# Experimento II - Óptica ondulatória - Análise de imagens

# Objetivos do experimento

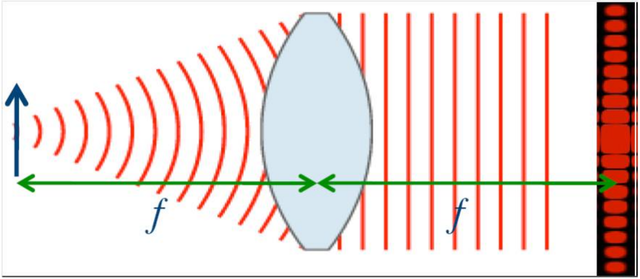
- Investigar a natureza ondulatória da luz através do estudo da difração e interferência
- Estudar a difração de objetos bi-dimensionais
- Estudar a difração como uma transformada de Fourier
- Construir um computador óptico

# O que é um computador óptico?

- Computador óptico é um dispositivo que permite a manipulação de uma imagem de maneira "analógica", controlada, sem a necessidade de efetuar cálculos complicados
- Esse dispositivo pode e vai ser construído e estudado no laboratório: o desafio do experimento é entender os princípios de funcionamento e aplicá-los em alguns casos

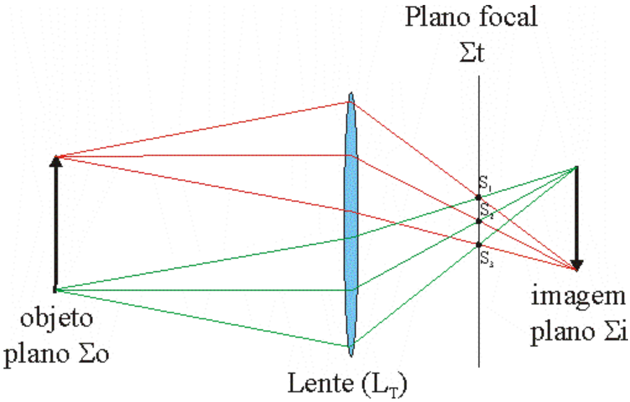
# Lente no formalismo de Fourier

- No formalismo de Fourier, colocando um objeto no plano focal de uma lente, a figura no plano focal corresponde à transformada de Fourier (figura de difração) do objeto



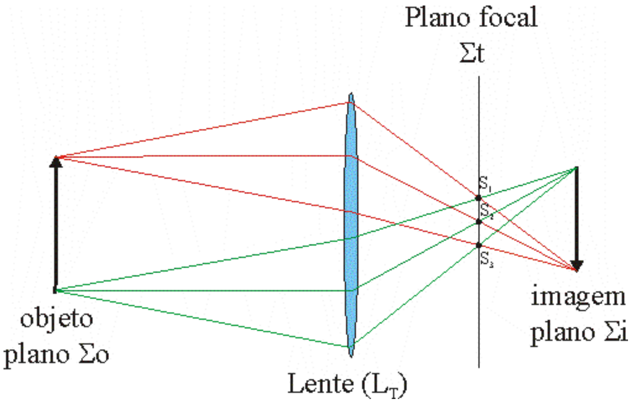
# Princípios do computador óptico: Formação da imagem de uma lente

- Seja a imagem formada por uma lente simples. Definimos três planos, conforme a figura abaixo:



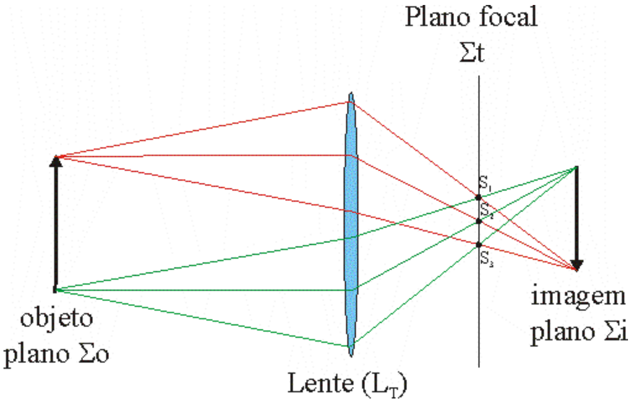
# Princípios do computador óptico: Formação da imagem de uma lente

- Se imaginarmos cada ponto ($S_i$) como uma fonte esférica pontual, então a imagem formada no plano $\Sigma_i$ corresponde à interferência de todas as fontes $S_i$



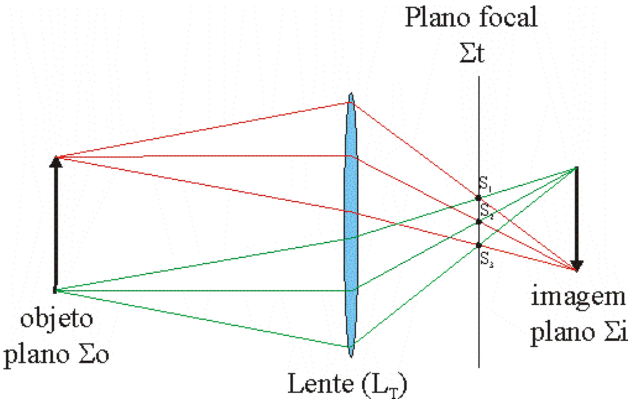
# Princípios do computador óptico: Formação da imagem de uma lente

- Como a figura de interferência corresponde à TF então a imagem no plano $\Sigma_i$ corresponde à TF da figura no plano focal $\Sigma_t$



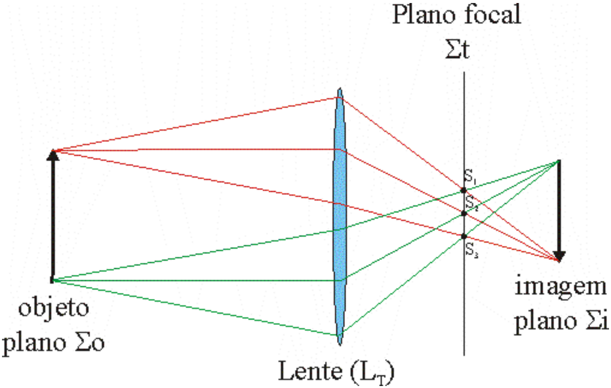
# Princípios do computador óptico: Formação da imagem de uma lente

- Como a imagem no plano $\Sigma_i$ tem a mesma forma do objeto no plano $\Sigma_o$, então a figura no plano $\Sigma t$ tem que ser a TF do objeto no plano $\Sigma_o$



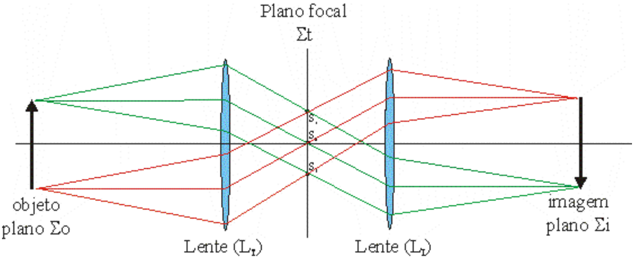
# Princípios do computador óptico: Formação da imagem de uma lente

- Assim, em uma lente convergente, a figura formada no plano $\Sigma t$ é sempre a TF do objeto (invertida)
- Pode-se utilizar isso para manipular a imagem (= construção de um computador óptico)

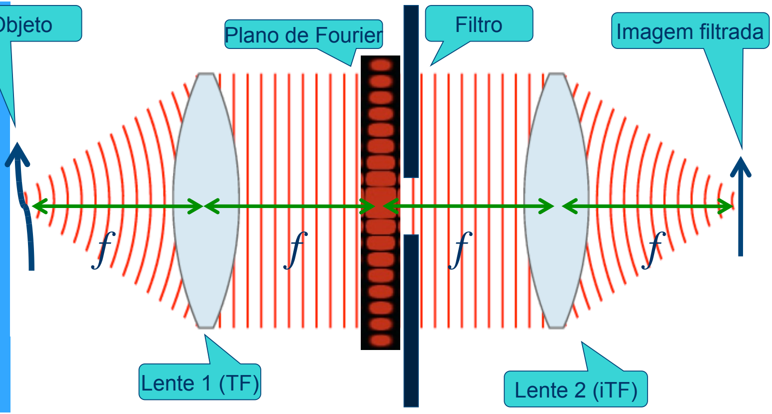


# O computador óptico

- O computador óptico tradicional consiste de duas lentes posicionadas em pontos estratégicos
  - A segunda lente serve apenas para fazer uma imagem mais próxima
  - No nosso caso, vamos fazer com somente uma lente, por simplicidade



# O computador óptico

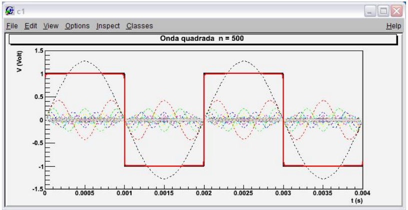


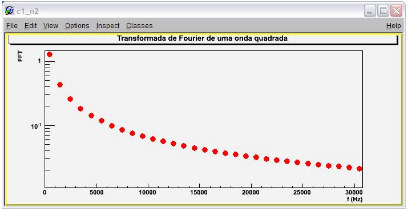
# Transformada de Fourier unidimensional

- No caso unidimensional, a TF de uma função é:

$$y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt$$

- O gráfico de TF mostra a amplitude ($y$) para cada frequência que compõe o sinal unidimensional



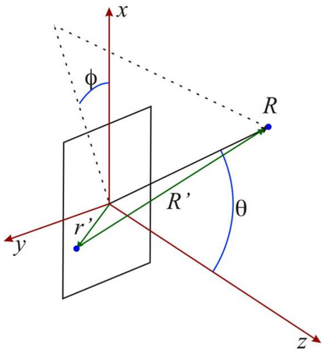
# Generalizando a difração de Fraunhofer

- Atividade 1 do experimento II
- A expressão para o campo

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x,y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$

- Com:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{cases} k_x = k \,\text{sen}\, \theta \cos \phi \\ k_y = k \,\text{sen}\, \theta \,\text{sen}\, \phi \end{cases}$$



# Séries de Fourier em 2D

- Transformada de Fourier em 2D

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-j(nx+my)} dxdy$$

# Séries de Fourier em 2D

- Transformada de Fourier em 2D

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-j(nx+my)} dxdy$$

- Vamos comparar com a difração

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x,y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$

# Séries de Fourier em 2D

- Transformada de Fourier em 2D

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-j(nx+my)} dxdy$$

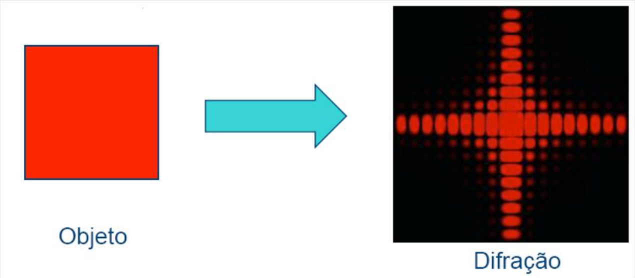
- Vamos comparar com a difração

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x,y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$

# Difração e transformada de Fourier

- A figura de difração está relacionada à TF do objeto iluminado

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$



# Frequências espaciais

- A intensidade luminosa em uma dada posição está relacionada às intensidades para cada frequência espacial

$$\hat{E}(\vec{R}) \rightarrow E(R_x, R_y) \rightarrow E(k_x, k_y)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \begin{cases} k_x = k \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ \\ k_y = k \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

# Generalizando ainda mais

- Para uma onda plana incidente: $E_0(x, y)$ é constante
- Uma onda qualquer pode ser decomposta em uma soma de ondas planas
  - Então já consideramos todos os casos?
- Não! E se a abertura não for uma fenda? E se houver uma lente ou um objeto opaco que modifique a amplitude ou a fase de $E(x, y)$ em cada ponto?

# O campo elétrico da figura de difração

- Se houver uma lente, o que interessa é o campo transformado por ela, ou seja:

$$E_0(x,y) \overset{lente}{\Rightarrow} \varepsilon(x,y)$$

  - A função da abertura é o campo incidente transformado pelo objeto / fenda / lente / etc. onde ocorre a difração

- A distribuição de campo elétrico na figura de difração de Fraunhofer é a transformada de Fourier da distribuição do campo elétrico na abertura

$$\hat{E}(k_x,k_y) = \iint \varepsilon(x,y)e^{-j(k_x x + k_y y)}dx\,dy$$

$$\varepsilon(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint \hat{E}(k_x,k_y)e^{j(k_x x + k_y y)}dk_x\,dk_y$$

# Exemplo: Fenda simples

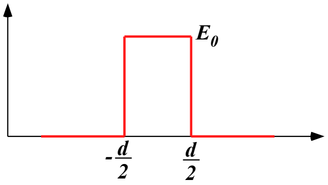
- Na fenda simples temos apenas

$$\hat{E}(k_x) = \int \varepsilon(x) e^{-jk_x x} dx$$

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{E}(k_x) e^{jk_x x} dk_x$$

- A função da abertura é a onda quadrada!

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} E_0, \text{se } |x| \leq \frac{d}{2} \\ 0, \text{se } |x| > \frac{d}{2} \end{cases}$$



# Fenda simples: o campo elétrico

- Vamos fazer a integral da onda quadrada

$$\hat{E}(k_x) = \int \varepsilon(x) e^{-jk_x x} dx = E_0 \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-jk_x x} dx = E_0 \left[ \frac{e^{-jk_x x}}{-jk_x} \right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}$$

- Lembrando da notação complexa para o seno

$$\hat{E}(k_x) = \frac{E_0}{k_x} \frac{\left( e^{jk_x \frac{d}{2}} - e^{-jk_x \frac{d}{2}} \right)}{j} = 2 \frac{E_0}{k_x} \operatorname{sen}\left( k_x \frac{d}{2} \right)$$

- Multiplicando e dividindo por $d$

$$\hat{E}(k_x) = E_0 d \frac{\operatorname{sen}\left( k_x \frac{d}{2} \right)}{\left( k_x \frac{d}{2} \right)}$$

# Fenda simples: a irradiância

- Vetor de onda ao longo da direção $x$

$$k_x = k \operatorname{sen} \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \theta$$

- Campo elétrico

$$\hat{E}(k_x) = E_0 d \frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} \qquad \beta = \frac{k_x d}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta$$

  - A intensidade depende da largura da fenda

- Irradiância

$$I = I_0 \left( \frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} \right)^2$$

  - O mesmo obtido anteriormente

# Difração x computador óptico

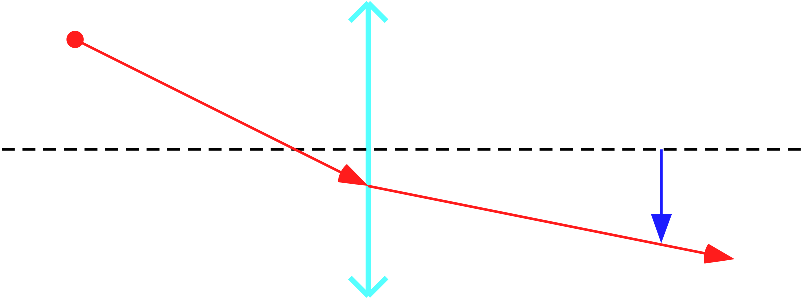
- A condição de Fraunhofer estará satisfeita se o anteparo estiver a uma distância muito grande em comparação com as dimensões da abertura. No caso das fendas utilizadas na atividade 1 esse é o caso
  - A bancada do laboratório é suficientemente longa se comparada às dimensões das fendas utilizadas ($\mu m$)
- Mas no caso de objetos maiores, não é possível observar a figura de difração de Fraunhofer, pois o comprimento de onda é pequeno e a bancada é curta em relação às dimensões do objeto.

# O que as lentes fazem

- Então, como fazer a transformada de Fourier da imagem do nosso objeto macroscópico?
- Sabemos que quando a lente forma a imagem do objeto, em algum lugar do lado imagem, vai ter uma intensidade luminosa que é o quadrado de $E(k_x, k_y)$, que, por sua vez, é a transformada de Fourier do objeto descrito por $\varepsilon(x, y)$ (chamada de função da abertura).
- Para saber o que vai acontecer exatamente, é preciso considerar como a lente modifica a amplitude e a fase de $E_0$ em cada ponto $(x, y)$.
- O que acontece é que a transformada de Fourier aparece no plano focal da lente

# Lente delgada convergente

- Seja uma fonte pontual em um sistema óptico do tipo



- Vamos relembrar como tratamos as lentes

# O método matricial

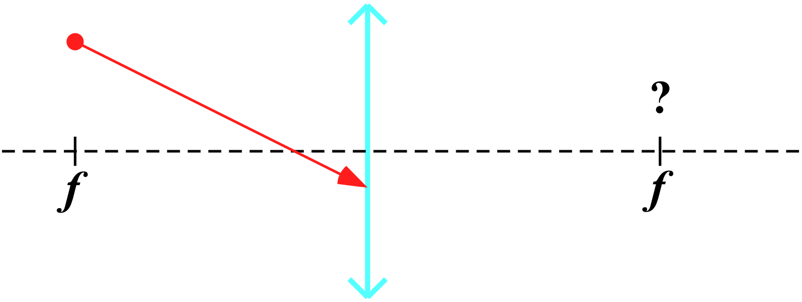
- Seja uma transformação do tipo:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_2 = Ar_1 + B\varphi_1 \\ \varphi_2 = Cr_1 + D\varphi_1 \end{cases}$$

- Se $A = 0$, todos os raios de mesmo ângulo passam pelo mesmo ponto $r_2$
- Se $D = 0$, todos os raios de mesmo ponto de origem emergem com o mesmo ângulo do sistema óptico.

# Lente delgada convergente

- Agora vamos considerar uma fonte pontual no plano focal da lente



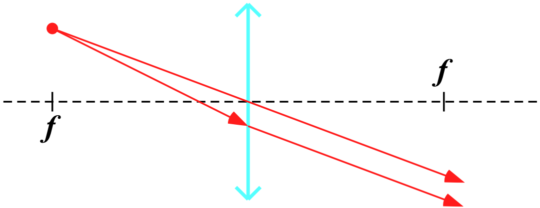

- O que acontece no ponto a uma distância $f$ da lente?

# Calculando a matriz de tranformação

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = f\varphi_1 \\ \varphi_2 = -\frac{1}{f} r_1 \end{cases}$$

- O ângulo no qual o raio de luz emerge depende apenas da posição da fonte, ou seja, os raios emergem todos paralelos $\Rightarrow$ onda plana

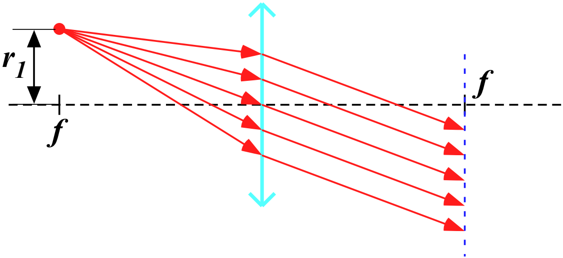


# Lente convergente: caso especial

- Fonte pontual no plano focal
  - Todos os raios emergem com o mesmo ângulo $\Rightarrow$ saída é uma onda plana

$$r_2 = f\varphi_1$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{f}r_1$$




- O que está acontecendo? Porque uma fonte pontual se transforma em uma onda plana?

# Transformada de Fourier: função delta

- Uma fonte pontual pode ser representada por uma função delta

$$f(r) = \delta(r - b)$$

- Cuja transformada de Fourier é:

$$FT\{\delta(r-b)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r-b) e^{-i2\pi kr} dr = e^{-i2\pi kb}$$

  - Que é uma onda plana
- Consequentemente, a transformada de Fourier de uma onda plana será uma função delta!

# Onda plana

- Onda plana de direção bem definida (não necessariamente no eixo óptico do sistema):

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikr\,\mathrm{sen}\varphi} \sim e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r\varphi} = e^{i2\pi\mu r}$$

  - $\mu = \frac{\varphi}{\lambda}$ - trocamos $k$ por $\mu$ que tem dimensão de frequência: é a frequência espacial

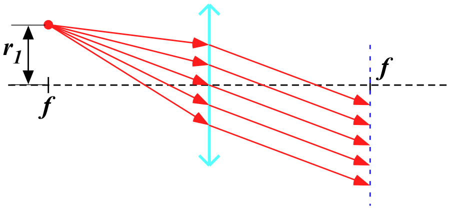
- A transformada de Fourier é:

$$FT\{e^{i2\pi\mu r}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\mu r} e^{-i2\pi\xi r} dr = \delta(\mu - \xi)$$

  - A transformada de Fourier de uma onda plana é uma função delta localizada em $\xi$.

# Lente simples: objeto no plano focal

- Fonte pontual no plano focal: a lente está fazendo uma distribuição de intensidade luminosa que é proporcional à transformada de Fourier do campo elétrico incidente!




$$e^{ikr\varphi} = e^{i2\pi\mu r} \qquad \mu = \frac{r_1}{f\lambda}$$

  - NOTA: colocamos todas as distâncias $= f$, por isso aparece a transformada de Fourier exata. Se uma das distâncias fosse diferente, apareceria uma fase. Mas como estamos medindo apenas o quadrado da amplitude, não percebemos isso no laboratório.

# O reverso se aplica

- Se um conjunto de raios paralelos atinge uma lente em um ângulo bem definido, eles se cruzam em algum ponto do plano focal de tal modo que essa posição vale:

$$r_2 = f\lambda\mu = f\varphi_1$$

- Como $\mu$ é uma frequência espacial, com dimensão de 1/[comprimento], podemos escrever:

$$\lambda\mu = \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{\color{red}{d}} = \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad d\varphi_1 = \lambda$$

- d = dimensão característica do objeto

# Finalmente...

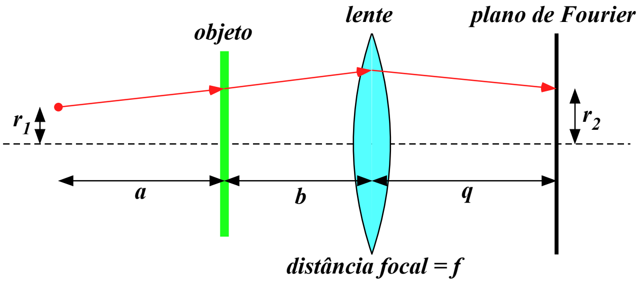
- A equação de primeira ordem de um objeto difrator é:

$$d\varphi_1 = \lambda$$

  - Lembrar da equação da difração de fenda simples: $d\mathrm{sen}\theta = m\lambda$
- Como o padrão de difração é proporcional à transformada de Fourier do campo elétrico, a lente funciona como um elemento que permite obter essa TF.

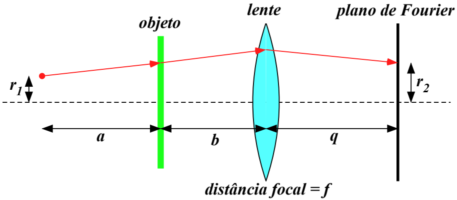
# Generalizando

- Iluminando o objeto com uma fonte pontual numa posição qualquer



# Caso geral

- A fonte pontual está a uma distância qualquer do objeto difrator
  - Ela dista $a$ do difrator e está $r_1$ acima do eixo de simetria da lente
- A matriz de transferência desse sistema
  - É a matriz do espaço livre $a$ da fonte ao difrator vezes a matriz do difrator vezes a matriz do espaço livre $b$ do difrator à lente vezes a matriz da lente vezes a matriz do espaço livre $q$ da lente ao plano da transformada.

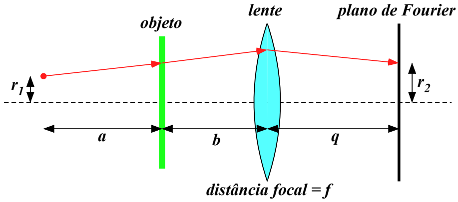


# A matriz de transferência

- Se calcularmos a matriz de transferência dessa situação (deduzam), vamos obter:

$$r_2 = \left(1 - \frac{q}{f}\right) r_1 + \left(a + b - \frac{aq}{f} - \frac{bq}{f} + q\right) \varphi_1 + \left(b + q - \frac{bq}{f}\right) \frac{m\lambda}{d}$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{f} r_1 + \left(-\frac{a}{f} - \frac{b}{f} + 1\right) \varphi_1 + \left(1 - \frac{b}{f}\right) \frac{m\lambda}{d}$$



# Conclusões

$$r_2 = \left(1 - \frac{q}{f}\right) r_1 + \left(a + b - \frac{aq}{f} - \frac{bq}{f} + q\right) \varphi_1 + \left(b + q - \frac{bq}{f}\right) \frac{m\lambda}{d}$$

- $r_2$ deve ser independente de $\varphi_1$

$$a + b - \frac{aq}{f} - \frac{bq}{f} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a+b}$$

  - O padrão de difração (que é proporcional à transformada de Fourier) deve depender do espaçamento $d$ da rede (ou de uma fenda), mas não da direção dos raios que são emitidos pela fonte, portanto ele deve ser independente de $\varphi_1$.

- Se a fonte está no infinito, ou seja, o objeto é iluminado por uma onda plana, temos:

$$a \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \underbrace{\left(\frac{1}{a+b}\right)}_{=0} \quad \Rightarrow \quad q = f$$

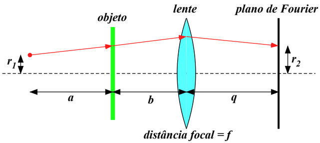
# Posição do plano de Fourier

- A posição do plano de Fourier de uma lente depende tanto da posição da fonte quanto do objeto:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a+b}$$

- Caso a fonte esteja no infinito, (onda plana), o plano de Fourier encontra-se na distância focal da lente e independe da posição do objeto, $b$:

$$q = f$$



# Tamanho da transformada

$$r_2 = \left(1 - \frac{q}{f}\right) r_1 + \left(a + b - \frac{aq}{f} - \frac{bq}{f} + q\right) \varphi_1 + \left(b + q - \frac{bq}{f}\right) \frac{m\lambda}{d}$$

- Se a fonte está no eixo óptico ($r_1 = 0$), a posição de convergência dos raios é:

$$r_2 = \left(b + q - \frac{bq}{f}\right) \frac{m\lambda}{d}$$

- Substituindo a expressão para a distância focal temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a+b} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \left(\frac{qa}{a+b}\right) \frac{m\lambda}{d}$$

- Se o objeto esta na distância focal, $b = f$:

$$r_2 = f \frac{m\lambda}{d}$$

# Determinação da densidade de linhas da grade

- Utilizamos lentes convergentes de distâncias focais 1 e 20 cm, para montar um sistema que aumenta o diâmetro do laser de um fator 20x. Ajustamos a distância entre as lentes para que o feixe seja paralelo na saída.
- Utilizamos esse feixe para Iluminar uma grade
- Para observar a transformada de Fourier da grade utilizamos uma lente de distância focal 40 cm
- Vocês devem usar a foto obtida da transformada de Fourier para determinar a densidade de linhas da grade.
- Discutir os resultados.