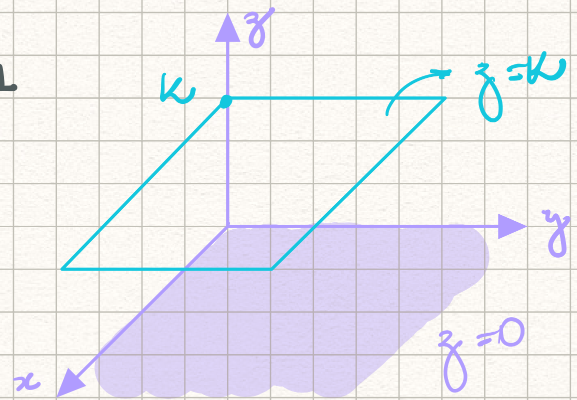
16/07/2021

HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS:

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$$



Oxy

1. Traço com Oxy ($z=0$):

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$$: hipérbole - ER sobre Oy $\left\{ a=b=2 \right.$

2. Traços com planos //s Oxy ($z=k$, $k=c^{\underline{te}}$, $k\in\mathbb{R}$):

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{k^2}{9}=1$$

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1+\frac{k^2}{9}\ \left\{ >1 \right.$$

* $1+\frac{k^2}{9}>1 \therefore k\in\mathbb{R}^* \longrightarrow -\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}>0$ ✓

$t=1+\frac{k^2}{9}$. O que acontece com t nas seguintes situações?

$k\longrightarrow 0$, $t\longrightarrow 1$

$k=\pm 1$, $t=10/9$

$k=\pm 2$, $t=13/9$

$k=\pm 3$, $t=2$

$\vdots \qquad \vdots$

$\uparrow |k| \ \uparrow t$

Substituindo t na eq. da hipérbole: $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=t$

Reescrevendo: $-\frac{x^2}{4t}+\frac{y^2}{4t}=1$ $\left\{ a=b=2\sqrt{t} \right.$

O que acontece com a e b no intervalo de K?

Aumentam!

Consequência: hipérboles com eixos real e imaginário aumentando, a partir da hipérbole obtida como traço com o pl. coord. Oxy.

E o que K representa?

Planos //s Oxy, cortando o eixo Oz em K.

Logo:

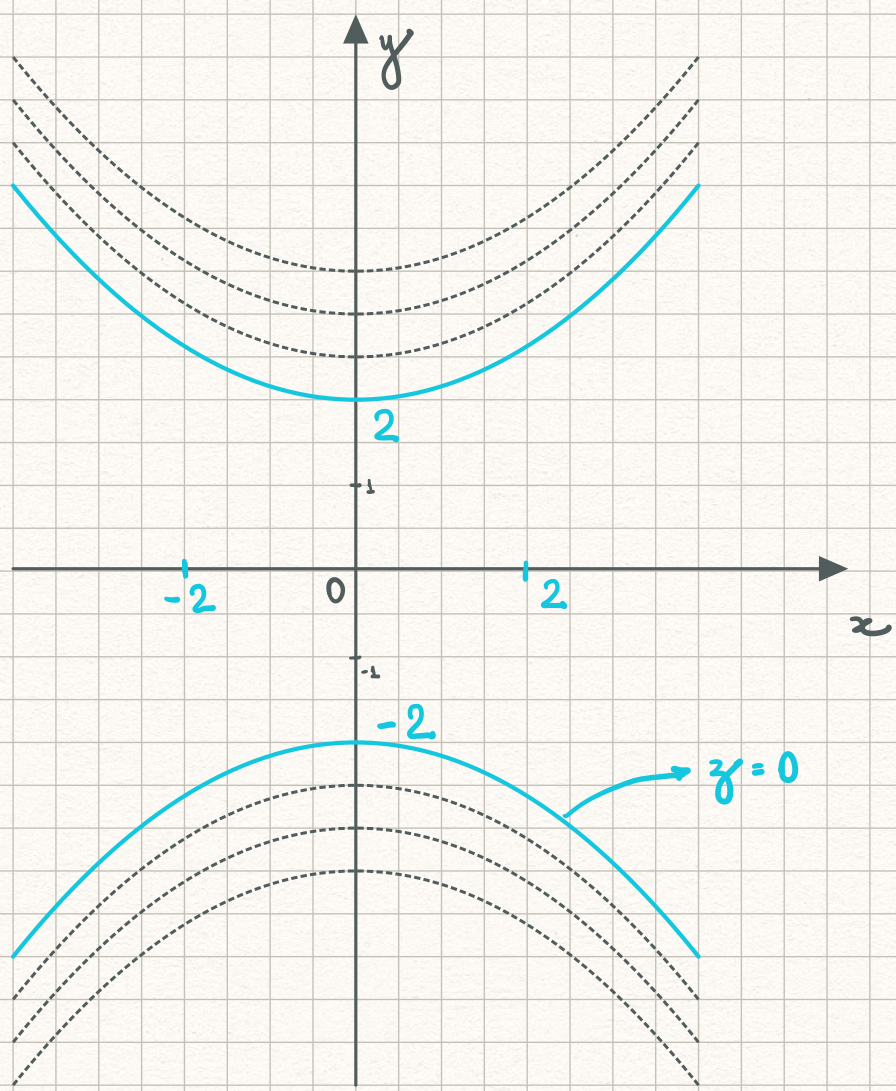
z = 0 (plano // Oxy): hipérbole com ER sobre Oy.

Menor que z = 0 ou maior que z = 0:

hipérboles se afastando do traço obtido com Oxy.

3. Esboço dos Traços:

CURVAS DE NÍVEL, POIS CADA HIPÉRBOLE É RESULTADO DA INTERSECÇÃO DE UM PLANO // Oxy COM A SUP. QUÁDRICA.



Domínio:

$x \in \mathbb{R}$

$y < -2$ ou $y > 2$

Oxz

1. Traço com Oxz $(y = 0)$:

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \quad : \quad \nexists\ (x,z) \text{ que satisfaça } \therefore\ \emptyset$$

2. Traços com planos //s Oxz $(y = k,\ k = c^{te},\ k \in \mathbb{R})$:

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{k^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4} \begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

* $1 - \frac{k^2}{4} = 0 \quad \therefore \quad k = \pm 2 \longrightarrow -\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0$

$\therefore\ x = z = 0$: 2 pontos $(0, \pm 2, 0)$

* $1 - \frac{k^2}{4} > 0 \quad \therefore \quad -2 < k < 2 \longrightarrow -\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} > 0$ F

$\nexists\ (x,z)$ que satisfaça $\therefore\ \emptyset$

* $1 - \frac{k^2}{4} < 0 \quad \therefore \quad k < -2$ ou $k > 2 \longrightarrow -\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} < 0$ ✓

$t = 1 - \frac{k^2}{4}$. O que acontece com t nas seguintes situações?

$k \longrightarrow \pm 2, \quad t \longrightarrow 0$

$k = \pm 3, \quad t = -5/4$

$k = \pm 4, \quad t = -3$

$\vdots \qquad \vdots$

$\uparrow |k| \quad \uparrow |t|$

Substituindo t na eq.: $-\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = -|t|$

Reescrevendo: $\dfrac{x^2}{4|t|} + \dfrac{z^2}{9|t|} = 1 \longrightarrow$ elipses - EM sobre Oz $\begin{cases} a = 3\sqrt{|t|} \\ b = 2\sqrt{|t|} \end{cases}$

O que acontece com a e b no intervalo de K?

Aumentam!

Consequência: elipses, com eixos maior e menor aumentando, a partir dos pontos.

E o que K representa?

Planos //s Oxz, cortando o eixo Oy em K.

Logo:

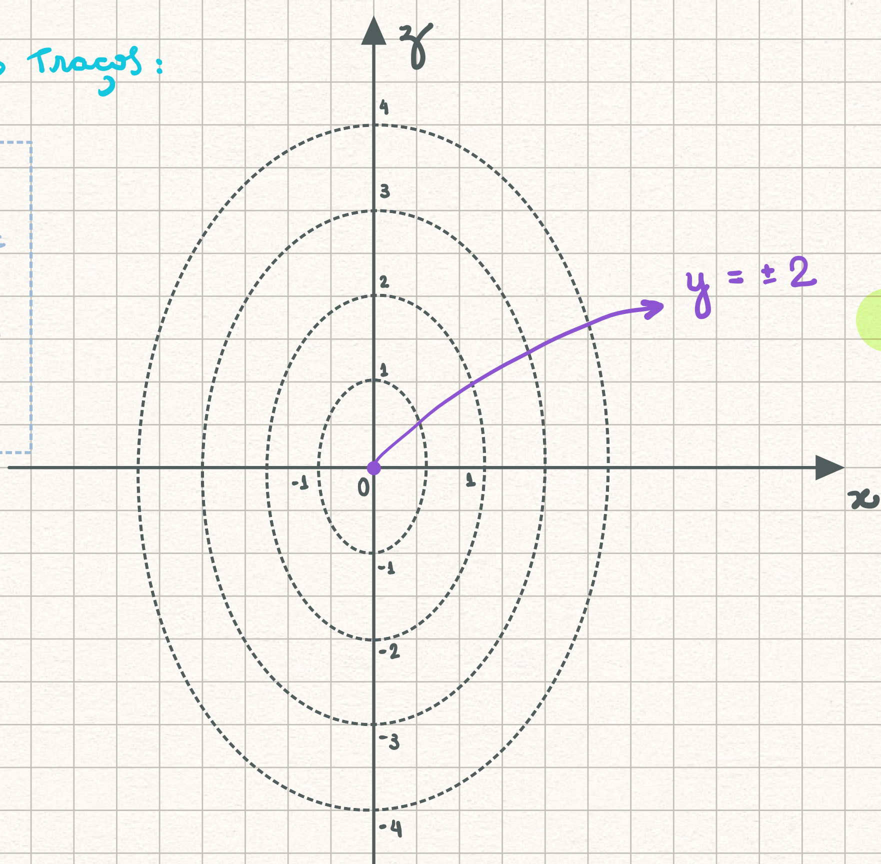
$-2 < y < 2$: vazio

$y = \pm 2$: 2 pontos $(0, \pm 2, 0)$

$y < -2$ e $y > 2$: elipses aumentando, a partir dos pontos.

3. Esboço dos Traços:

CURVAS DE NÍVEL, POIS CADA ELIPSE É RESULTADO DA INTERSECÇÃO DE UM PLANO // Oxz COM A SUP. QUÁDRICA.



Domínio:

$x \in \mathbb{R}$

$z \in \mathbb{R}$

Oyz ANÁLOGO À ANÁLISE EM Oxy

1. Traço com Oyz $(x=0)$:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$: hipérbole - ER sobre Oy $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

2. Traços com planos //s Oyz $(x = k,\ k = c^{te},\ k \in \mathbb{R})$:

$$-\frac{k^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 + \frac{k^2}{4} \quad \{ > 1$$

Análise análoga à de Oxy

$x = 0$ (plano // Oyz)

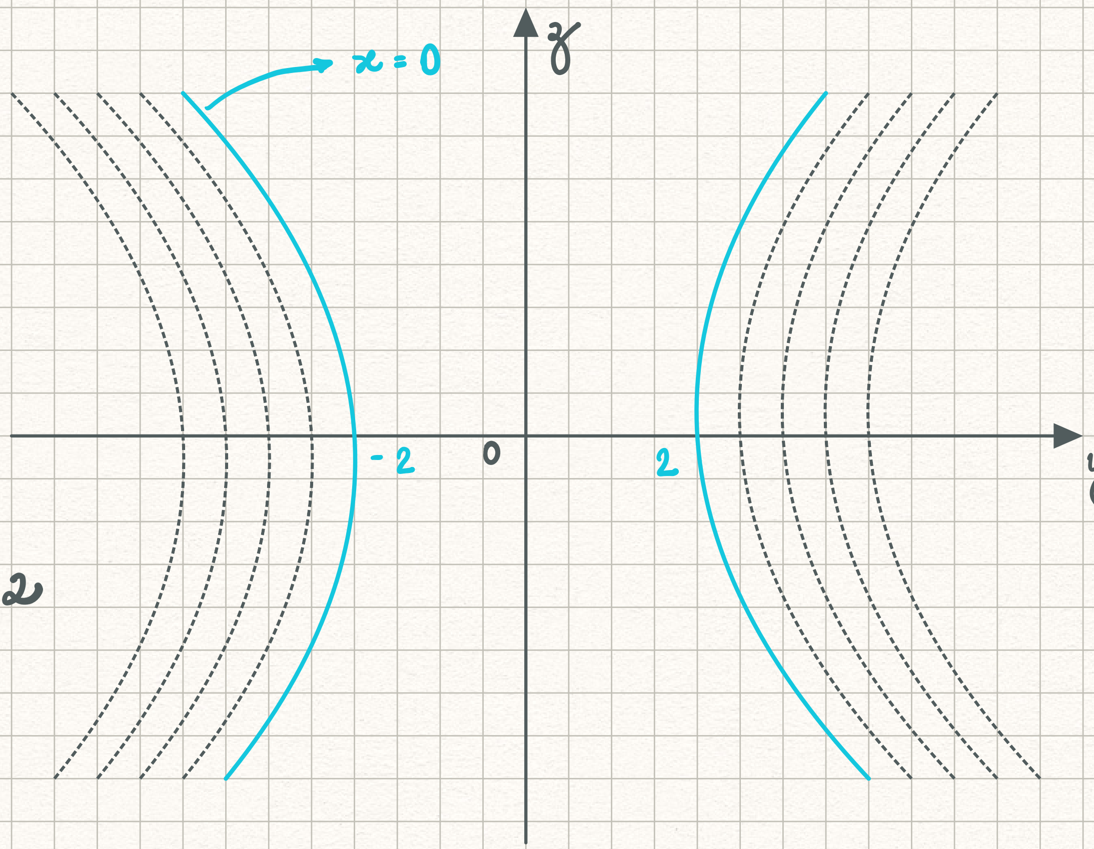
hipérbole com ER sobre Oy.

Menor que $x = 0$ ou maior que $x = 0$:

hipérboles se afastando do traço obtido com Oyz.

3. Esboço dos Traços:

CURVAS DE NÍVEL, POIS CADA HIPÉRBOLE É RESULTADO DA INTERSECÇÃO DE UM PLANO // Oxy COM A SUP. QUÁDRICA.



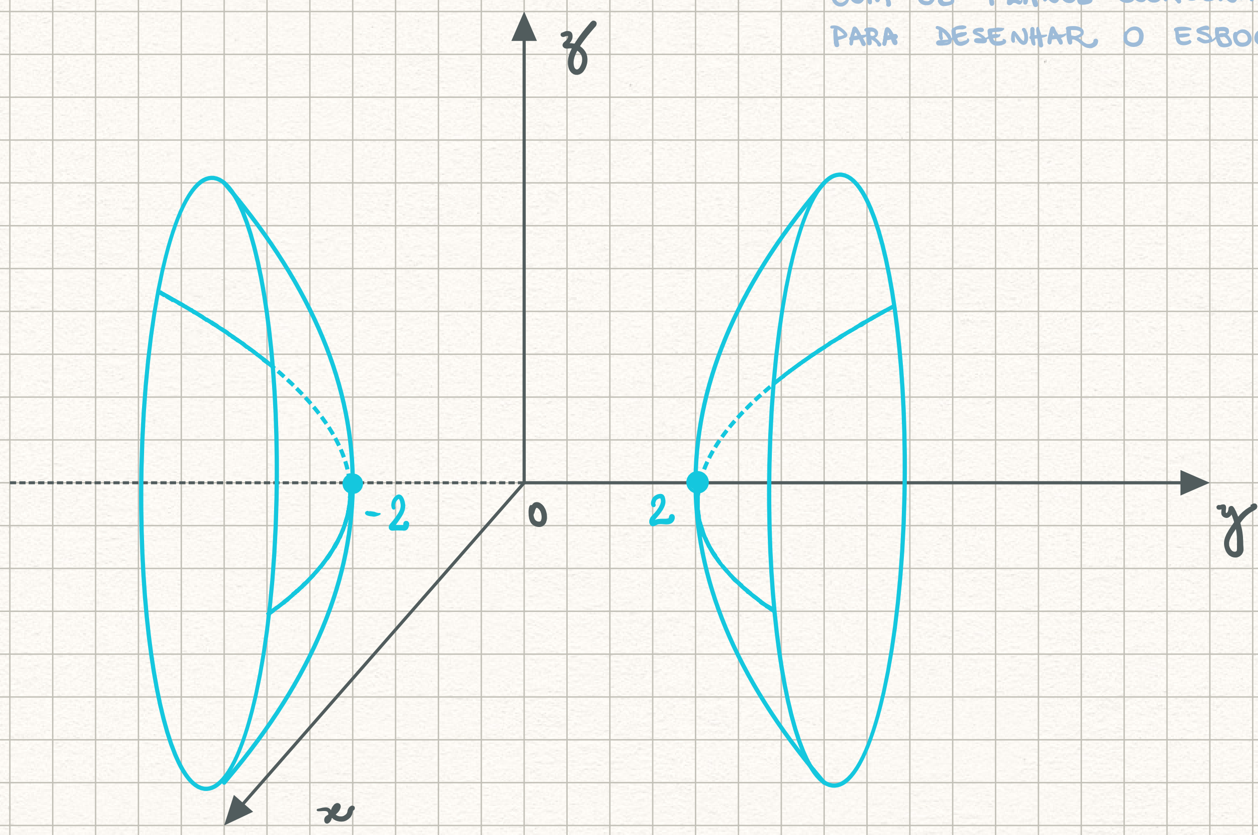
Domínio:

$y < -2$ ou $y > 2$

$z \in \mathbb{R}$

Esboço da Superfície Quádrica no $\mathbb{R}^3$:

COMBINAR OS TRAÇOS OBTIDOS COM OS PLANOS COORDENADOS PARA DESENHAR O ESBOÇO.



PARABOLOIDE ELÍPTICO: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 2z$

Oxy

1. Traço com Oxy $(z = 0)$:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 0 \;:\; x = y = 0 \;\therefore\; 1 \text{ ponto } O(0,0,0)$$

2. Traços com planos //s Oxy $(z = K,\ K = c^{te},\ K \in \mathbb{R})$:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2K \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

* $2K > 0 \;\therefore\; K > 0 \longrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} > 0$ ✓

$t = 2K$. O que acontece com t nas seguintes situações?

$K \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow 0$

$K = 1, \quad t = 2$

$K = 2, \quad t = 4$

$K = 3, \quad t = 6$

$\vdots \qquad \vdots$

$\uparrow K \quad \uparrow t$

Substituindo t na eq.: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = t$

Reescrevendo: $\dfrac{x^2}{9t} + \dfrac{y^2}{4t} = 1 \longrightarrow$ Elipse: EM sobre Ox $\begin{cases} a = 3\sqrt{t} \\ b = 2\sqrt{t} \end{cases}$

O que acontece com a e b no intervalo de K?

Aumentam!

Consequência: elipses, com eixos maior e menor aumentando, a partir da origem do $\mathbb{R}^3$.

E o que K representa?

Planos //s Oxy, cortando o eixo Oz em K.

Logo:

$z = 0$: 1 ponto $(0,0,0)$.

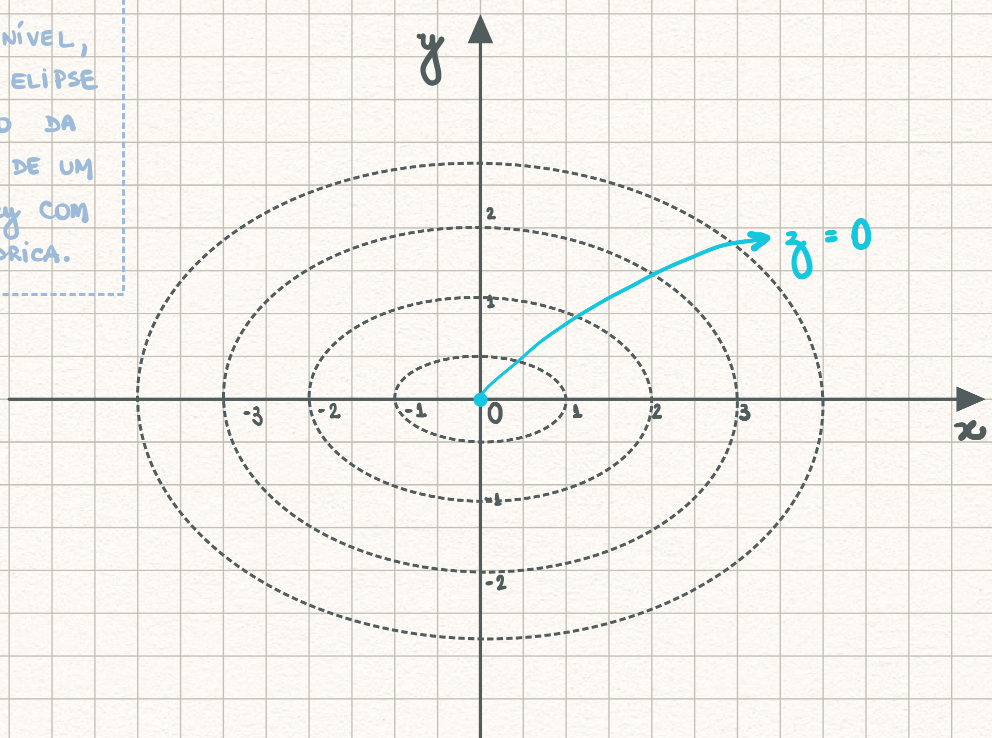
$z \neq 0$: elipses aumentando, a partir do ponto.

* $2K < 0 \therefore K < 0 \longrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} < 0$ F

$\nexists\ (x,y)$ que satisfaça a equação $\therefore \emptyset$

3. Esboço dos Traços:

CURVAS DE NÍVEL, POIS CADA ELIPSE É RESULTADO DA INTERSECÇÃO DE UM PLANO // Oxy COM A SUP. QUÁDRICA.



Domínio:

$x \in \mathbb{R}$

$y \in \mathbb{R}$

Oxz

1. Traço com Oxz $(y=0)$:

$$\frac{x^2}{9} = 2z \therefore x^2 = 18z \longrightarrow \text{Parábola} \begin{cases} \text{ES em } Oz \\ V(0,0) \\ \text{concav. } (+) \end{cases}$$

(x z)

2. Traços com planos //s Oxz $(y = k,\ k = c^{\underline{te}},\ k \in \mathbb{R})$:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{k^2}{4} = 2z$$

$$\frac{x^2}{9} - 2z = -\frac{k^2}{4} \ \{ < 0$$

* $-\dfrac{k^2}{4} < 0 \therefore k \in \mathbb{R}^* \longrightarrow \dfrac{x^2}{4} - 2z < 0$ ✓

Assim:

$$\frac{x^2}{9} = 2z - \frac{k^2}{4}$$

$$\frac{x^2}{9} = 2\left(z - \frac{k^2}{8}\right)$$

$$x^2 = 18\left(z - \frac{k^2}{8}\right) - \text{Parábola} \begin{cases} \text{ES em } Oz \\ \text{concav. } (+) \\ V\left(0, \dfrac{k^2}{8}\right) \end{cases}$$

(x z)

O que acontece com V à medida que k varia?

$k \longrightarrow 0$, $V \longrightarrow (0,0)$

$k = \pm 1$, $V(0, 1/8)$

$k = \pm 4$, $V(0, 2)$

$\vdots$ $\qquad\qquad \vdots$

$\uparrow |k| \ \uparrow V_z$

TRANSLAÇÃO EM Oz

O que acontece com as coord. z do V no intervalo de K?

Aumentam!

Consequência: parábolas, com vértices se afastando da origem do plano coord. Oxz.

E o que K representa?

Planos //s Oxz, cortando o eixo Oy em K.

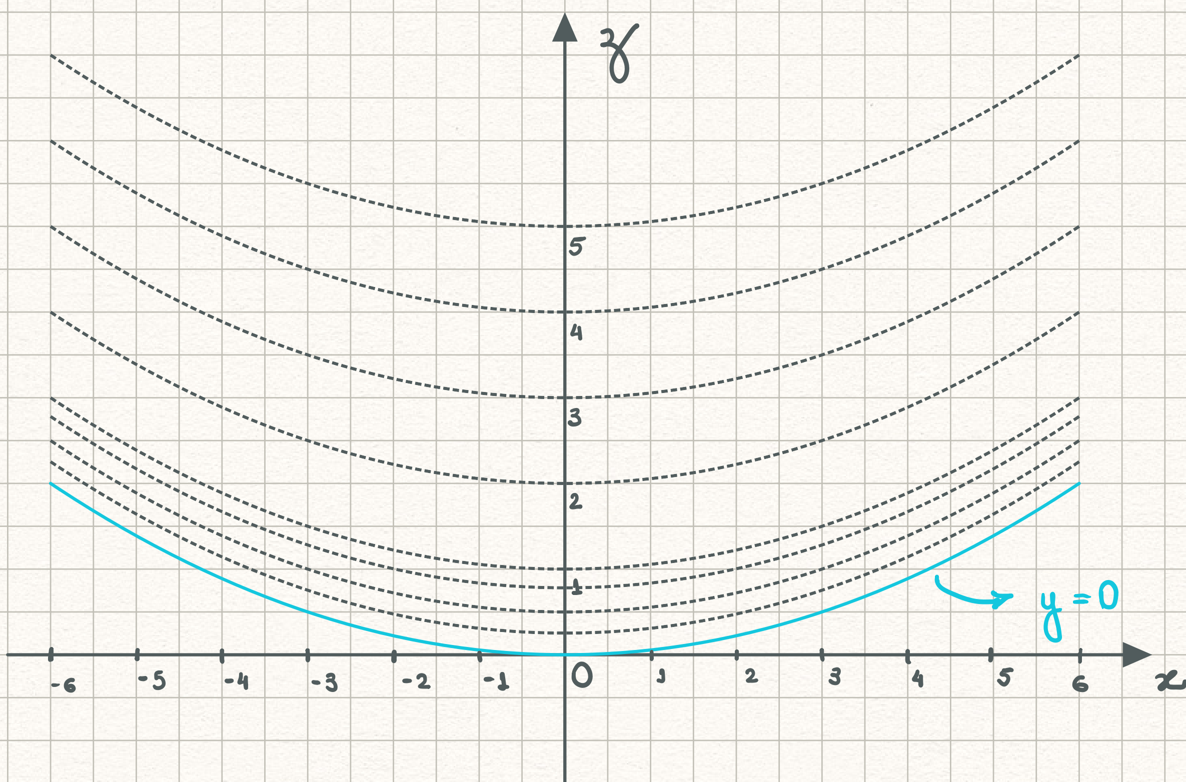
Logo:

$y = 0$: parábola

$y \neq 0$: parábolas se afastando da parábola obtida como traço com Oxy.

3. Esboço dos Traços:

CURVAS DE NÍVEL, POIS CADA PARÁBOLA É RESULTADO DA INTERSECÇÃO DE UM PLANO // Oxy COM A SUP. QUÁDRICA.



Domínio:

$x \in \mathbb{R}$

$z \geqslant 0$

Analogamente para Oyz :

1. Traço com Oyz $(x = 0)$:

$$\frac{y^2}{4} = 2z \therefore y^2 = 8z \quad - \quad \text{Parábola} \begin{cases} \text{ES em } Oz \\ V(\underset{y}{0},\underset{z}{0}) \\ \text{concav. } (+) \end{cases}$$

2. Traços com planos //s Oyz $(x = k, \ k = c^{\underline{te}}, \ k \in \mathbb{R})$:

$$\frac{k^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2z$$

$$\frac{y^2}{4} - 2z = -\frac{k^2}{9} \ \{ < 0 \ \ \forall k \in \mathbb{R}$$

$\vdots$

$$y^2 = 8\left(z - \frac{k^2}{18}\right)$$

$\vdots$

Análise análoga à anterior (Oxz)

$y = 0$: parábola

$y \neq 0$: parábolas se afastando da parábola obtida como traço com Oyz.

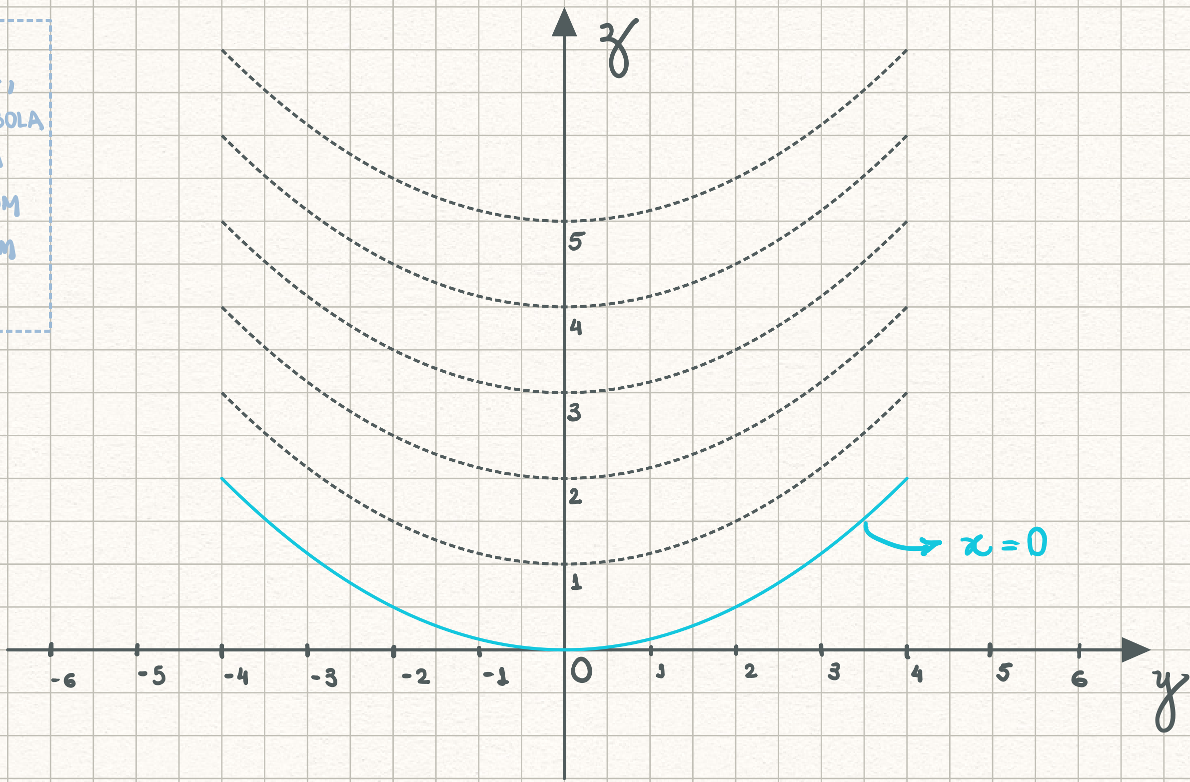
3. Esboço dos Traços:

CURVAS DE NÍVEL, POIS CADA PARÁBOLA É RESULTADO DA INTERSECÇÃO DE UM PLANO // Ozy COM A SUP. QUÁDRICA.

Domínio:

$y \in \mathbb{R}$

$z \geq 0$



Esboço da Superfície Quádrica no $\mathbb{R}^3$:

COMBINAR OS TRAÇOS OBTIDOS COM OS PLANOS COORDENADOS PARA DESENHAR O ESBOÇO.