



PME3100 Mecânica I



Notas de aula

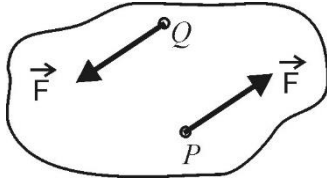
Estática - Sistemas de Forças (parte 2)

Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

PME3100 Mecânica I

2.1.5 – Binário

Um binário é um sistema de forças constituído por duas forças opostas (mesmo módulo e sentidos opostos): (\vec{F}, P) e $(-\vec{F}, Q)$.



A resultante é nula e, portanto, o momento de um binário independe do polo:

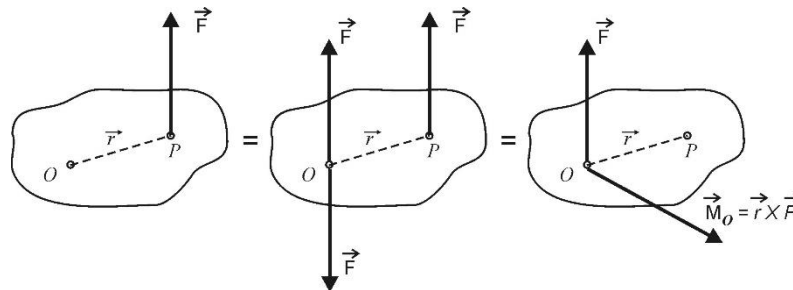
$$\vec{M}_{\text{binário}} = (P - Q) \wedge \vec{F}$$

2.1.6 – Sistemas equivalentes

Sistemas equivalentes são aqueles sistemas de forças que têm mesma resultante e mesmo momento em relação a um polo.

Propriedades:

- O equilíbrio de um corpo não se altera se substituirmos as forças aplicadas em um ponto pela resultante delas aplicada no mesmo ponto, e reciprocamente.
- O equilíbrio de um sólido não é alterado se o ponto de aplicação de uma força for transportado ao longo de sua reta de aplicação.
- Teorema: Todo sistema de forças aplicado a um sólido é equivalente a uma única força aplicada num ponto e um binário.



- Como consequência do teorema anterior, sendo qualquer sistema equivalente a uma única força \vec{R} aplicada num ponto O e um binário \vec{M}_O , temos quatro casos possíveis:

1º caso: $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$

Sistema equivalente a zero.

2º caso: $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O \neq \vec{0}$

Sistema equivalente a um binário.

3º caso: $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$

Neste caso, existem pontos E tais que $\vec{M}_E = \vec{0}$.

De fato, da fórmula de mudança de polo:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R} \Rightarrow \underbrace{(E - O) \wedge \vec{R}}_{\text{incógnita}} = \vec{M}_O - \vec{M}_E$$

Esta é uma equação vetorial do tipo $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$, que só terá solução se $\vec{u} \perp \vec{v}$. Como $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$, então $\vec{M}_O \perp \vec{R}$ ($\vec{M}_O \neq \vec{0}$) e a equação acima tem solução para $\vec{M}_E = \vec{0}$:

$$(E - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O \Rightarrow (E - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + t\vec{R}, \text{ com } t \text{ arbitrário}$$

Esta é a equação de uma reta paralela a \vec{R} .

Assim, neste caso o sistema é equivalente a uma única força, aplicada num ponto E qualquer daquela reta.

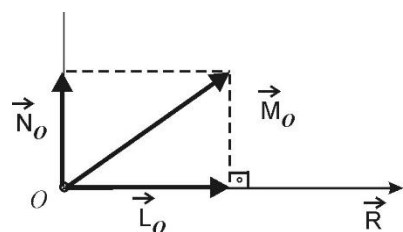
4º caso: $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $\vec{M}_O \cdot \vec{R} \neq 0$

O sistema é equivalente a (\vec{R}, O) mais um binário \vec{M}_O .

2.1.7 – Momento mínimo – Eixo central

O momento das forças de um sistema depende do polo escolhido. Procuremos os pontos (polos) E tais que o momento em relação a eles tenha intensidade (módulo) mínima (não necessariamente zero).

Da fórmula de mudança de polo, já vimos que, sendo \vec{M}_O o momento em relação a um polo O qualquer e \vec{R} a resultante, o produto $\vec{M}_O \cdot \vec{R}$ independe do polo escolhido. Ou seja, a componente



do momento \vec{M}_O na direção da resultante não depende do polo escolhido. Chamemos essa componente de \vec{L}_O e a outra componente, ortogonal a \vec{R} , de \vec{N}_O :

$$\text{O módulo de } \vec{M}_O \text{ será: } |\vec{M}_O|^2 = |\vec{L}_O|^2 + |\vec{N}_O|^2$$

Como \vec{L}_O não depende do polo O , o $|\vec{M}_O|$ mínimo será aquele calculado em relação a um ponto E tal que $|\vec{N}_E| = 0$, ou seja, \vec{M}_E terá a direção de \vec{R} :

$$\vec{M}_E = h\vec{R}$$

Teorema: O L.G. dos pontos E para os quais um sistema de forças de resultante $\vec{R} \neq \vec{0}$ tem momento $h\vec{R}$ é uma reta paralela a \vec{R} . O escalar h independe do ponto E da reta.

De fato:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R} = h\vec{R} \Rightarrow (E - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O - h\vec{R}$$

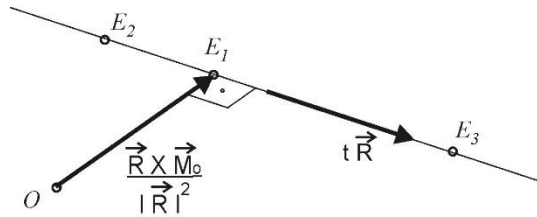
A equação acima tem solução para:

$$(\vec{M}_O - h\vec{R}) \perp \vec{R} \Rightarrow h = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2}$$

Os pontos E que satisfazem a equação acima são pontos de uma reta paralela a \vec{R} .

Esta reta é chamada eixo central do sistema de forças:

$$(E - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + t\vec{R}, t \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$



2.1.8 – Equilíbrio dos sólidos

Definição de equilíbrio:

Dizemos que um sistema está em equilíbrio em relação a um referencial (ou que as forças que nele atuam estão equilibradas) quando a ação total dessas forças é tal a manter o corpo em repouso, isto é, não produz no corpo, a partir do repouso, nenhuma variação de posição.

Teorema: a condição necessária e suficiente para o equilíbrio de um sólido (corpo rígido) é que sejam nulos a resultantes e o momento total de todas as forças aplicadas nele, em relação a um polo O qualquer:

$$\left\| \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{array} \right. \quad \text{forças} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{internas} \\ \text{externas} \end{array} \right.$$

- Princípio da ação e reação:” A cada força, proveniente da ação de um corpo C sobre um corpo C' , corresponde uma força oposta proveniente da ação de C' sobre C .”

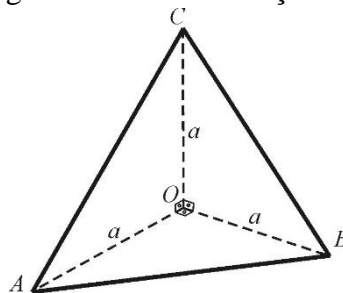
No equilíbrio, o sistema de forças internas, pelo princípio da ação e reação, será equivalente a zero. Assim, para obter o equilíbrio, necessitamos apenas que:

$$\left\| \begin{array}{l} \vec{R}_{ext} = \vec{0} \\ \vec{M}_{O_{ext}} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

2.1.9 – Exemplos

1) No tetraedro $OABC$ age o seguinte sistema de forças:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \lambda(A - O); (\vec{P}, A) \\ \vec{Q} &= \mu(B - A); (\vec{Q}, B) \\ \vec{R} &= \nu(C - B); (\vec{R}, C) \\ \vec{S} &= \rho(O - C); (\vec{S}, O) \end{aligned}$$

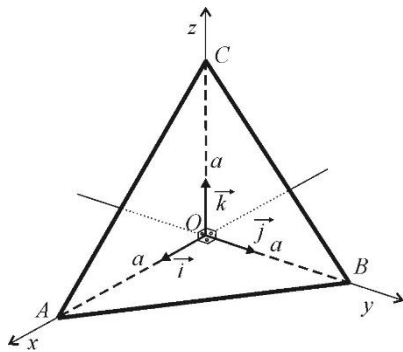


Determine:

- A resultante \vec{F} e o momento \vec{M}_O , em relação a O , do sistema de forças;
- As relações entre λ, μ, ν e ρ para que os sistema seja equivalente a:
 - uma única força
 - um binário

Resolução:

(a) Adotemos o sistema de coordenadas:



As componentes das forças nas direções de \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} serão:

$$\vec{P} = \lambda(A - O) = \lambda a \vec{i}$$

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \mu(B - A) = \mu[(B - O) + (O - A)] = \mu[a\vec{j} + a(-\vec{i})] \\ &= -\mu a \vec{i} + \mu a \vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \nu(C - B) = \nu[(C - O) + (O - B)] = \nu[a\vec{k} + a(-\vec{j})] \\ &= -\nu a \vec{j} + \nu a \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{S} = \rho(O - C) = \rho a (-\vec{k}) = -\rho a \vec{k}$$

A resultante \vec{F} será a soma de todas as forças do sistema:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{S} = (\lambda a \vec{i}) + (-\mu a \vec{i} + \mu a \vec{j}) + (-\nu a \vec{j} + \nu a \vec{k}) + (-\rho a \vec{k}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{F} = (\lambda - \mu) a \vec{i} + (\mu - \nu) a \vec{j} + (\nu - \rho) a \vec{k}}$$

O momento em relação a O será:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (A - O) \wedge \vec{P} + (B - O) \wedge \vec{Q} + (C - O) \wedge \vec{R} + (O - O) \wedge \vec{S} = \\ &= (a \vec{i}) \wedge (\lambda a \vec{i}) + (a \vec{j}) \wedge (-\mu a \vec{i} + \mu a \vec{j}) + (a \vec{k}) \wedge (-\nu a \vec{j} + \nu a \vec{k}) + \vec{0} = \\ &= \vec{0} + (-\mu a^2 \vec{j} \wedge \vec{i} + \vec{0}) + (-\nu a^2 \vec{k} \wedge \vec{j} + \vec{0}) = \\ &= -\mu a^2 (-\vec{k}) - \nu a^2 (-\vec{i}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{M}_O = \nu a^2 \vec{i} + \mu a^2 \vec{k}}$$

b)

b1) A condição necessária e suficiente para que o sistema seja equivalente a uma única força é:

$$\vec{M}_O \cdot \vec{F} = \vec{0}, \text{ com } \vec{F} \neq \vec{0}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O \cdot \vec{F} &= (\nu a^2 \vec{i} + \mu a^2 \vec{k}) \cdot [(\lambda - \mu) a \vec{i} + (\mu - \nu) a \vec{j} + (\nu - \rho) a \vec{k}] = \\ &= \nu a^3 (\lambda - \mu) + \vec{0} + \mu a^3 (\nu - \rho) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nu (\lambda - \mu) + \mu (\nu - \rho) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \nu \lambda = \mu \rho}$$

Assim, se $\nu \lambda = \mu \rho$, o sistema é equivalente a uma única força.

b2) Para o sistema ser equivalente a um binário, basta que a resultante seja nula:

$$\vec{F} = \vec{0}, \text{ com } \vec{M}_O \neq \vec{0}$$

Assim, com $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (\lambda - \mu) a \vec{i} + (\mu - \nu) a \vec{j} + (\nu - \rho) a \vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ \mu - \nu = 0 \\ \nu - \rho = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \mu \\ \mu = \nu \\ \nu = \rho \end{cases} \text{ ou } \boxed{\lambda = \mu = \nu = \rho} \end{aligned}$$

Assim, se $\lambda = \mu = \nu = \rho \neq 0$, o sistema será equivalente a um binário.