Lista 6: Integrais de Linha e de Superfície, Formas Diferenciais e Teoremas do Cálculo Vetorial

Nota 1. Os exercícios estrelados abaixo são os que considero mais interessantes.

Nota 2. Nos exercícios abaixo que contêm integrais complicadas, basta simplificar a integral o quanto o possível; é necessário calculá-la somente nos casos mais simples.

Integrais de Linha

1) Calcule os comprimentos das seguintes curvas $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$:

(a) $n = 2$, $\gamma(t) = (3\cos(2\pi t), 2\sin(\pi(1-2t)))$;

(b) $n = 2$, $a > 0$ constante, $\gamma(t) = \left(\frac{a\cos(2\pi t)}{1+\sin^2(2\pi t)}, \frac{a\sin(2\pi t)\cos(2\pi t)}{1+\sin^2(2\pi t)}\right)$;

(c) $n = 2$, $a > 0$ constante, $\gamma(t) = (a(t - \sin(6\pi t)), a(1-\cos(6\pi t)))$;

(d) $n = 3$, $a > 0$ constante, $\gamma(t) = (a\cos^2(2\pi t), a\cos(2\pi t)\sin(2\pi t), a\sin(2\pi t))$.

2) Considere a seguinte curva no plano:

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto \begin{cases}\left(t, t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) & \text{se } t > 0\\ (0,0) & \text{se } t = 0\end{cases}\end{aligned}$$

Mostre que γ é contínua, e, mais ainda, de classe C^∞ em $(0,1]$; no entanto, a integral imprópria

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\|\ dt$$

é divergente. γ é um exemplo de uma curva contínua de *comprimento infinito*.

3) Nos itens abaixo, $F \subset \mathbb{R}^3$ é um fio, $\mu\colon F \to \mathbb{R}$ é uma densidade linear de carga (elétrica, gravitacional, etc.) e $\gamma\colon [0,1] \to F$ é uma parametrização do fio F. Calcule a carga total Q do fio.

(a) (T. Apostol, *Calculus*, v. 2, Exemplo 1, p. 330)

$$\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$$

$$F = \gamma([0,1])$$

$$\mu(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

(b)

$$\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$$

$$F = \gamma([0,1])$$

$$\mu(x,y,z) = xy$$

(c)

$$\gamma(t) = (2\pi t - \sin(2\pi t), 1 - \cos(2\pi t), 0)$$

$$F = \gamma([0,1])$$

$$\mu(x,y,z) = x^2 - y^2$$

4) Nos itens abaixo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ é um campo de forças e $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ é um caminho de uma partícula. Calcule o trabalho que o campo F realiza no movimento da partícula ao longo do caminho γ.

(a) $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x^2 + 3y, 2x - z)$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$;

(b) $n = 3$, $\Omega = \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (\cos(xz) - y, 3(1 - x), y^2)$, $a = -1$, $b = 1$, $\gamma(t) = (t^3, t, 1 - t^2)$;

(c) $n = 3$, $\Omega = \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, z, x)$, $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$,

$$\gamma(t) = (\cos^2 t, \cos t\ \sin t, \sin t)$$

(d) $n = 3$, $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$,

$$F(x, y, z) = \left(\frac{y - z}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z - x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{x - y}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

$a = 0$, $b = 2\pi$, $\gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$.

Definição 1. (Operações sobre Curvas) Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e $\gamma\colon [a, b] \to X$ e uma curva (contínua). Dado $1 \leq k \leq \infty$, dizemos que γ é *de classe C^k por partes* se existe uma partição $a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_r = b$ do intervalo $[a, b]$ tal que γ é de classe C^k em cada subintervalo $[c_i, c_{i+1}]$ da partição (isso significa que as derivadas laterais também têm que existir nos extremos, mas podem ser diferentes). Veja a figura 1 abaixo.

Dadas duas curvas $\alpha\colon [a, b] \to X$, $\beta\colon [c, d] \to X$ tais que $\alpha(b) = \beta(c)$ (isto é, tais que o ponto final de α coincide com o ponto inicial de β), definimos uma nova curva $\alpha \vee \beta\colon [a+c, d+b] \to X$ por

$$(\alpha \vee \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t - c) & \text{se } a + c \leq t \leq b + c \\ \beta(t - b) & \text{se } c + b < t \leq d + b \end{cases}$$

Como

$$\lim_{t \to (b+c)^+} (\alpha \vee \beta)(t) = \alpha(b) = \beta(c) = \lim_{t \to (c+b)^-} (\alpha \vee \beta)(t)$$

a curva $\alpha \vee \beta$ é contínua; também é simples mostrar que, se α e β são de classe C^k por partes, então $\alpha \vee \beta$ é de classe C^k por partes.

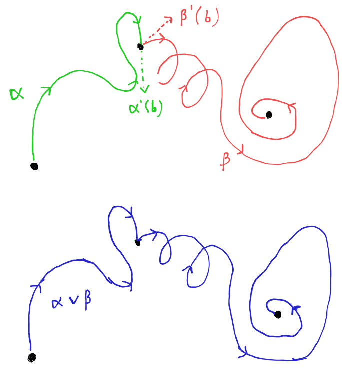

Figura 1: Junção de dois caminhos.

Dada uma curva $\alpha\colon [a,b] \to X$, definimos sua *curva oposta* $\overline{\alpha}\colon [a,b] \to X$ por

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(a+b-t)$$

Note que $\overline{\alpha}$ «percorre» a curva α no sentido reverso.

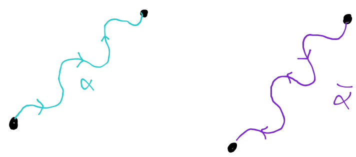

Figura 2: Curva oposta.

5) No que segue, $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto, $\alpha, \eta\colon [a,b] \to X$, $\beta\colon [c,d] \to X$ e $\gamma\colon [r,s] \to X$ são curvas.

(a) Mostre que se α e β são de classe C^k por partes, então $\alpha \vee \beta$ é de classe C^k por partes;

(b) Mostre que $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$, isto é, podemos escrever $\alpha \vee \beta \vee \gamma$ sem parêntesis;

(c) Mostre que se $\alpha(a) = \beta(c) = \mathbf{p}$ e $\alpha(b) = \beta(d) = \mathbf{q}$ (isto é, se as curvas α, β têm os mesmos pontos inicial e final), então $\alpha \vee \overline{\beta}$ é uma curva fechada (começa e termina no mesmo ponto, $\mathbf{p}$);

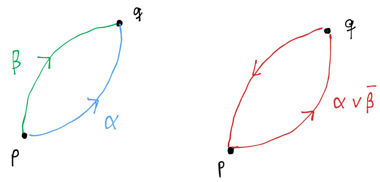

Figura 3: Curva fechada a partir de duas curvas com mesmos extremos.

(d) Suponha que η é de classe C^k por partes e $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ são como na definição 1. Mostre que

$$\eta = \eta_1 \vee \eta_2 \vee \cdots \vee \eta_m$$

onde $\eta_i = \eta|[c_{i-1}, c_i]$;

(e) **(Só ler)** Observe que, usando o item anterior, podemos estender a noção de comprimento de curvas, carga total de fios e trabalho de uma força ao longo de um caminho de curvas C^1 para curvas C^1 por partes:

$$\int_\eta := \int_{\eta_1} + \int_{\eta_2} + \cdots + \int_{\eta_m}$$

Nos exercícios 6-8 abaixo, usaremos as seguintes definições:

Definição 2. **(Campos conservativos)** Seja $F\colon \Omega \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores. Dizemos que F é um campo *conservativo* se existe uma função $\phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que $F = \nabla\phi$, isto é, se o campo F é o gradiente de uma função escalar (potencial).

Definição 3. **(Campos irrotacionais)** Seja $F\colon \Omega \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe

C^1. Dizemos que F é um campo *irrotacional* se, para todos $i, j = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \tag{i}$$

6) Mostre que todo campo conservativo é também irrotacional.

7) Seja $\phi \colon \Omega \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Prove que, se $\gamma \colon [a, b] \to \Omega$ é qualquer curva C^1 por partes e $\mathbf{p} = \gamma(a)$, $\mathbf{q} = \gamma(b)$, então

$$\int_\gamma \text{grad } \phi \cdot d\vec{l} = \phi(\mathbf{q}) - \phi(\mathbf{p})$$

Em particular, se γ é tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$ (isto é, uma curva fechada), então

$$\oint_\gamma \text{grad } \phi \cdot d\vec{l} = 0$$

Existe a seguinte recíproca para o exercício 7 (para uma referência para a demonstração, venha falar comigo):

Teorema 1. Seja $F \colon \Omega \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1. Suponha que, para toda curva fechada $\gamma \colon [a, b] \to \Omega$, $\oint_\gamma F \cdot d\vec{l} = 0$. Então F é um campo conservativo.

8*) Sejam $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $A \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$A(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Mostre que A é irrotacional. Mostre também que

$$\oint_\gamma A \cdot d\vec{l} = 2\pi$$

onde $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \Omega$ é dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Conclua que **nem todos os campos irrotacionais são conservativos**.

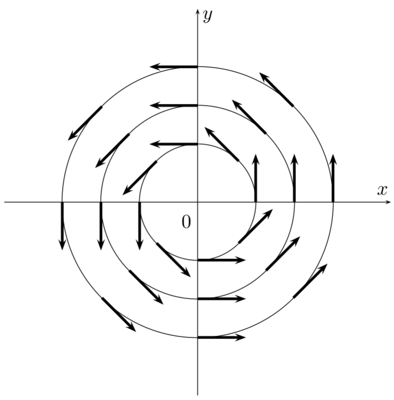

Figura 4: O campo de vetores unitários $v(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} A(x, y)$. Fonte: E. L. Lima, *Análise Real*, v. 3.

Um Pouco Mais De Superfícies

Quaisquer exercícios ou exemplos da seguinte referência:

* T. Apostol, *Calculus* v.2:
    - Capítulo 12, Seções 12.1-12.4

Notação de Formas Diferenciais

9) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto. Definiremos 6 conjuntos associados a U, alguns mais e outros menos familiares:

$$C^\infty(\Omega) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ é de classe } C^\infty\}$$
$$\mathfrak{X}(\Omega) = \left\{F\colon \Omega \to \mathbb{R}^3 \mid F \text{ é um campo de vetores de classe } C^\infty\right\}$$
$$\Lambda^k(\Omega) = \{\omega \mid \omega \text{ é uma } k\text{-forma diferencial de classe } C^\infty\}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Considere as derivadas exteriores de formas diferenciais:

$$\Lambda^0(\Omega) \xrightarrow{d} \Lambda^1(\Omega) \xrightarrow{d} \Lambda^2(\Omega) \xrightarrow{d} \Lambda^3(\Omega)$$

Considere também os operadores clássicos do cálculo vetorial:

$$C^\infty(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}} \mathfrak{X}(\Omega) \xrightarrow{\text{rot}} \mathfrak{X}(\Omega) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(\Omega)$$

(a) Mostre que todos os conjuntos acima são espaços vetoriais reais, com a soma e multiplicação escalar definidas de maneira óbvia. Mostre que os operadores d, grad, rot, div são transformações lineares entre esses espaços.

(b) Mostre que rot∘grad $\equiv 0$ e div∘rot $\equiv 0$, isto é, o rotacional de um gradiente e o divergente de um rotacional sempre são identicamente nulos.

(c) Mostre que existem transformações lineares bijetoras

$$\alpha_0\colon C^\infty(\Omega) \to \Lambda^0(\Omega) \quad \alpha_1\colon \mathfrak{X}(\Omega) \to \Lambda^1(\Omega)$$
$$\alpha_2\colon \mathfrak{X}(\Omega) \to \Lambda^2(\Omega) \quad \alpha_3\colon C^\infty(\Omega) \to \Lambda^3(\Omega)$$

tais que o seguinte «diagrama» «comuta»:

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\Omega) \arrow[r, "\text{grad}"] \arrow[d, "\alpha_0"] & \mathfrak{X}(\Omega) \arrow[r, "\text{rot}"] \arrow[d, "\alpha_1"] & \mathfrak{X}(\Omega) \arrow[r, "\text{div}"] \arrow[d, "\alpha_2"] & C^\infty(\Omega) \arrow[d, "\alpha_3"] \\ \Lambda^0(\Omega) \arrow[r, "d"] & \Lambda^1(\Omega) \arrow[r, "d"] & \Lambda^2(\Omega) \arrow[r, "d"] & \Lambda^3(\Omega) \end{tikzcd}$$

isto é, $d \circ \alpha_i = \alpha_{i+1} \circ \beta_i$ onde $\beta_0 = \nabla$, $\beta_1 = \nabla \times$, $\beta_2 = \nabla \cdot$. Conclua, usando o item (b), que $d \circ d \equiv 0$ em todos os casos.

Integral de Superfície

Quaisquer exercícios ou exemplos da seguinte referência:

* T. Apostol, *Calculus* v.2:
  - Capítulo 12, Seções 12.5-12.10

Teoremas de Green, Gauss e Stokes

Quaisquer exercícios ou exemplos da seguinte referência:

* T. Apostol, *Calculus* v.2:
  - Capítulo 11, Seções 11.19-11.25
  - Capítulo 12, Seções 12.11, 12.13, 12.15, 12.18-12.21
