1. **6.2 – simplificado**[I*] A partir da força de Lorentz, mostre que o torque em um circuito elétrico quadrado em um campo magnético uniforme $\vec{B}$ é $\vec{m} \times \vec{B}$.

Força de Lorentz: $\vec{F} = \int I\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = I\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$

Torque é $\vec{N} = \vec{r} \wedge \vec{F} \Rightarrow d\vec{N} = \vec{r} \wedge d\vec{F} = \vec{r} \wedge (I\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$ ①

$$\vec{r} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) + d\vec{\ell} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{r}) + \vec{B} \wedge (\vec{r} \wedge d\vec{\ell}) = \vec{0} \quad (1.6) \quad ②$$

$\vec{B}$ sendo constante e $d\vec{r} = d\vec{\ell}$

$$d[\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{B})] = d\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{B}) + \vec{r} \wedge (d\vec{r} \wedge \vec{B}) = d\vec{\ell} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{B}) + \vec{r} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$$

$$d\vec{\ell} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{B}) = d[\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{B})] - \vec{r} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \quad ③$$

$$d\vec{\ell} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{B}) = \vec{r} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) + \vec{B} \wedge (\vec{r} \wedge d\vec{\ell}) \quad ②$$

③ = ② $$d[\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{B})] - \vec{r} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) = \vec{r} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) + \vec{B} \wedge (\vec{r} \wedge d\vec{\ell})$$

$$2\vec{r} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) = d[\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{B})] - \vec{B} \wedge (\vec{r} \wedge d\vec{\ell})$$

① $$d\vec{N} = I\{\vec{r} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B})\} = \frac{1}{2} I \{ d[\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{B})] - \vec{B} \wedge (\vec{r} \wedge d\vec{\ell}) \}$$

$$\vec{N} = +\frac{I}{2}\left\{\oint\left[d\left(\vec{r}\wedge(\vec{r}\wedge\vec{B})\right)\right] - \oint \vec{B}\wedge(\vec{r}\wedge d\vec{l})\right\}$$

$$\vec{N} = -\frac{1}{2} I \oint \vec{B}\wedge(\vec{r}\wedge d\vec{l})$$

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\oint \vec{r}\wedge d\vec{l} \quad (C.1)$$

$$\vec{N} = -\frac{1}{2} I\, \vec{B}\wedge\oint \vec{r}\wedge d\vec{l}$$

$$\vec{N} = -\frac{1}{2} I\, \vec{B}\wedge 2\vec{a}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{2} I \times 2\vec{a}\wedge\vec{B}$$

$$\vec{N} = I\vec{a}\wedge\vec{B}$$

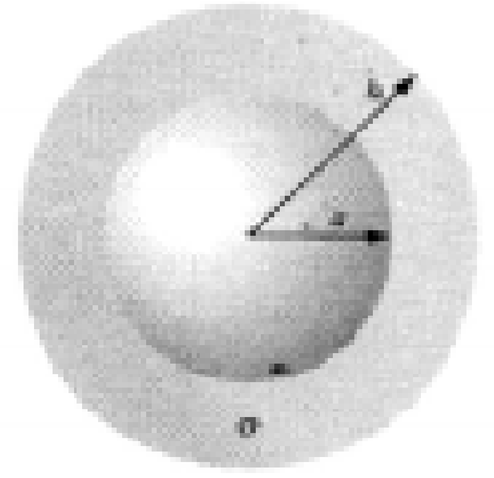
$\vec{m}$: momento $= I\vec{a}$

$$\vec{N} = \vec{m}\wedge\vec{B}$$

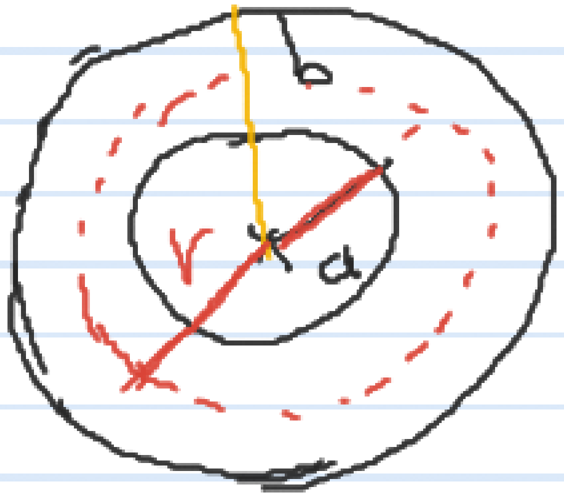
9. **7.1** [V*] Duas cascas esféricas concêntricas, de raios a e b, respectivamente, são separados por um material com condutividade baixa σ (Fig. 7.4a).

(a) Se eles forem mantidos a uma diferença de potencial V, qual a corrente que flui de uma para a outra?

(b) Qual é a resistência do conjunto?



(a)



a) Corrente I ?

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad e \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad \vec{E} = ?$$

Aplicar lei de Gauss $\Rightarrow \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = \sigma \int \vec{E} \cdot d\vec{a} \quad ; \quad d\vec{a} = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{n}$$

$$\vec{n} = \hat{r}$$

$$I = \sigma \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{r^2}} \times \cancel{r^2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$I = \delta \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \times 2\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{Q \times 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}(1+1) = \frac{4\pi Q}{4\pi\varepsilon_0} = \delta \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$I = \frac{\delta Q}{\varepsilon_0} \qquad Q = ?$$

$$V_a - V_b = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

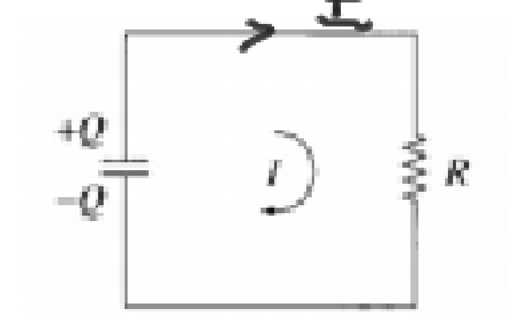
$$V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \Rightarrow Q = (V_a - V_b)\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

$$I = \frac{\delta 4\pi \cancel{\varepsilon_0}(V_a - V_b)}{\cancel{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

b) Resistancia ? $V = RI \Rightarrow I = \frac{\cancel{V_a - V_b}}{R} = \frac{\delta 4\pi \cancel{(V_a - V_b)}}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$

$$\frac{1}{R} = \frac{\sigma 4\pi}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{\sigma 4\pi}}$$

10. 7.2 [VI*] Um capacitor C, com dielétrico perfeitamente isolante, é carregado inicialmente até ter potencial V_0. No instante $t = 0$, ele é conectado a um resistor R e começa a se descarregar (Fig. 7.5a). Qual é a corrente $I(t)$ através do resistor?



(a)

$$V - RI = 0 \Rightarrow V = RI \Rightarrow I = \frac{V}{R}, \quad V = \frac{Q}{C}$$

$$I = \frac{Q(t)}{RC}$$

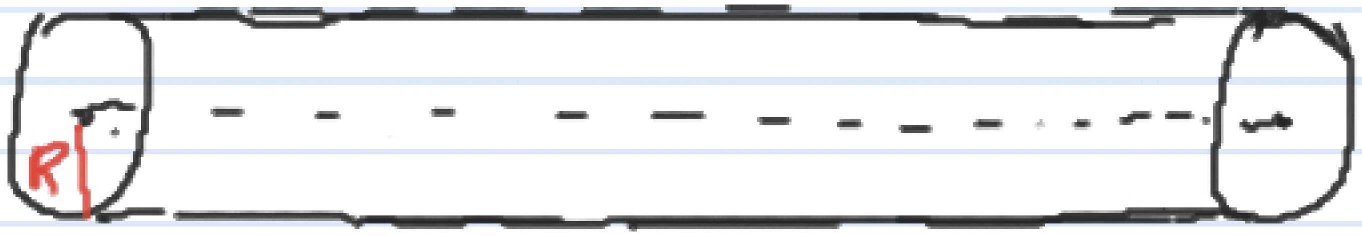
$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q(t)}{RC}$$

$$+\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} \Rightarrow Q = Q_0 \exp\frac{-t}{R}, \quad a \; t = 0 \quad Q = Q_0$$

$$Q_0 = CV_0 \Rightarrow Q = CV_0 \exp\frac{-t}{RC} \Rightarrow I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\cancel{C}V_0}{R\cancel{C}} \exp\frac{-t}{RC}$$

$$\boxed{I(t) = \frac{V_0}{R} \exp\frac{-t}{RC}}$$

3. **6.8**[II*] Um cilindro muito longo de raio R tem magnetização $\vec{M} = ks^2\hat{\phi}$, onde k é uma constante, em coordenadas cilíndricas (Fig. 6.13). Encontre o campo magnético devido a $\vec{M}$, dentro do cilindro.

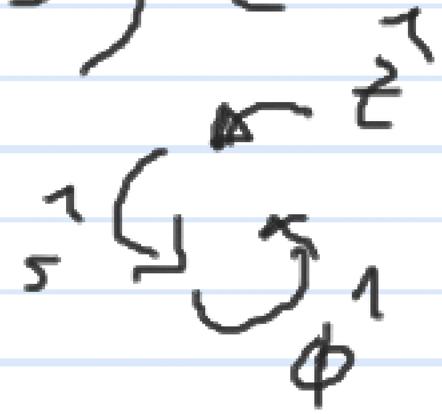


Campo magnetico devido à $\vec{M}$

lei de Ampere $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} = \mu_0 \int \vec{J}\cdot d\vec{a}$

$$\vec{J} = \vec{J}_b = \vec{\nabla}\wedge\vec{M} = \frac{1}{s}\frac{d}{ds}(s)\,\hat{s}\wedge ks^2\hat{\phi} = \frac{1}{s}\frac{d}{ds}(s\,k\,s^2)\,\hat{z}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{s}\frac{d}{ds}(ks^3)\,\hat{z} = \frac{1}{\cancel{s}}\,k\times 3s^{\cancel{2}}\,\hat{z} = 3ks\,\hat{z}$$

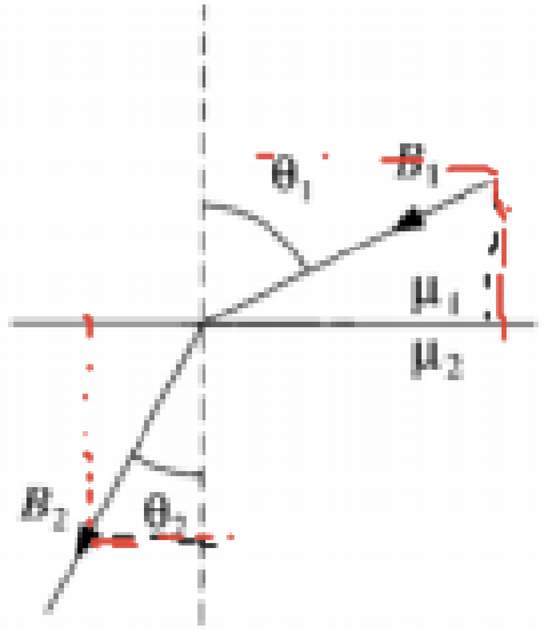


$$B\times 2\pi s = \mu_0\int j\times 2\pi s'\,ds' = \mu_0\int 2\pi\times 3ks'^2\,ds$$

$$B\cancel{s} = 3\mu_0 k\int s'^2\,ds' = 3\mu_0 k\left[\frac{s^3}{3}\right]_0^s = \cancel{3}\mu_0 k\,\frac{s^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{3}}$$

$$B = \mu_0 k s^2 \Rightarrow \vec{B} = \mu_0\vec{M}$$

7. 6.26[IV*] Na interface entre um meio magnético linear e outro, as linhas de campo magnético mudam de direção. Veja a Fig. 6.32. Mostre que $\tan\theta_2 / \tan\theta_1 = \mu_2/\mu_1$. Suponha que não há correntes livres na superfície.



$$B_{1n} = B_{2n} \quad (n: \text{normal})$$

$$H_{2\parallel} = H_{2n}$$ não ha correntes livres na superfície

$$B = \mu H \Rightarrow \frac{B_{2\parallel}}{\mu_2} = \frac{B_{1\parallel}}{\mu_1}$$

$$\Rightarrow \frac{B_{2\parallel}}{B_{1\parallel}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \tan\theta_2 = \dfrac{B_{2\parallel}}{B_{2n}} \\[2ex] \tan\theta_1 = \dfrac{B_{1\parallel}}{B_{1n}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{B_{2\parallel}}{\cancel{B_{2n}}} \times \frac{\cancel{B_{1n}}}{B_{1\parallel}} = \frac{B_{2\parallel}}{B_{1\parallel}} \quad (2)$$

(1) e (2) $\Rightarrow \tan\theta_2 / \tan\theta_1 = \mu_2 / \mu_1$