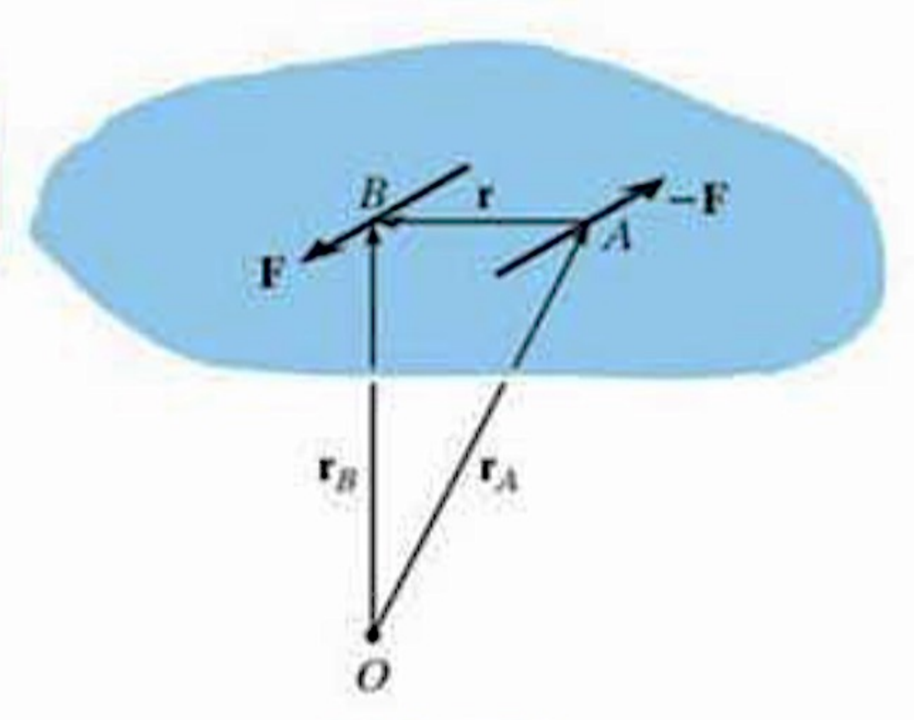


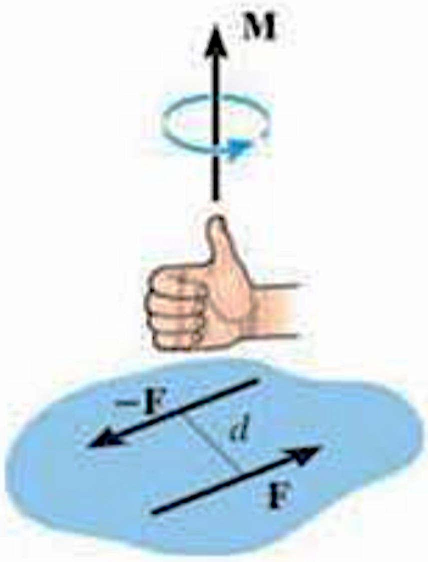


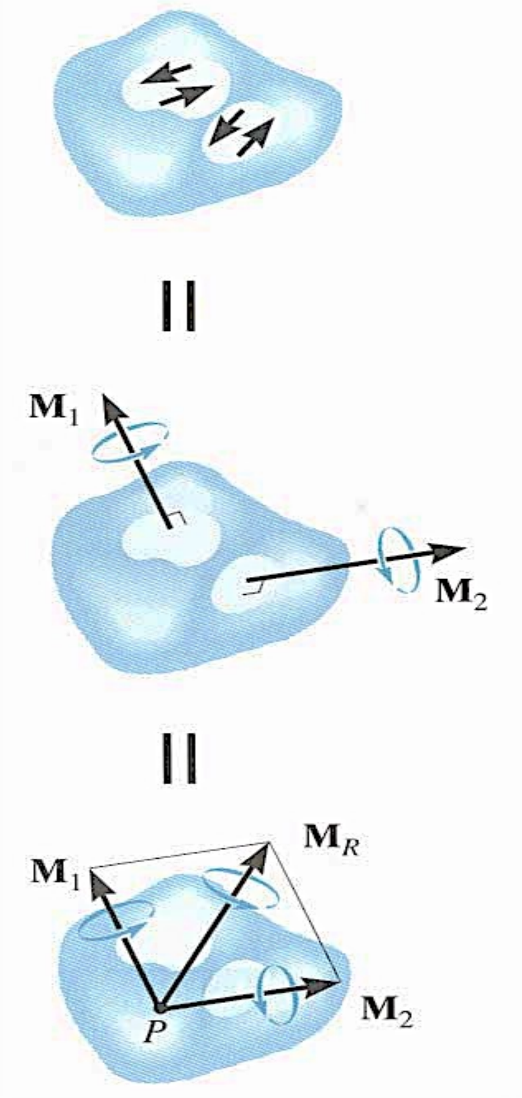
Análise Vetorial: admitindo ponto *O* arbitrário no espaço,

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{r}_A \times (\mathbf{-F}) + \boldsymbol{r}_B \times \mathbf{F} = (\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A) \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{r} \times \mathbf{F}$$







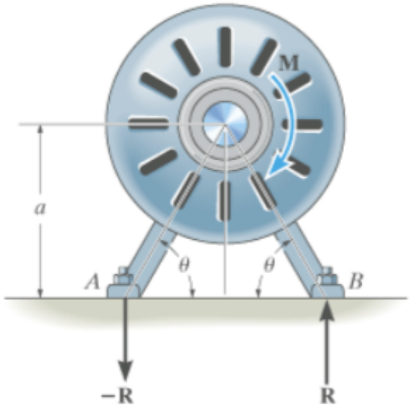
Como os momentos de binários dependem apenas das distâncias entre as linhas de ação das forças, então os binários são …

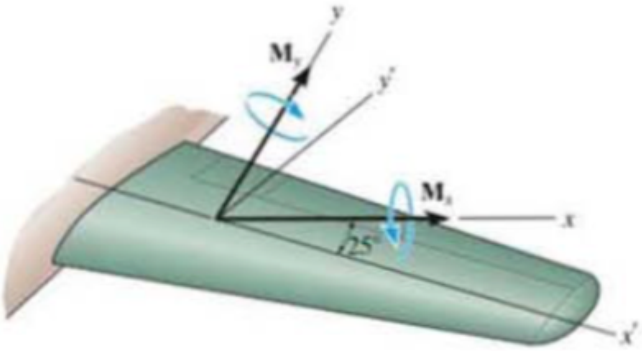
VETORES LIVRES!

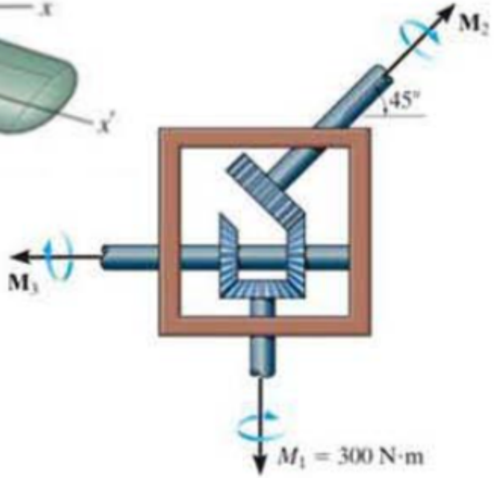
Portanto, os binários podem se movidos para qualquer lugar do corpo que seus efeitos serão os mesmos.

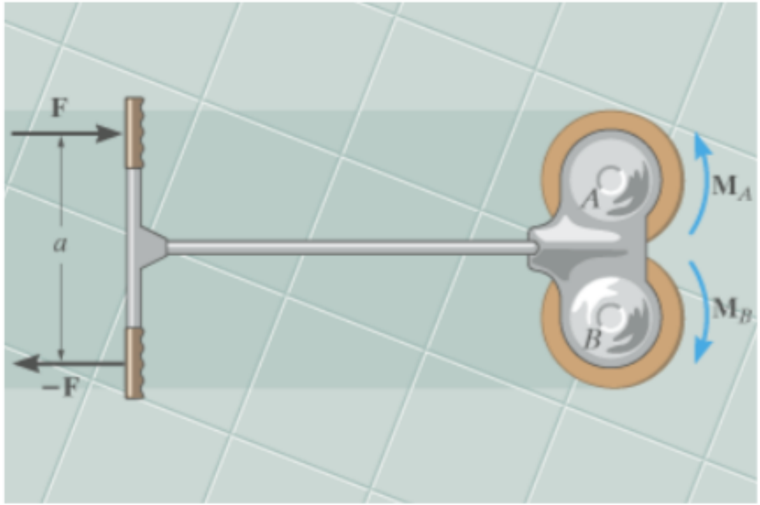
Momentos de binários são vetores que obedecem todas as operações de vetores!

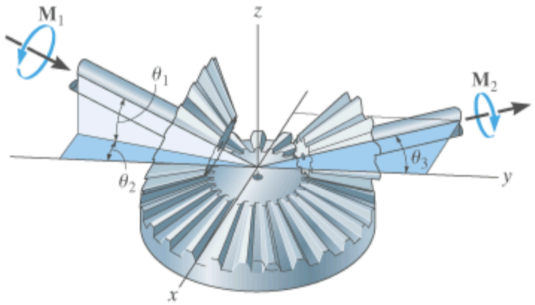
Aonde encontramos binários …





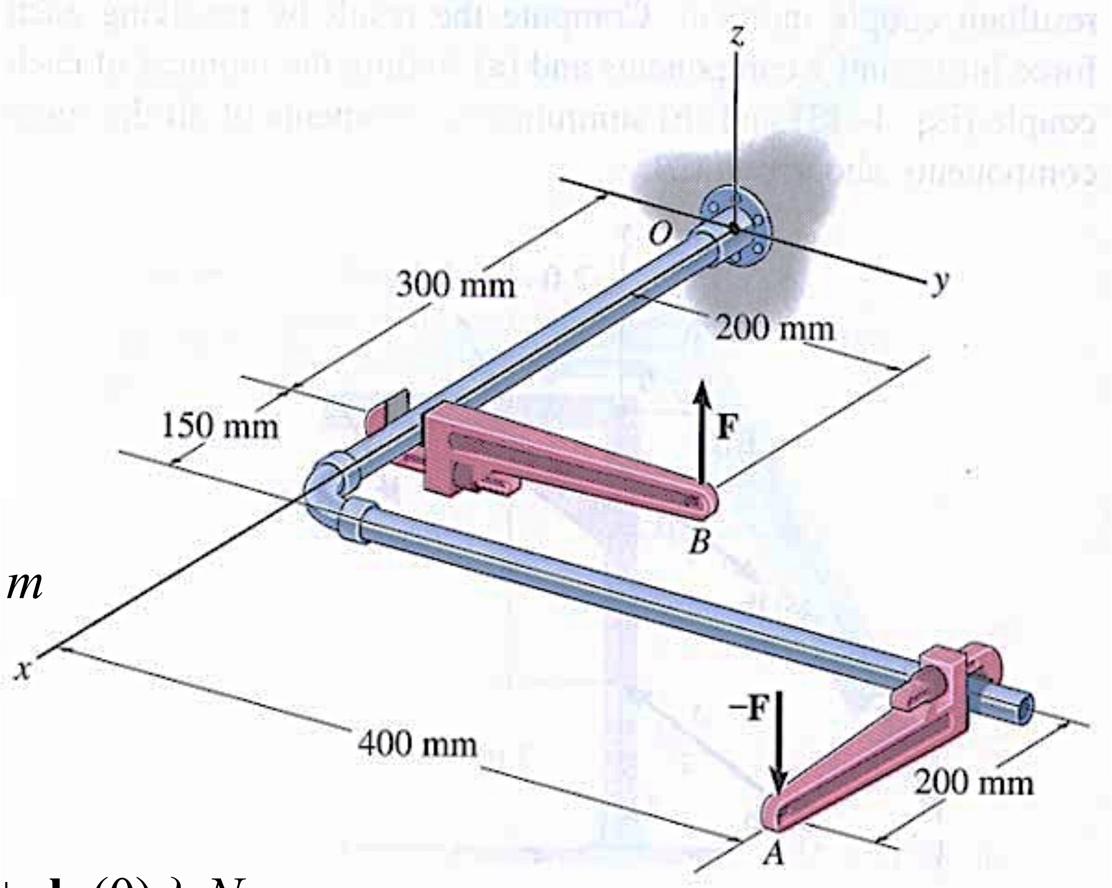






Exemplo

Determine o momento de binário atuando nos canos dado $\mathbf{F} = \{25\ \mathbf{k}\}\ N$.



Sabe-se que o binário é dado por:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{r}_{BA} \times \mathbf{F}$$

$$\boldsymbol{r}_{BA} = \{\ \text{-}350\ \mathbf{i}\ - 200\ \mathbf{j}\}\ mm = \{\ \text{-}0{,}35\ \boldsymbol{i}\ -\ 0{,}2\ \boldsymbol{j}\}\ m$$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0{,}35 & -0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{vmatrix}$$

$$= \{\ \mathbf{i}\ (\ \text{-}5 - 0\ )\ -\ \mathbf{j}\ (\text{-}\ 8{,}75 -\ 0)\ +\ \mathbf{k}\ (0)\ \}\ Nm$$

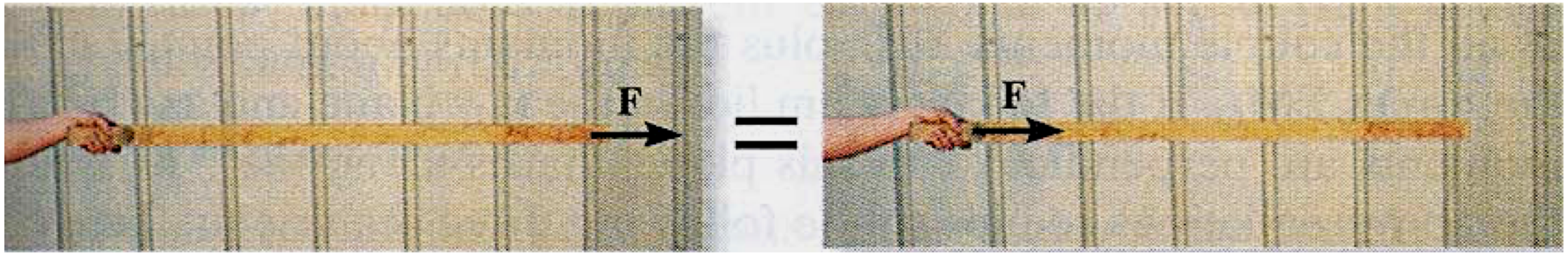
$$= \{\ \text{-}5\ \mathbf{i}\ +\ 8{,}75\ \mathbf{j}\ \}\ Nm$$

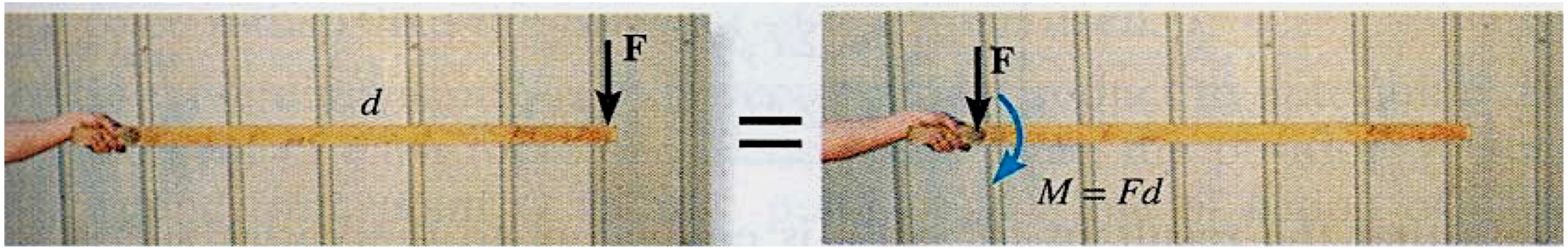
Resultante de Sistemas de Forças Atuantes

- *Part 1 – Momento de uma Força;*
- *Part 2 – Momento de uma Força em um Eixo Específico e Momento de um Binário;*
- *Part 3 – Sistemas Equivalentes;*
- *Part 4 – Redução de um Sistema Simples de Cargas Distribuídas.*

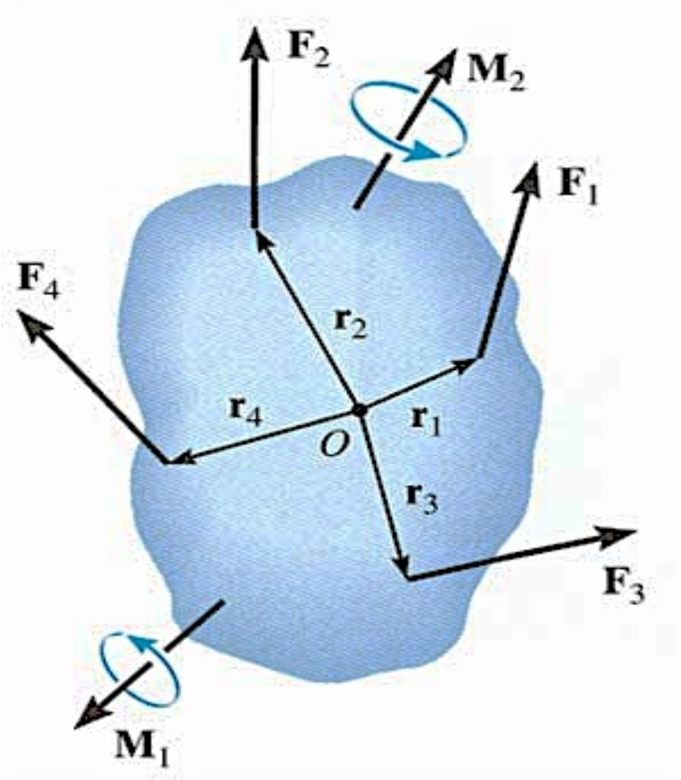
SISTEMAS EQUIVALENTES
(FORÇA-BINÁRIO)

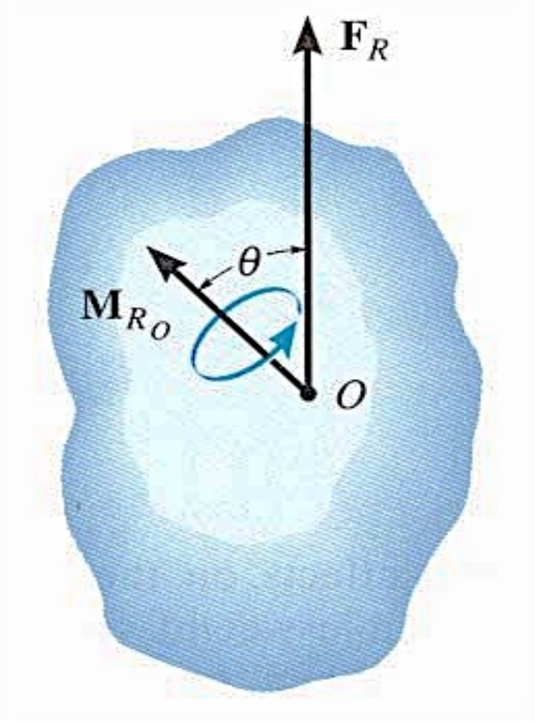
Observar as seguintes condições equivalentes que podemos usar para análise de sistemas de forças e momentos de binário atuates.



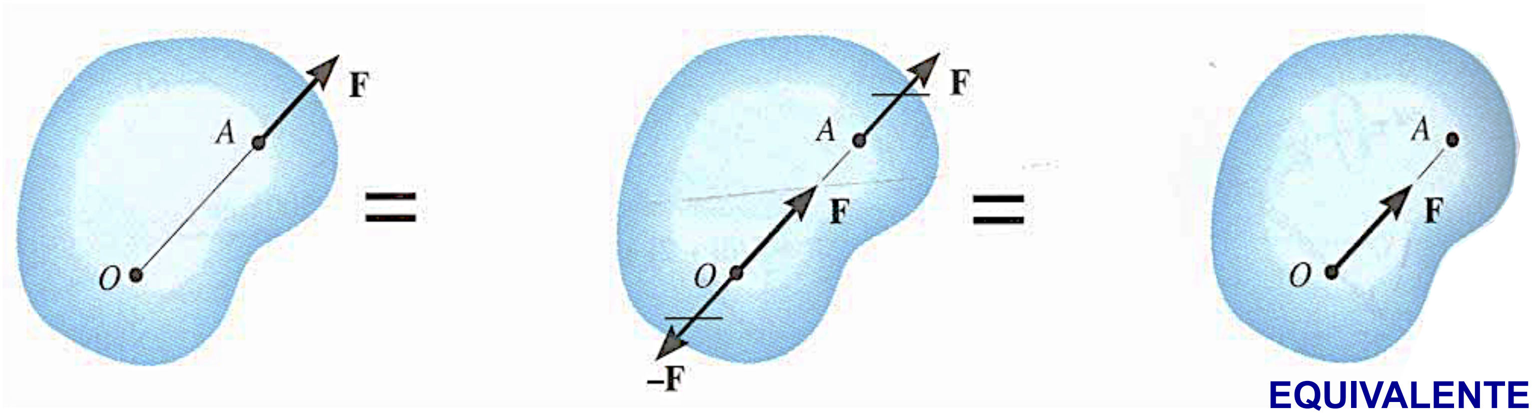


SISTEMAS EQUIVALENTES



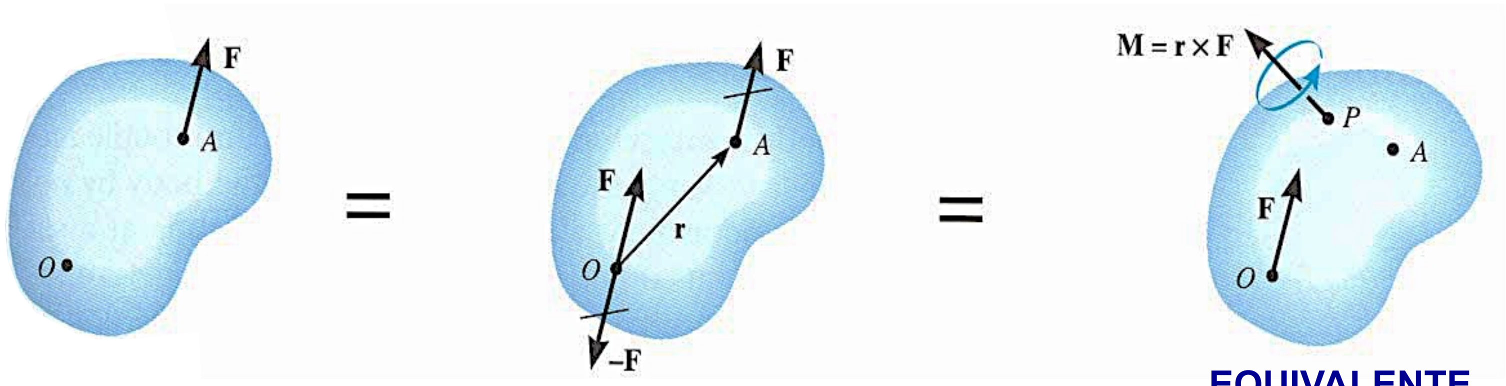


MOVENDO UMA FORÇA AO LONGO DE SUA LINHA DE AÇÃO:



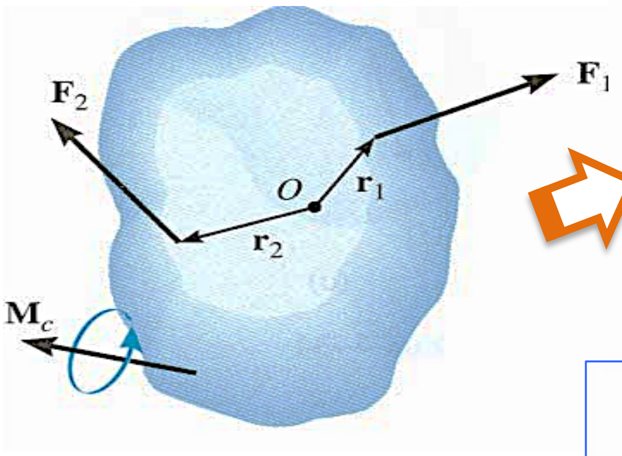
EQUIVALENTE

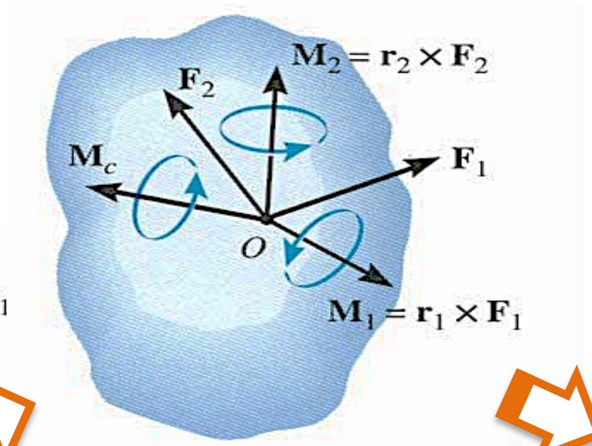
MOVENDO UMA FORÇA FORA DE SUA LINHA DE AÇÃO:



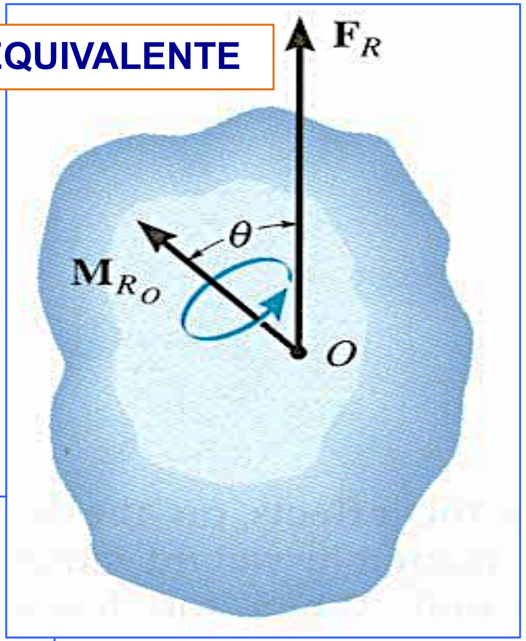
EQUIVALENTE

FORÇA E BINÁRIO RESULTANTES DE UM SISTEMA:





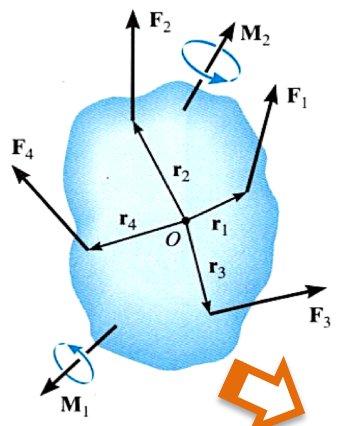
EQUIVALENTE



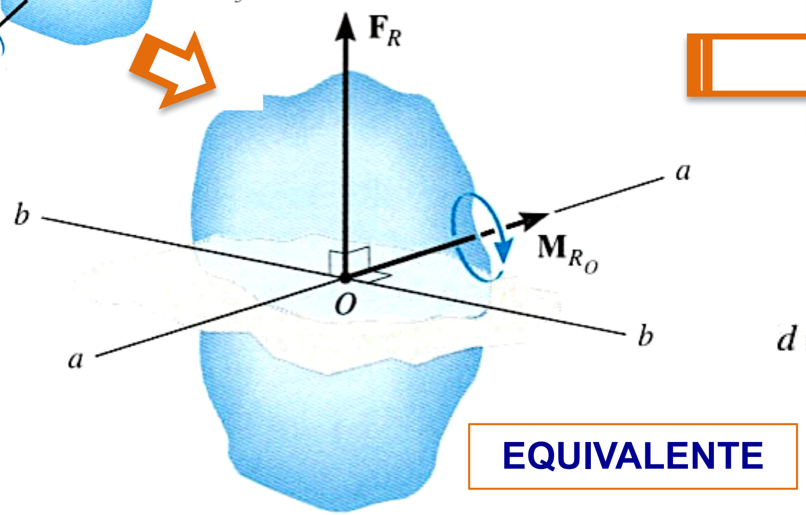
$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$$

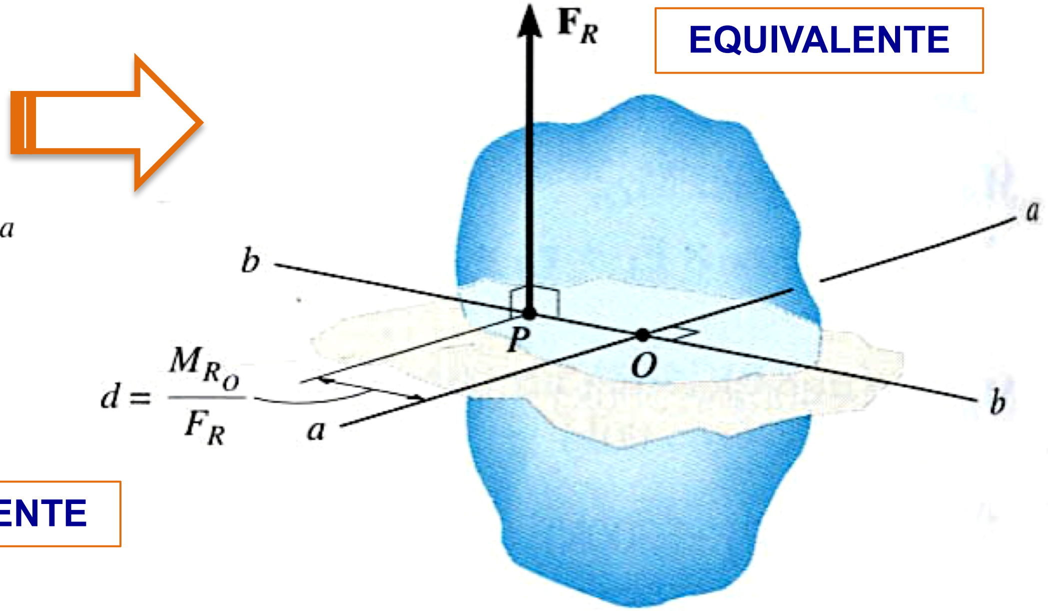
$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma \mathbf{M}_c + \Sigma \mathbf{M}_O$$

REDUZINDO FORÇA E BINÁRIO PARA UMA ÚNICA FORÇA:



Se $\mathbf{F}_R$ e $\mathbf{M}_{Ro}$ são perpendiculares entre si, então o sistema pode ser reduzido para **uma força única**, $\mathbf{F}_R$, apenas movendo o vetor $\mathbf{F}_R$ de O para P.

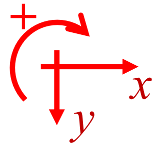




Exemplo

Determine a força e binário resultantes equivalentes agindo no ponto A. Em seguida obter a força única equivalente ao longo da viga AB.

Seja:



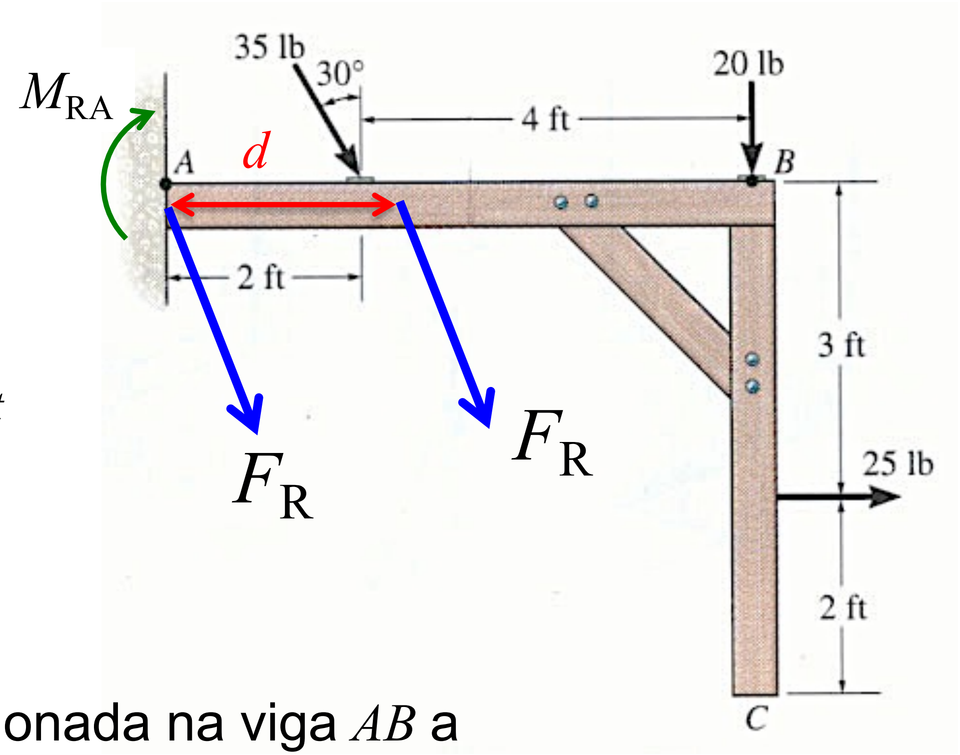
$$+\rightarrow\ \Sigma F_{Rx} = 25 + 35\ \mathrm{sen}(30°) = 42{,}5\ lb$$

$$+\downarrow\ \Sigma F_{Ry} = 20 + 35\cos(30°) = 50{,}31\ lb$$

$$+\circlearrowleft\ M_{RA} = (35)\cos(30°)(2) + 20(6) - 25(3) = 105{,}6\ lb{\cdot}ft$$

$$F_R = (\ 42{,}5^2 + 50{,}31^2\ )^{1/2} = 65{,}9\ lb$$

$$\searrow\ \theta = \tan^{-1}(\ 50{,}31/42{,}5) = 49{,}8°$$



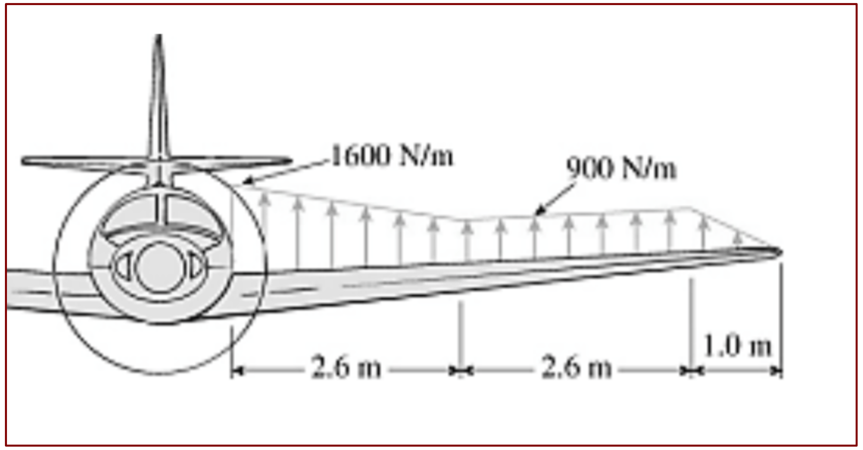
A força única equivalente $\mathbf{F}_R$ pode ser posicionada na viga AB a uma distância d de A:

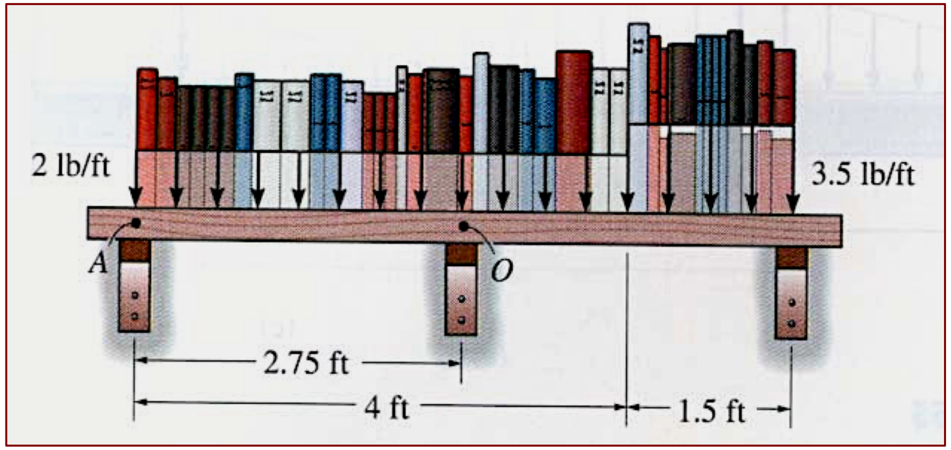
$$d = M_{RA}/F_{Ry} = 105{,}6/50{,}31 = 2{,}10\ ft$$

Resultante de Sistemas de Forças Atuantes

- *Part 1 – Momento de uma Força;*
- *Part 2 – Momento de uma Força em um Eixo Específico e Momento de um Binário;*
- *Part 3 – Sistemas Equivalentes;*
- *Part 4 – Redução de um Sistema Simples de Cargas Distribuídas.*

REDUÇÃO DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

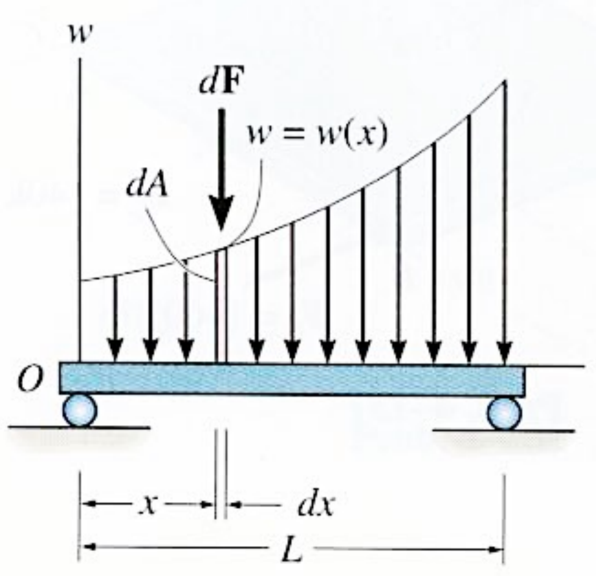




O carregamento usual em máquinas e estruturas é pelo contado de superfícies de componentes ou pela ação de forças de campo. Uma simplificação se dá considerando distribuição das cargas em uma direção.

É sempre possível reduzir uma carga distribuída por uma força equivalente.

RESULTANTE DE UMA CARGA DISTRIBUÍDA



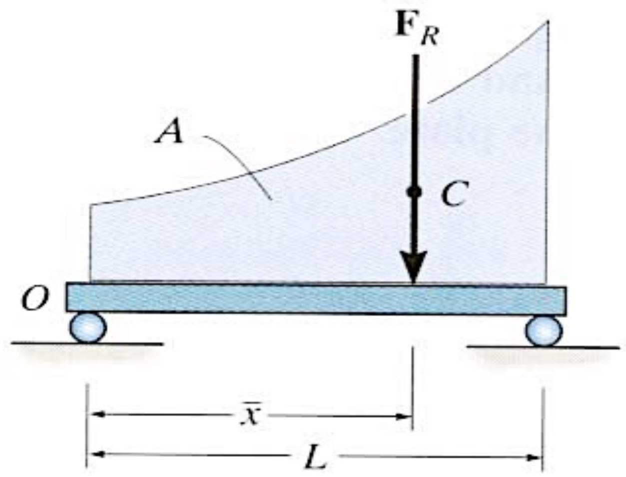
A magnitude de dF agindo no elemento infinitesimal de comprimento dx é

$$dF = w(x)\,dx$$

A força líquida na viga é dada por

$$+\downarrow\ F_R = \int_L dF = \int_L w(x)\,dx = A$$

onde A é a área definida pela função $w(x)$.

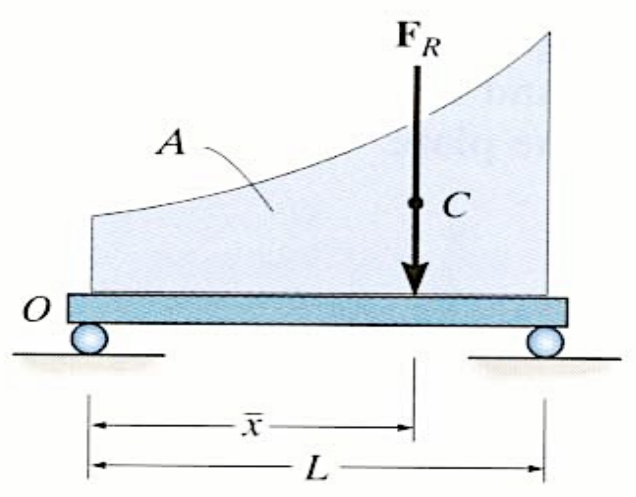


A linha da ação da resultante é deve passar pelo ponto C.

Como definir esse ponto?

LOCALIZAÇÃO DA RESULTANTE DE UMA CARGA DISTRIBUÍDA

Observar que a força dF produzirá um momento $M = x\ dF$ em torno do ponto O.



O momento total em torno do ponto O será

$$\curvearrowleft + \quad M_{RO} = \int_L x\ dF = \int_L x\ w(x)\ dx$$

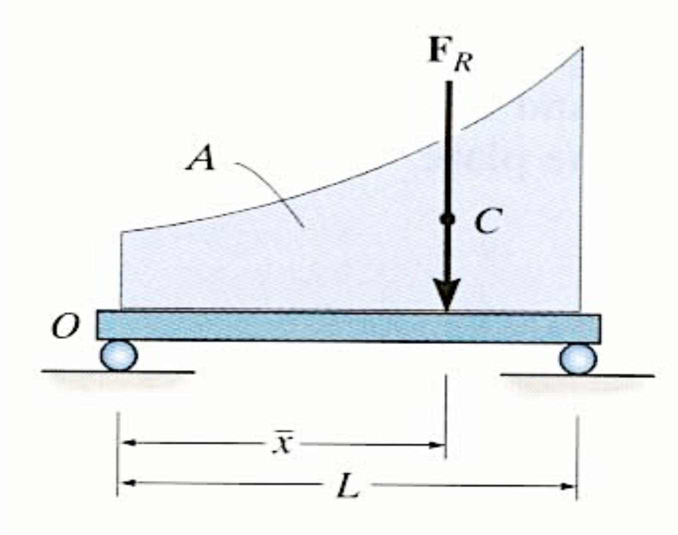
Se F_R age em $\bar{x}$, então produzirá o momento em relação ao ponto O:

$$\curvearrowleft + \quad M_{RO} = \bar{x}\ F_R = \bar{x} \int_L w(x)\ dx$$

Portanto:

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\ w(x)\ dx}{\int_L w(x)\ dx} = \frac{\int_A x\ dA}{\int_A dA}$$

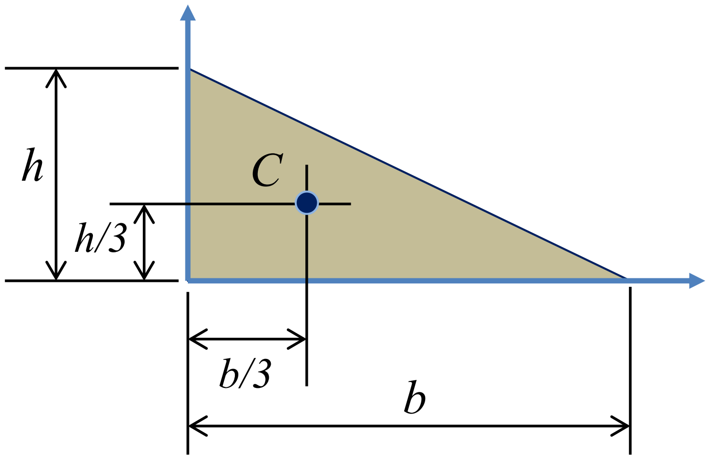
LOCALIZAÇÃO DA RESULTANTE DE UMA CARGA DISTRIBUÍDA

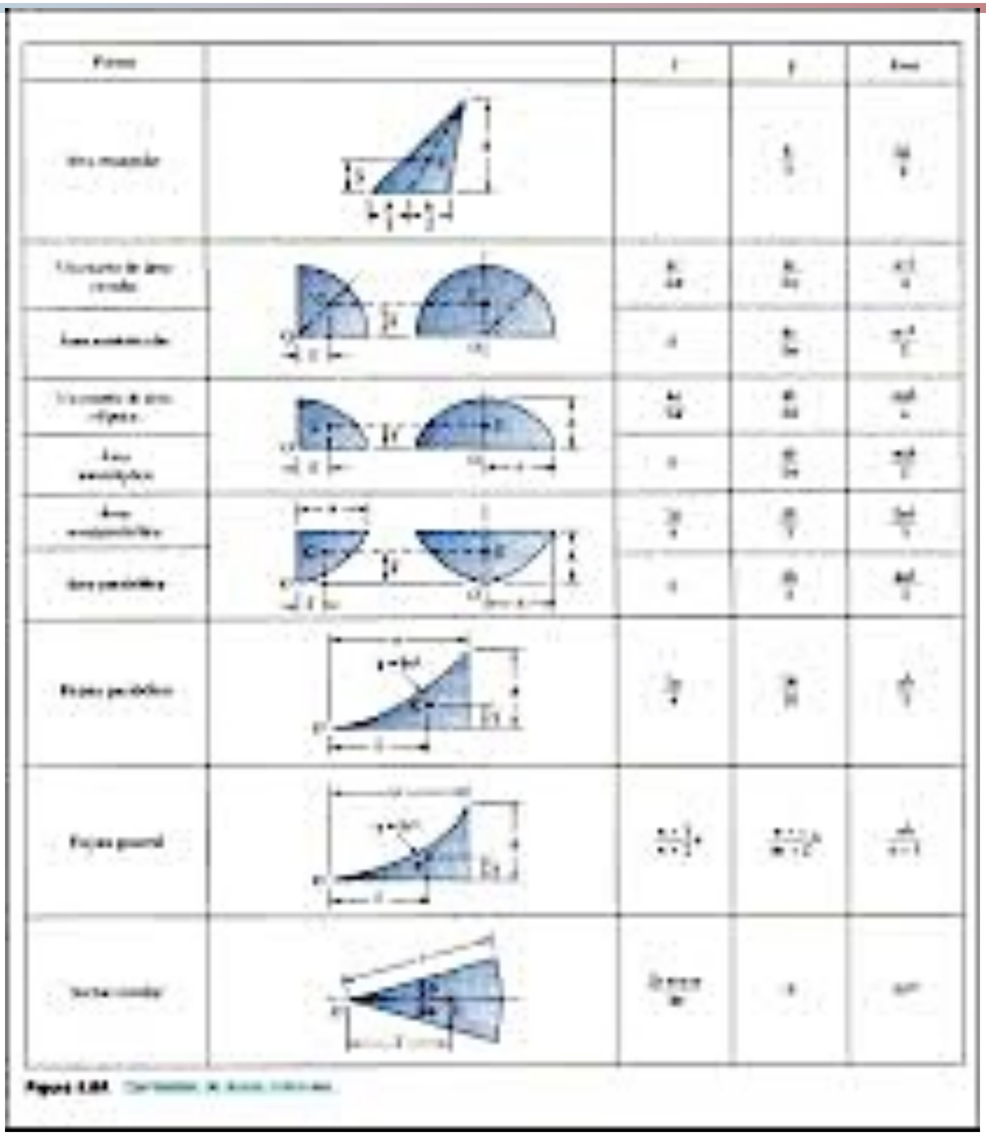


$$\bar{x} = \frac{\int_L x\, w(x)\, dx}{\int_L w(x)\, dx} = \frac{\int_A x\, dA}{\int_A dA}$$

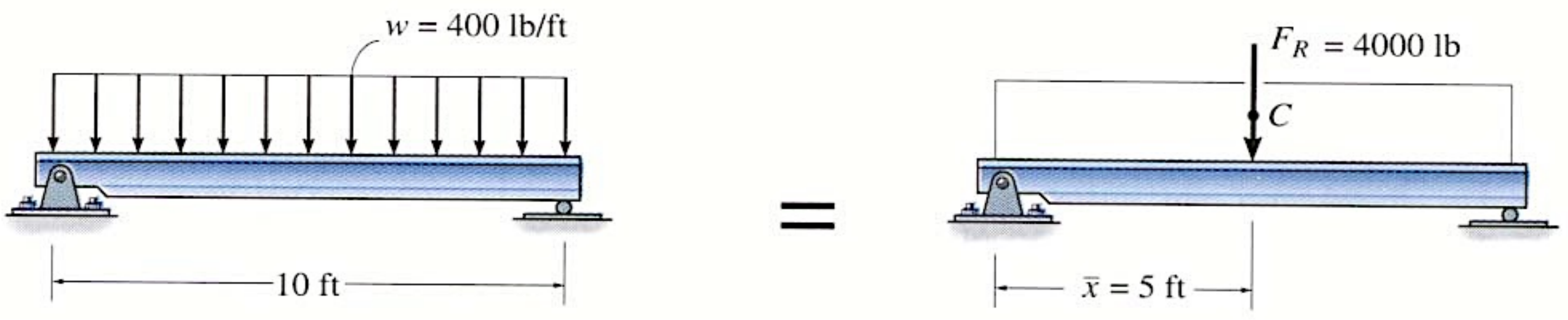
Conclui-se que a força F_R age através do ponto C, o qual é o *centro geométrico* ou **centróide** da área definida pela função de carregamento $w(x)$.

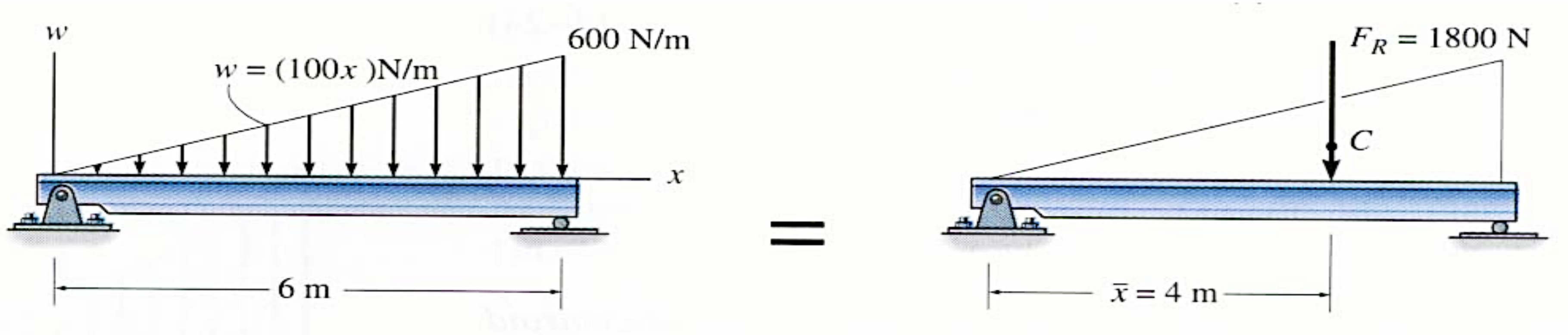
Valores das coordenadas de centróide de figuras planas podem ser encontradas em Tabelas.





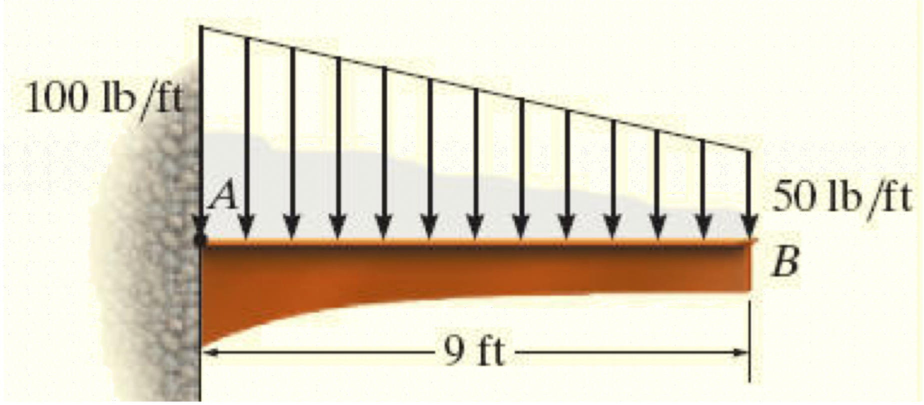
Exemplos


w = 400 lb/ft
10 ft
=
F_R = 4000 lb
C
$\bar{x}$ = 5 ft

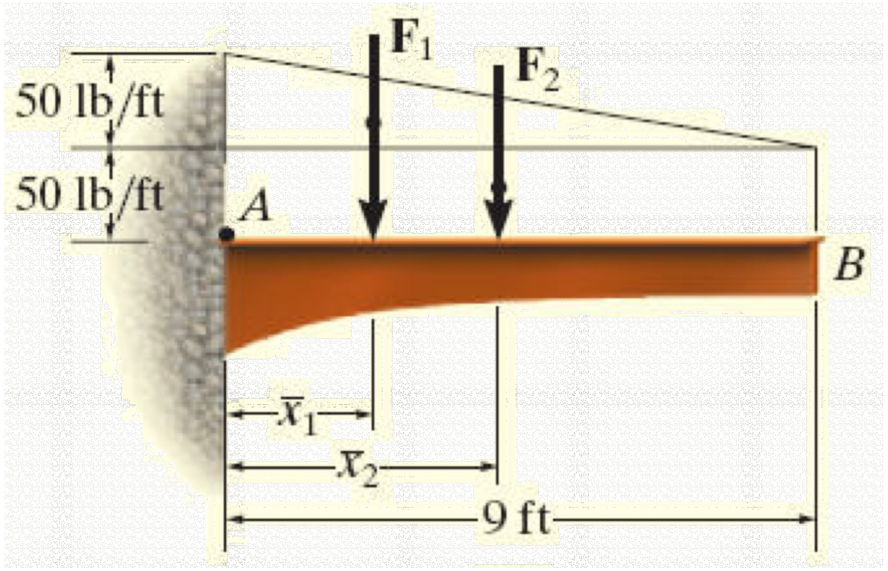

w
600 N/m
w = (100x)N/m
x
6 m
=
F_R = 1800 N
C
$\bar{x}$ = 4 m

Exemplo

Determine a força resultante equivalente.



Pode-se considerer a carga distribuída do trapézio como a composição de um retângulo e um triângulo. Então:



$$F_1 = \tfrac{1}{2}(9\text{ ft})(50\text{ lb/ft}) = 225\text{ lb}$$

$$F_2 = (9\text{ ft})(50\text{ lb/ft}) = 450\text{ lb}$$

$$\bar{x}_1 = \tfrac{1}{3}(9\text{ ft}) = 3\text{ ft}$$

$$\bar{x}_2 = \tfrac{1}{2}(9\text{ ft}) = 4.5\text{ ft}$$

posição dos centróides

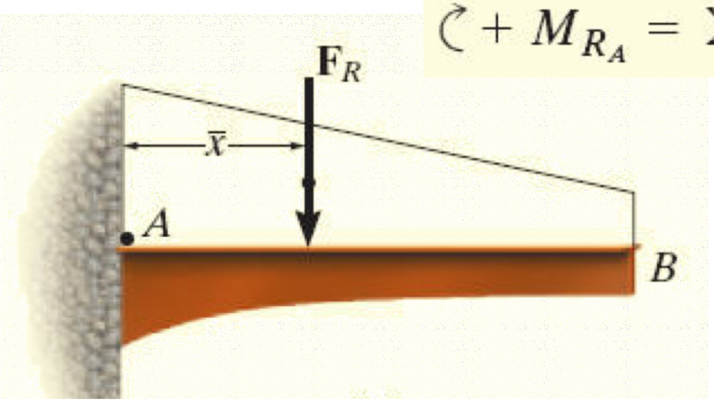
Exemplo (cont.)

A força resultante equivalente ao carregamento distribuído é:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \qquad F_R = 225 + 450 = 675 \text{ lb}$$

A posição da força resultante pode ser obtida tomando um ponto de referência e obtendo o momento devido as cargas de cada contribuição. Considerando o ponto *A*:

$$\circlearrowright + M_{R_A} = \Sigma M_A; \quad \bar{x}(675) = 3(225) + 4.5(450)$$



$$\bar{x} = 4 \text{ ft}$$

Resolva o mesmo problema considerando a carga distribuída dividida como na figura.