QUÁDRICAS OU SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

14/07/2021

Subconjunto do $\mathbb{R}^3$ cujo lugar geométrico pode ser descrito pela eq. 2º grau (obtida em relação a um sistema de coord. ortogonal):

∃ ROTAÇÃO

∃ TRANSLAÇÃO

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Mx + Nx + Pz + Q = 0 \quad (1)$$

PELO MENOS UM DESSES COEFICIENTES $\neq 0$

Mudanças de coordenadas $\begin{cases} \text{Rotação} \\ \text{Translação} \end{cases}$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + G = 0 \quad (2) \quad : \text{ Quádricas Centradas}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Rz &= 0 \\ Ax^2 + Ry + Cz^2 &= 0 \\ Rx + By^2 + Cz^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3) \quad : \text{ Quádricas Não Centradas}$$

TRAÇOS: curvas resultantes da intersecção entre os planos coordenados (ou planos //s a eles) e a superfície quádrica.

Procedimento:

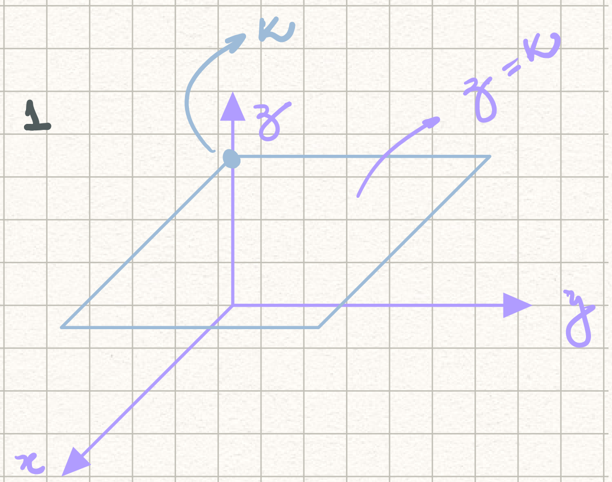
1. Traço: superfície com planos coordenados.
2. Traço: superfície com planos //s planos coord.
3. Domínio: curvas resultantes dos traços.

QUÁDRICAS CENTRADAS (QC)

Eq. (2) $\xrightarrow{\text{TODOS COEF.} \neq 0}$ $\pm \dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} \pm \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Possibilidades $\begin{cases} 3 \text{ sinais } (+) \\ 2 \text{ sinais } (+) \\ 1 \text{ sinal } (+) \end{cases}$ $\therefore$ 3 tipos de QC

ELIPSOIDE: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{9} = 1$



Oxy

1. Traço com Oxy ($z = 0$):

$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$: elipse – EM sobre Oy $\begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}$

2. Traços com planos //s Oxy ($z = k$, $k = c^{te}$, $k \in \mathbb{R}$):

$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{k^2}{9} = 1$

$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1 - \dfrac{k^2}{9}$ $\begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$

* $1 - \dfrac{k^2}{9} = 0 \therefore k = \pm 3 \longrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 0$

$\therefore x = y = 0$: 2 pontos $(0, 0, \pm 3)$

* $1 - \frac{K^2}{9} > 0 \quad \therefore \quad -3 < K < 3 \longrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} > 0$ ✓

$t = 1 - \frac{K^2}{9}$. O que acontece com t nas seguintes situações?

$K = 0 \quad , \quad t = 1$

$K = \pm 1 \quad , \quad t = 8/9$

$K = \pm 2 \quad , \quad t = 5/9$

$K \longrightarrow \pm 3 \quad , \quad t \longrightarrow 0$

$\uparrow |K| \quad \downarrow t$

Substituindo t na eq. da elipse : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = t$

Reescrevendo : $\underbrace{\frac{x^2}{4t} + \frac{y^2}{25t}} = 1 \quad \begin{cases} a = 5\sqrt{t} \\ b = 2\sqrt{t} \end{cases}$

O que acontece com a e b no intervalo de K ?

Diminuem !

Consequência : elipses com eixos maior e menor diminuindo.

E o que K representa ?

Planos //s Oxy , cortando o eixo Oz em K.

Logo :

$z = 0$ (plano coord.) : elipse ($a = 5$; $b = 2$)

$z = \pm 3$ (plano // Oxy) : pontos $(0, 0, \pm 3)$

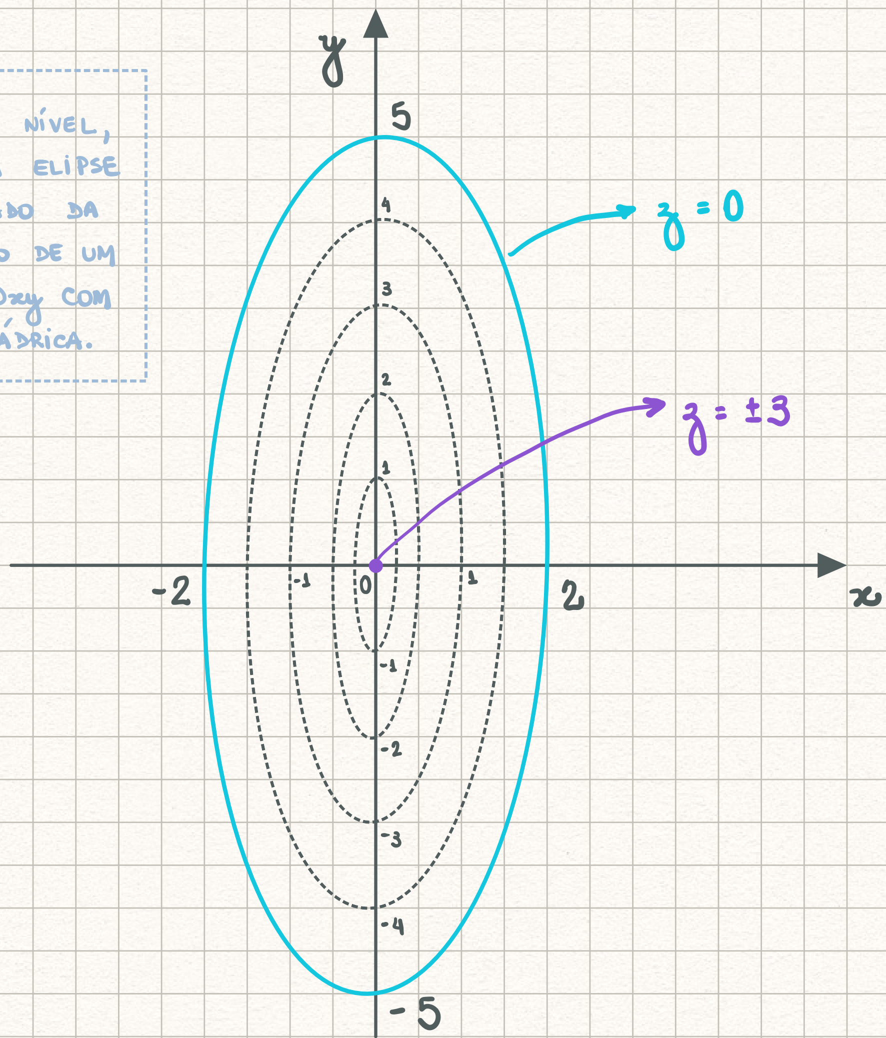
Entre $z = -3$ e $z = 3$: elipses diminuindo, da maior (obtida em Oxy) até os pontos.

* $1 - \frac{k^2}{9} < 0 \therefore k < -3$ ou $k > 3 \longrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} < 0$ F

$\nexists (x, y)$ que satisfaça $\therefore \varnothing$

3. Esboço dos Traços:

CURVAS DE NÍVEL, POIS CADA ELIPSE É RESULTADO DA INTERSECÇÃO DE UM PLANO // Oxy COM A SUP. QUÁDRICA.



Domínio:

$-2 \leq x \leq 2$

$-5 \leq y \leq 5$

Analogamente para Oxz:

1. Traço com Oxz $(y = 0)$:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \; : \; \text{elipse - EM sobre } Oz \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

2. Traços com planos //s Oxz ($y = k$, $k = c^{te}$, $k \in \mathbb{R}$):

$$\frac{x^2}{4} + \frac{k^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{25} \begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Análise análoga à anterior

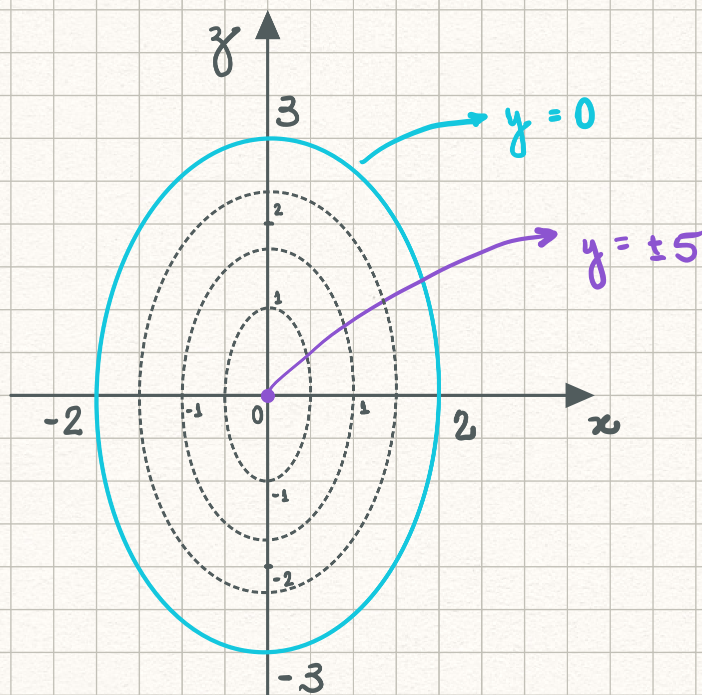
$y = 0$: elipse ($a = 3$; $b = 2$)

$y = \pm 5$: pontos $(0, \pm 5, 0)$

Entre $y = 0$ e $y = \pm 5$: elipses diminuindo, da maior (obtida em Oxz) até os pontos.

3. Esboço dos Traços:

CURVAS DE NÍVEL, POIS CADA ELIPSE É RESULTADO DA INTERSECÇÃO DE UM PLANO // Oxz COM A SUP. QUÁDRICA.



Domínio:

$-2 \leq x \leq 2$

$-3 \leq z \leq 3$

Analogamente para Oyz :

1. Traço com Oyz ($x = 0$):

$$\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad : \text{elipse - EM sobre } Oy \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

2. Traços com planos //s Oyz ($= k$, $k = c^{te}$, $k \in \mathbb{R}$) :

$$\frac{k^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4} \begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Análise análoga às anteriores

$x = 0$: elipse ($a = 5$; $b = 3$)

$x = \pm 2$: pontos ($\pm 2, 0, 0$)

Entre $x = 0$ e $x = \pm 2$: elipses diminuindo, da maior (obtida em Oyz) até os pontos.

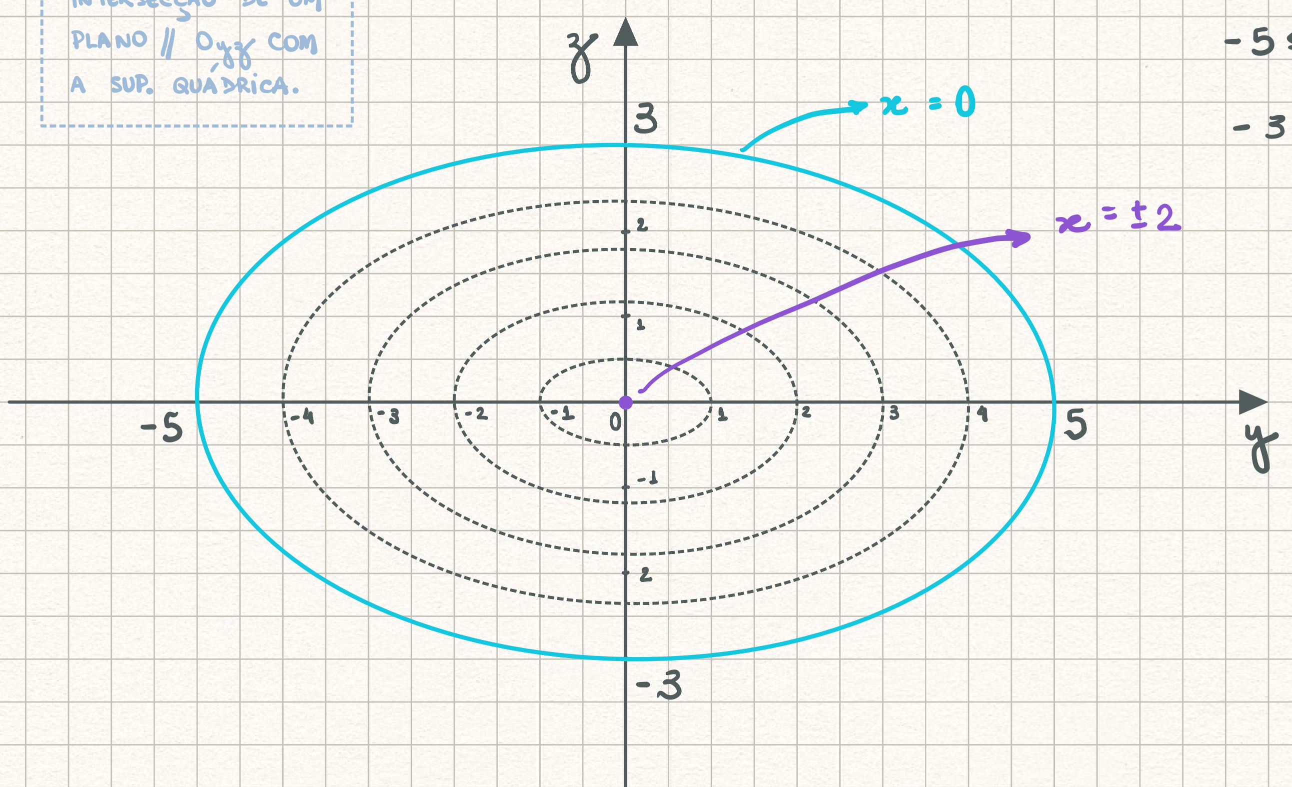
3. Esboço dos Traços :

CURVAS DE NÍVEL, POIS CADA ELIPSE É RESULTADO DA INTERSECÇÃO DE UM PLANO // Oyz COM A SUP. QUÁDRICA.

Domínio :

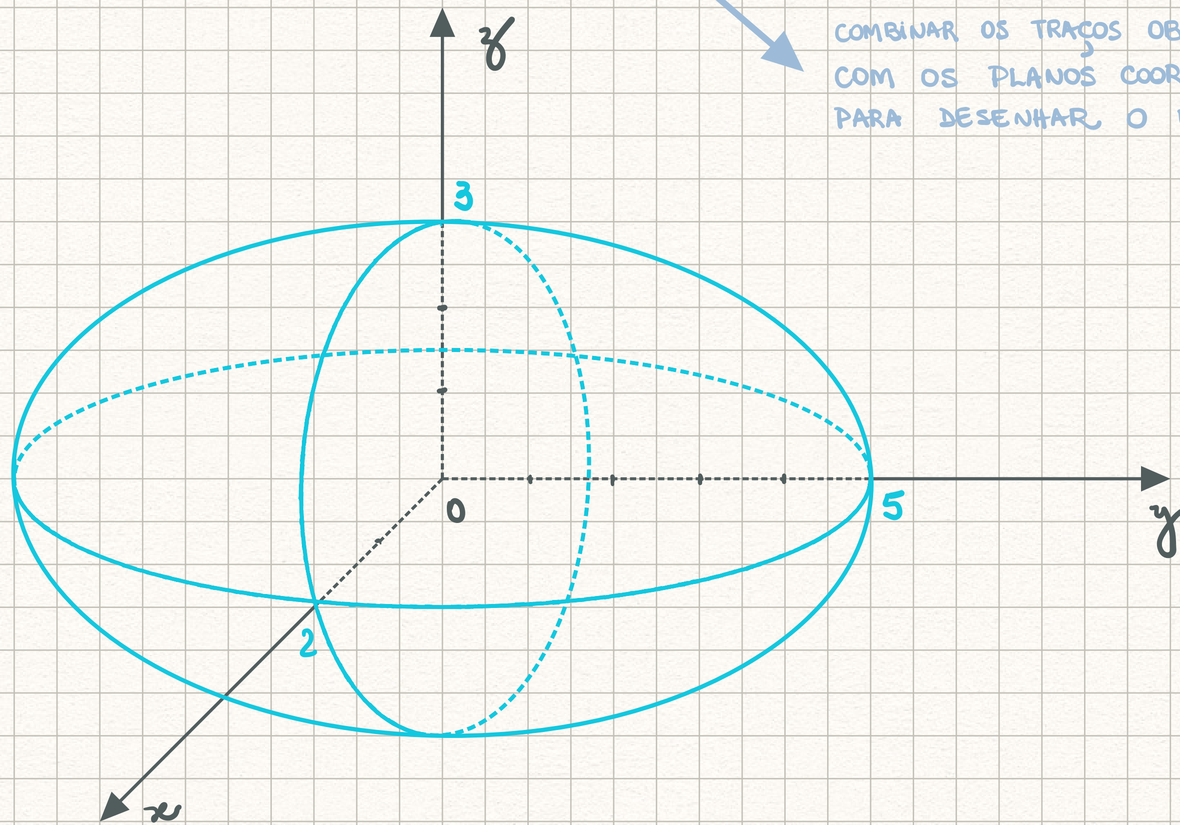
$-5 \leq y \leq 5$

$-3 \leq z \leq 3$



Esboço da Superfície Quádrica no $\mathbb{R}^3$:

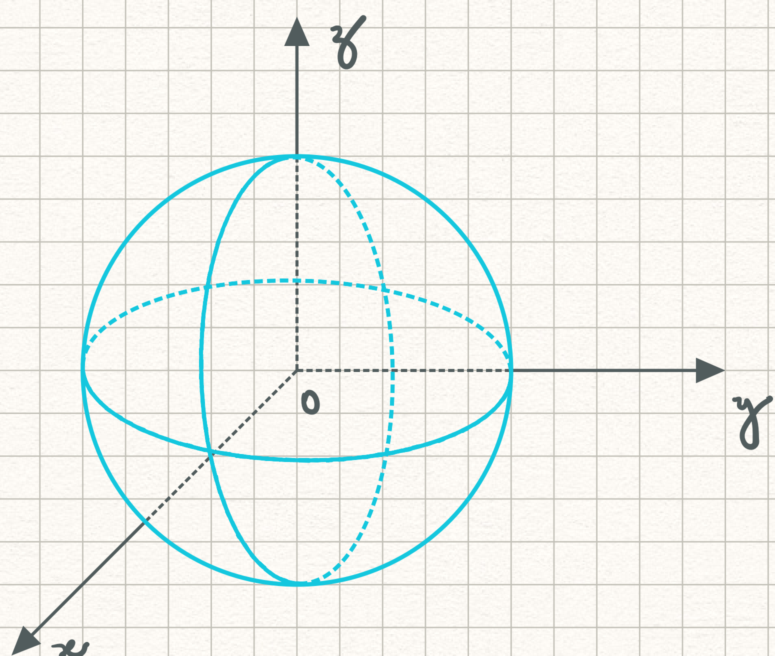
COMBINAR OS TRAÇOS OBTIDOS COM OS PLANOS COORDENADOS PARA DESENHAR O ESBOÇO.



OBS: esfera é o caso particular do elipsoide em que $a = b = c = r$. Logo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

E todos os traços são circunferências ou pontos.



HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA : $x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$

eixo ao longo do qual o hiperboloide cresce

Oxy

1. Traço com Oxy ($z = 0$) :

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \quad : \quad \text{elipse - EM sobre } Oy \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

2. Traços com planos //s Oxy ($z = k$, $k = c^{te}$, $k \in \mathbb{R}$) :

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{k^2}{9} = 1$$

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 + \frac{k^2}{9} \left\{ > 1 \right.$$

* $1 + \frac{k^2}{9} > 1 \quad \therefore \quad k \in \mathbb{R}^* \longrightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} > 0$ ✓

$t = 1 + \frac{k^2}{9}$. O que acontece com t nas seguintes situações ?

$k \longrightarrow 0$, $t \longrightarrow 1$

$k = \pm 1$, $t = 10/9$

$k = \pm 2$, $t = 13/9$

$k = \pm 3$, $t = 2$

$\vdots \qquad \vdots$

$\uparrow |k| \uparrow t$

Substituindo t na eq. da elipse : $x^2 + \frac{y^2}{4} = t$

Reescrevendo : $\frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{4t} = 1 \begin{cases} a = 2\sqrt{t} \\ b = \sqrt{t} \end{cases}$

O que acontece com a e b no intervalo de K?

Aumentam!

Consequência: elipses com eixos maior e menor aumentando.

E o que K representa?

Planos //s Oxy, cortando o eixo Oz em K.

Logo:

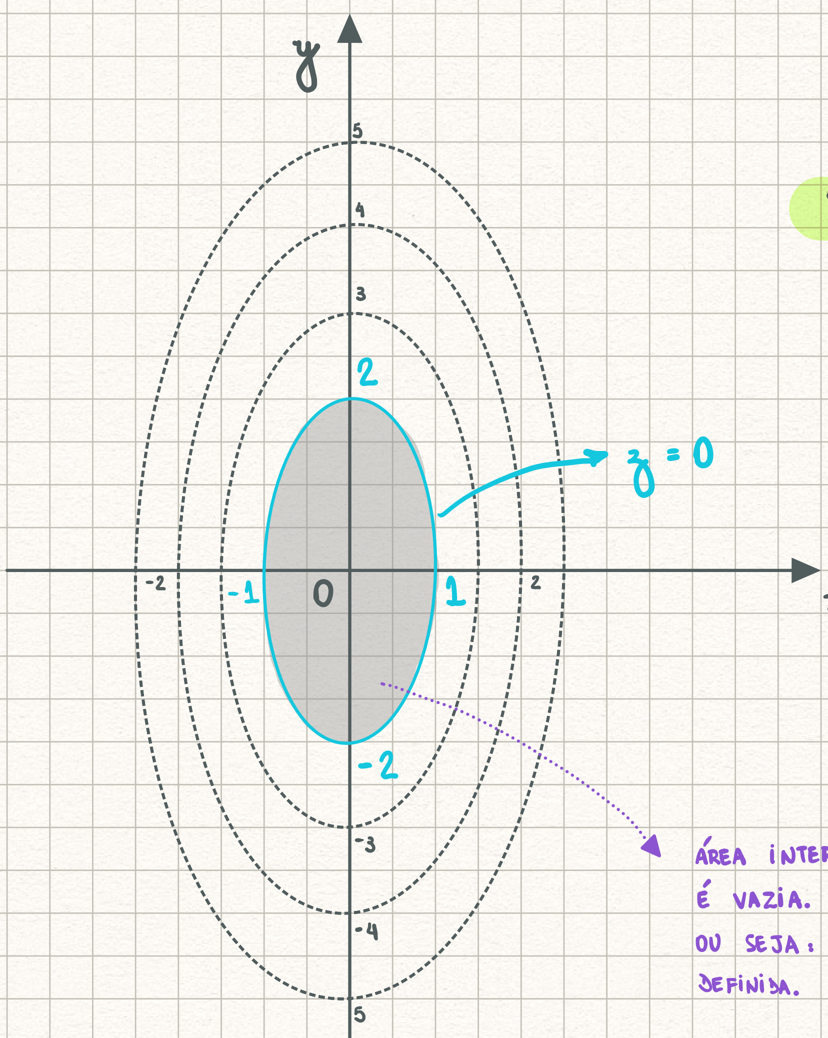
$z = 0$ (plano coord.): elipse ($a = 5$; $b = 2$)

$z < 0$ ou $z > 0$ (planos // Oxy):

elipses aumentando, a partir da menor (obtida em Oxy).

3. Esboço dos Traços:

CURVAS DE NÍVEL, POIS CADA ELIPSE É RESULTADO DA INTERSECÇÃO DE UM PLANO // Oxy COM A SUP. QUÁDRICA.



Domínio:

$x \in \mathbb{R}$

$y \in \mathbb{R}$

ÁREA INTERIOR À ELIPSE É VAZIA. ∄ ∩ COM ESSA REGIÃO. OU SEJA: A QUÁDRICA NÃO É DEFINIDA.

Oxz

1. Traço com Oxz $(y = 0)$:

$$x^2 - \frac{z^2}{9} = 1 \quad : \quad \text{hipérbole - ER sobre } Ox \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

2. Traços com planos //s Oxz $(y = k, \ k = c^{te}, \ k \in \mathbb{R})$:

$$x^2 + \frac{k^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$x^2 - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4} \begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

* $1 - \dfrac{k^2}{4} = 0 \quad \therefore \quad k = \pm 2 \longrightarrow x^2 - \dfrac{z^2}{9} = 0$

$\therefore \ z = \pm 3x$ ou $x = \pm \dfrac{1}{3} z$: 2 retas concorrentes

* $1 - \dfrac{k^2}{4} > 0 \quad \therefore \quad -2 < k < 2 \longrightarrow x^2 - \dfrac{z^2}{9} > 0$ ✓

$t = 1 - \dfrac{k^2}{4}$. O que acontece com t nas seguintes situações?

$k = 0$, $t = 1$

$k = \pm 1$, $t = 3/4$

$k \longrightarrow \pm 2$, $t \longrightarrow 0$

$\uparrow |k| \quad \downarrow t$

Substituindo t na eq. da hipérbole: $x^2 - \dfrac{z^2}{9} = t$

Reescrevendo: $\dfrac{x^2}{t} - \dfrac{z^2}{9t} = 1 \begin{cases} a = \sqrt{t} \\ b = 3\sqrt{t} \end{cases}$

O que acontece com a e b no intervalo de K?

Diminuem!

Consequência: hipérboles com eixos real e imaginário diminuindo.

E o que K representa?

Planos //s Oxz, cortando o eixo Oy em K.

Logo:

$y = 0$ (plano coord.) : hipérbole ($a = 1$; $b = 3$)

$y = \pm 2$ (plano // Oxz) : 2 retas concorrentes

Entre $y = -2$ e $y = 2$: hipérboles se aproximando das retas concorrentes, a partir da hipérbole obtida em Oxz.

$$1 - \frac{K^2}{4} < 0 \quad \therefore \quad K < -2 \text{ ou } K > 2 \longrightarrow x^2 - \frac{z^2}{9} < 0 \checkmark$$

$t = 1 - \dfrac{K^2}{4}$. O que acontece com t nas seguintes situações?

$K \longrightarrow \pm 2$, $t \longrightarrow 0$

$K = \pm 3$, $t = -5/4$

$K = \pm 4$, $t = -3$

$\vdots \qquad \vdots$

$\uparrow |K| \quad \uparrow |t|$

Substituindo t na eq. da hipérbole: $x^2 - \dfrac{z^2}{9} = -|t|$

Reescrevendo: $-\dfrac{x^2}{|t|} + \dfrac{z^2}{9|t|} = 1$ $\quad \begin{cases} a = 3\sqrt{t} \\ b = \sqrt{t} \end{cases}$

O que acontece com a e b no intervalo de K?

Aumentam!

Consequência: hipérboles com eixos real e imaginário aumentando, a partir das retas concorrentes, com ER em Oz.

E o que K representa?

Planos //s Oxz, cortando o eixo Oy em K.

Logo:

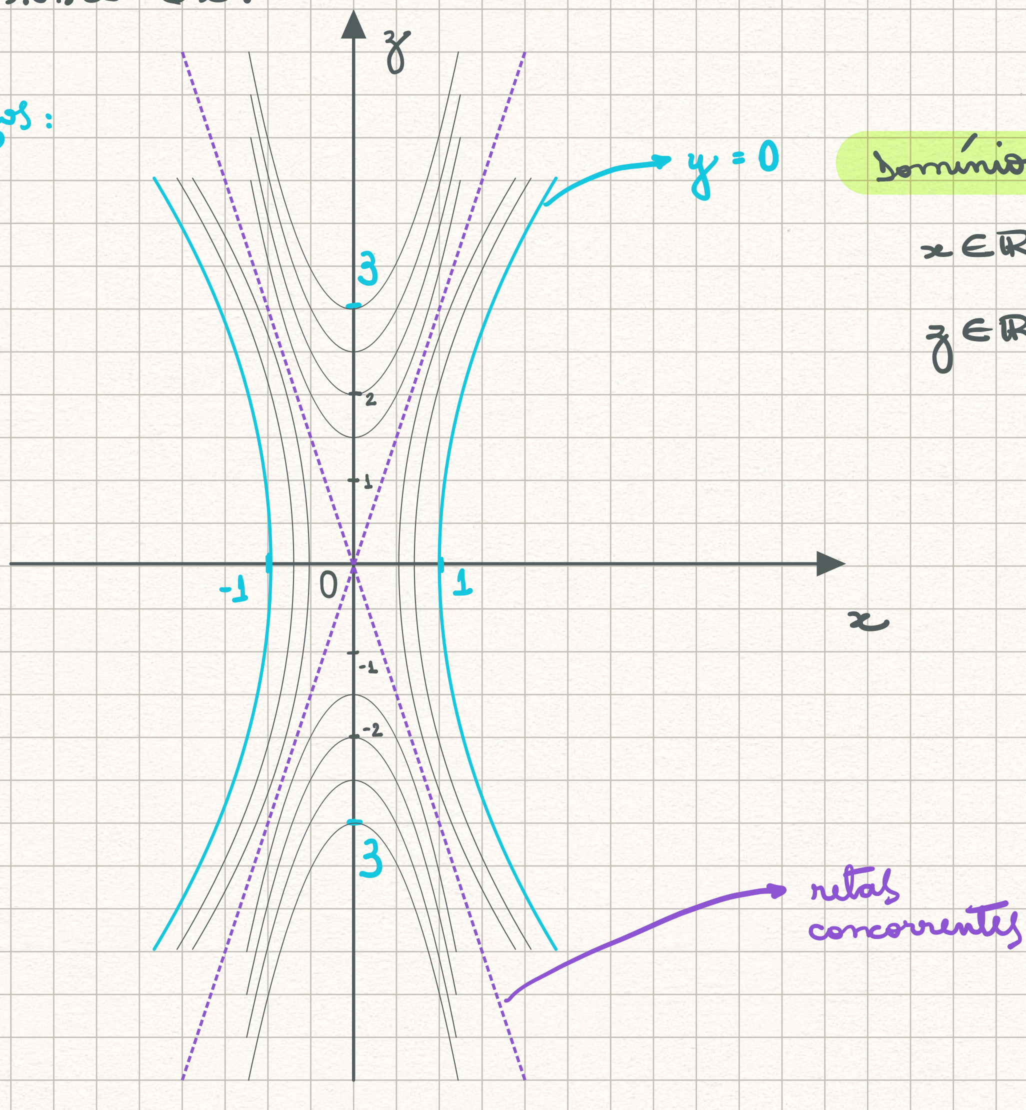
$y = \pm 2$ (plano // Oxz): 2 retas concorrentes

Menor que $y = -2$ ou maior que $y = 2$:

hipérboles se afastando das retas concorrentes, com ER sobre Ox.

3. Esboço dos Traços:

CURVAS DE NÍVEL, POIS CADA HIPÉRBOLE É RESULTADO DA INTERSECÇÃO DE UM PLANO // Oxz COM A SUP. QUÁDRICA.



Domínio:

$x \in \mathbb{R}$

$z \in \mathbb{R}$

Analogamente para Oyz :

1. Traço com Oyz $(x=0)$:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \; : \; \text{hipérbole - ER sobre } Oy \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

2. Traços com planos //s Oyz ($x = k$, $k = c^{\underline{te}}$, $k \in \mathbb{R}$) :

$$k^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 - k^2 \begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Análise análoga à anterior

$x = \pm 1$: 2 retas concorrentes

Entre $x = -1$ e $x = 1$:

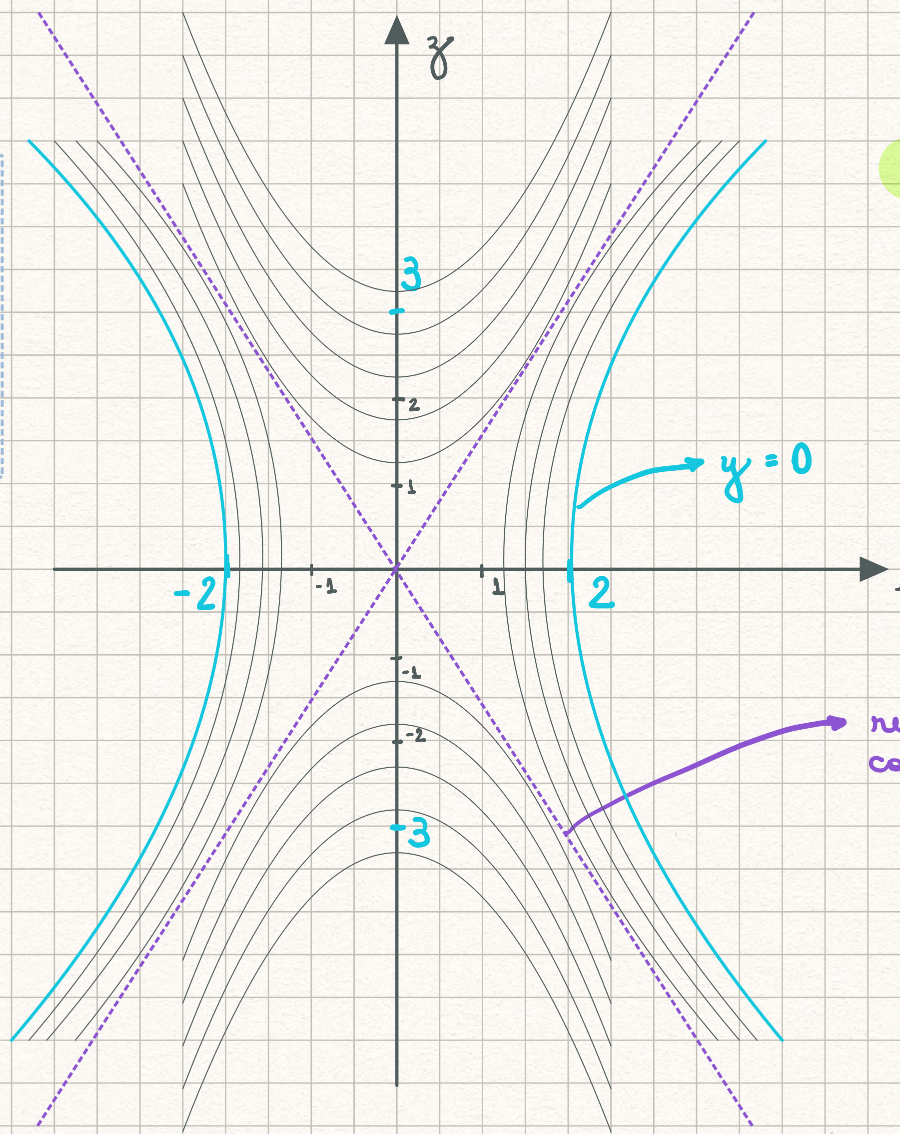
hipérboles se aproximando das retas concorrentes, a partir da hipérbole obtida em Oxz.

Menor que $x = -1$ ou maior que $x = 1$:

hipérboles se afastando das retas concorrentes, com ER sobre Ox.

3. Esboço dos Traços:

CURVAS DE NÍVEL, POIS CADA HIPÉRBOLE É RESULTADO DA INTERSECÇÃO DE UM PLANO // Oxz COM A SUP. QUÁDRICA.



Domínio:

$y \in \mathbb{R}$

$z \in \mathbb{R}$

Esboço da Superfície Quádrica no $\mathbb{R}^3$:

COMBINAR OS TRAÇOS OBTIDOS COM OS PLANOS COORDENADOS PARA DESENHAR O ESBOÇO.