PTC-3440 Modelos Probabilísticos

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Aulas 24 - 26 - 2021

PTC-EPUSP

Cadeias de Markov a Tempo Contínuo

Seja $\{X(t); t \geq 0\}$ um processo de estocástico tomando valores em $\{0, 1, \ldots\}$ ou $\{0, 1, \ldots, N\}$. Diremos que $\{X(t); t \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo se para $t, s \geq 0$,

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i, \boxed{\cancel{X(u), 0 \leq u < s}}) = P(X(t+s) = j | X(s) = i)$$

Se além disso

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i)$$

ou seja, independe de s, então a cadeia de Markov a tempo contínuo é dita ser estacionária ou homogênea.

Cadeias de Markov a Tempo Contínuo

Suponha que $\{X(t); t \geq 0\}$ seja uma cadeia de Markov a tempo contínuo homogênea e $T_1 =$ tempo que o processo fica no estado $X(0) = i$ antes de saltar para um estado j. Temos que

$$
\begin{aligned}
&P(T_1 > t + s | T_1 > s) = \\
&P(X(s+\ell) = i, 0 \leq \ell \leq t | X(s) = i, \cancel{X(u) = i, 0 \leq u < s}) = \\
&P(X(s+\ell) = i, 0 \leq \ell \leq t | X(s) = i) = \\
&P(X(\ell) = i, 0 \leq \ell \leq t | X(0) = i) = \\
&P(T_1 > t)
\end{aligned}
$$

ou seja

T_1 é sem memória

$$P(T_1 > t + s | T_1 > s) = P(T_1 > t)$$

Cadeias de Markov a Tempo Contínuo

Portanto T_1 é sem memória e tem de ser exponencial. Uma outra forma de definir as cadeias de Markov a tempo contínuo é a seguinte. Considerando o estado atual como sendo i,

1. o instante de salto é exponencial com parâmetro ν_i.
2. a probabilidade de ir para o estado j, $j \neq i$, é p_{ij}.

Devemos ter $\sum_j p_{ij} = 1$, e $p_{ii} = 0$.

$$0 \xrightarrow{\lambda_0} 1 \xrightarrow{\lambda_1} 2 \xrightarrow{\lambda_2} 3 \xrightarrow{\lambda_3}$$

$$\begin{cases} \nu_i = \lambda_i \\ p_{ii+1} = 1 \end{cases}$$

Exemplos

A) Processos de Nascimento Puro com parâmetro λ_i. Temos que

$$\nu_i = \lambda_i, \;\; p_{ii+1} = 1$$

Exemplos

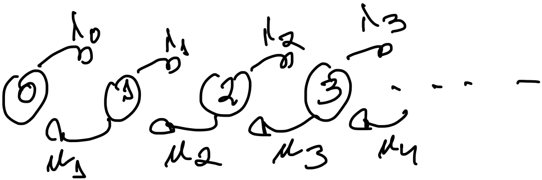
B) Processos de Nascimento e Morte. Temos que

$$\nu_0 = \lambda_0, \;\; \nu_i = \lambda_i + \nu_i, \; i = 1, 2, \ldots$$

$$p_{01} = 1, \quad p_{ii+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad p_{ii-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \;\; i = 1, 2, \ldots$$

Estado 0 : $\begin{cases} \nu_0 = \lambda_0 \\ p_{01} = 1 \end{cases}$

Estado i : ($i \geq 1$) $\begin{cases} \nu_i = \lambda_i + \mu_i \\ p_{i\,i+1} = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \\ p_{i\,i-1} = \dfrac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \end{cases}$



$$P(T_c < T_s) = \frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i} \rightarrow \text{chegada ocorrer antes de uma saída}$$

$$P(T_s < T_c) = \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} \rightarrow \text{saída ocorrer antes da chegada}$$

Lema

Seja

$$P_{ij}(t) = P(X(t+s) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j \,|\, X(0) = i)$$

Temos que

A) $\lim_{h\downarrow 0} \frac{1-P_{ii}(h)}{h} = \nu_i$

B) $\lim_{h\downarrow 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = \nu_i p_{ij}$, $i \neq j$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$1 - e^x = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right]$$

$$A)\quad 1 - P_{ii}(h) = \underbrace{1 - P(X(h)=i \mid X(0)=i)}_{P(X(h)\neq i \mid X(0)=i)}$$

$$\approx P(T_1 \leq h \mid X(0)=i) + o(h)$$

$$P(T_1 > h \mid X(0)=i) = e^{-v_i h}$$

$$P(T_1 \leq h \mid X(0)=i) = 1 - e^{-v_i h} = \underline{v_i h} + o(h)$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1-P_{ii}(h)}{h} = \lim_{h\downarrow 0}\left\{\frac{v_i h + o(h)}{h}\right\} = v_i + \cancel{\lim_{h\downarrow 0} \frac{o(h)}{h}}^{\to 0}$$

B) $\lim_{\substack{h \downarrow 0 \\ j \neq i}} \frac{P_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \underbrace{\left[\frac{1 - P_{ii}(h)}{h} \right]}_{v_i} P_{ij}$

$= v_i P_{ij}$,

Lema

Para todo $t, s \geq 0$,

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{\ell} P_{i\ell}(t) P_{\ell j}(s)$$

$$P_{\ell j}(t+s) = P\big(X(t+s) = j \mid X(0) = i\big)$$

$P(B|C)$

$$P(AB|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{P(A|BC)\,P(BC)}{P(C)} = P(A|BC)\,P(B|C)$$

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P\big(\underbrace{X(t+s)=j}_{A}, \underbrace{X(t)=k}_{B} \mid \underbrace{X(0)=i}_{C}\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\big(X(t+s)=j \mid X(t)=k, \cancel{X(0)=i}\big) P\big(X(t)=k \mid X(0)=i\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\big(X(t+s)=j \mid X(t)=k\big) P\big(X(t)=k \mid X(0)=i\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P\big(X(s)=j \mid X(0)=k\big)}_{P_{kj}(s)} \underbrace{P\big(X(t)=k \mid X(0)=i\big)}_{P_{ik}(t)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t) \cdot p_{kj}(s)$$

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{l=0}^{\infty} p_{il}(t)\, p_{lj}(s)$$

→ Equações de Atraso: $p_{ij}(s+h) = \sum_{l} p_{il}(h)\, p_{lj}(s)$

→ Equações de Avanço: $p_{ij}(t+h) = \sum_{l} p_{il}(t)\, p_{lj}(h)$

$$\dot{P}_{ij}(t) = \frac{d\, P_{ij}(t)}{dt}$$

Equações de Atraso de Kolmogorov

Para todo i, j, e $t \geq 0$,

$$\dot{P}_{ij}(t) = \nu_i \Big\{ \sum_{\ell \neq i} p_{i\ell} P_{\ell j}(t) - P_{ij}(t) \Big\}$$

$$P_{ij}(0) = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases}$$

$$P_{ij}(s+h) - P_{ij}(s) = \sum_{l} P_{il}(h) P_{lj}(s) - P_{ij}(s)$$

$$\sum_{l \neq i} P_{il}(h) P_{lj}(s) + P_{ii}(h) P_{ij}(s) - P_{ij}(s) =$$

$$\sum_{l \neq i} P_{il}(h) P_{lj}(s) + \left(1 - P_{ii}(h)\right) P_{ij}(s)$$

$l \neq i$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{P_{il}(h)}{h} = p_{il} v_i$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-P_{ii}(h)}{h} = \nu_i$$

$$\dot{P}_{ij}(s) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(s+h)-P_{ij}(s)}{h}$$

$P_{i\ell}\nu_i$

$$= \sum_{\ell\neq i} \lim_{h\to 0} \frac{P_{i\ell}(h)}{h} P_{\ell j}(s) -$$

ν_i

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-P_{ii}(h)}{h} P_{ij}(s)$$

Logo,

$$\dot{P}_{ij}(t) = \nu_i \left\{ \sum_{\ell \neq i} P_{i\ell}\, P_{\ell j}(t) - P_{ij}(t) \right\}$$

a) Processo de Nascimento Puro

$$\dot{P}_{ij}(t) = \lambda_i P_{i+1j}(t) - \lambda_i P_{ij}(t), \; j > i$$
$$\dot{P}_{ii}(t) = -\lambda_i P_{ii}(t)$$

b) Processo de Nascimento e Morte

$$\dot{P}_{ij}(t) = (\lambda_i + \mu_i)\left\{\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} P_{i+1j}(t) + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} P_{i-1j} - P_{ij}(t)\right\}$$

$$= \lambda_i P_{i+1j}(t) + \mu_i P_{i-1j} - (\lambda_i + \mu_i) P_{ij}(t), \quad i \geq 1$$

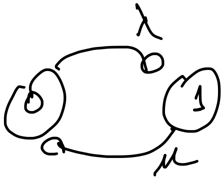
$$\dot{P}_{0j}(t) = \lambda_0 P_{1j}(t) - \lambda_0 P_{0j}(t)$$

c) Manutenção de Máquina

Uma máquina funciona em média um tempo $\frac{1}{\lambda}$ com distribuição exponencial. Suponha que exista 1 estação de reparo, e o tempo de serviço é exponencial com média $\frac{1}{\mu}$. Se 0 representa o estado a máquina está funcionando e 1 representa o estado a máquina está em reparo, determine $P_{00}(t)$ e $P_{10}(t)$.

Estado 0 = máquina funcionando

Estado 1 = " em reparo



Equações de Avanço de Kolmogorov

Para todo i, j, e $t \geq 0$,

j

$$\dot{P}_{ij}(t) = \sum_{\ell \neq i} \nu_\ell p_{\ell j} P_{i\ell}(t) - \nu_j P_{ij}(t)$$

$$P_{ij}(t) = P\left(X(t) = j \mid X(0) = i\right)$$

$$= P\left(X(t+s) = j \mid X(s) = i\right)$$

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{l} P_{il}(t) P_{lj}(h) - P_{ij}(t)$$

$$= \sum_{l \neq j} P_{il}(t) P_{lj}(h) + P_{ij}(t) P_{jj}(h) - P_{ij}(t)$$

$$= \sum_{l \neq j} P_{il}(t) \underline{P_{lj}(h)} + \underline{\underline{\left(1 - P_{jj}(h)\right)}} P_{ij}(t)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = P'_{ij}(t) =$$

$$= \sum_{\ell \neq j} \lim_{h \to 0} \frac{P_{\ell j}(h)}{h} P_{i\ell}(t) + \lim_{h \to 0} \left(\frac{1 - P_{jj}(h)}{h} \right) P_{ij}(t)$$

$v_\ell P_{\ell j}$

v_j

$$= \sum_{\ell \neq j} v_\ell P_{\ell j} \underline{P_{i\ell}}(t) - v_j P_{ij}(t)$$

Equações de Balanço:

$$\dot{p}_{ij}(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

$$p_{ij}(t) \xrightarrow{t \to \infty} p_j$$

não depende de i

$$0 = \sum_{\ell \neq j} v_\ell \, p_{\ell j} \, p_\ell - v_j \, p_j$$

sai = entra

Estado j

$$\Rightarrow \quad v_j \, p_j = \sum_{\ell \neq j} v_\ell \, p_{\ell j} \, p_\ell$$

a) Processo de Nascimento Puro

$$\dot{P}_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{ij-1}(t) - \lambda_j P_{ij}(t), \; j > i$$
$$\dot{P}_{ii}(t) = -\lambda_i P_{ii}(t)$$

a) Processo de Nascimento Puro

Mostre que

$$P_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t},$$

$$P_{ij}(t) = \lambda_{j-1} e^{-\lambda_j t} \int_0^t e^{\lambda_j s} P_{ij-1}(s) ds, \quad j \geq i+1$$

b) Processo de Yule

Suponha que

$$\lambda_j = j\lambda, \;\; j \geq 1.$$

Mostre que

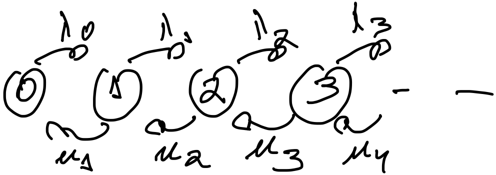
$$P_{ij}(t) = \binom{j-1}{j-i} e^{-\lambda i t}(1 - e^{-\lambda t})^{j-i}, \;\; j \geq i \geq 1$$

c) Processo de Nascimento e Morte

Considere o processo de Nascimento e Morte. Mostre que as equações de avanço são dadas por:

$$\dot{P}_{i0}(t) = \mu_1 P_{i1}(t) - \lambda_0 P_{i0}(t),$$
$$\dot{P}_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{ij-1}(t) + \mu_{j+1} P_{ij+1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t),\ j \geq 1.$$

Obtenha as equações de balanço como ponto de equilíbrio das equações diferencias acima.



Estado $\underline{0}$
$$\begin{cases} \nu_0 = \lambda_0 \\ p_{01} = 1 \end{cases}$$

Estado i, $\underline{i \geq 1}$
$$\begin{cases} \nu_i = \lambda_i + \mu_i \\ p_{i\,i+1} = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \\ p_{i\,i-1} = \dfrac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \end{cases}$$

Equação de Avanço:

$$\dot{P}_{ij}(t) = \sum_{l \neq j} \nu_l \, p_{lj} \, P_{il}(t) - \nu_j P_{ij}(t)$$

$\underline{j=0}$:
$$\dot{P}_{i0}(t) = \nu_1 \, p_{10} \, P_{i1}(t) - \nu_0 P_{i0}(t) \quad (l=1)$$

$$= \cancel{(\lambda_1 + \mu_1)} \frac{\mu_1}{\cancel{\lambda_1 + \mu_1}} P_{i1}(t) - \lambda_0 P_{i0}(t)$$

$\longrightarrow$

$j=0$:
$$\dot P_{i0}(t) = \mu_1 P_{i1}(t) - \lambda_0 P_{i0}(t)$$

$$\cancel{(\lambda_{j+1}+\mu_{j+1})} \cdot \frac{\mu_{j+1}}{\cancel{\lambda_{j+1}+\mu_{j+1}}} \qquad \cancel{(\lambda_{j-1}+\mu_{j-1})} \frac{\lambda_{j-1}}{\cancel{\lambda_{j-1}+\mu_{j-1}}}$$

$j \geq 1$:
$$\dot P_{ij}(t) = v_{j+1}\, p_{j+1,j}\, P_{i,j+1}(t) + v_{j-1}\, p_{j-1,j}\, P_{i,j-1}(t) - \underbrace{v_j}_{\lambda_j+\mu_j} P_{ij}(t)$$

$\longrightarrow$
$$\dot P_{ij}(t) = \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t) + \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j+\mu_j) P_{ij}(t)$$

Condições Iniciais : $\begin{cases} P_{ii}(0) = 1 \\ P_{ij}(0) = 0, \quad j \neq i \end{cases}$

Equações de Balanço : $\dot{P}_{ij}(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$

$P_{ij}(t) \xrightarrow{t \to \infty} P_j$

$j = 0: \quad 0 = \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0$

$j \geq 1: \quad 0 = \mu_{j+1} P_{j+1} + \lambda_{j-1} P_{j-1} - (\mu_j + \lambda_j) P_j$

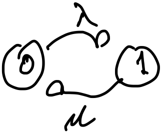
Estado	Sai = Entra
0	$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$
$j \geq 1$	$(\lambda_j + \mu_j) P_j = \lambda_{j-1} P_{j-1} + \mu_{j+1} P_{j+1}$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$$

$$\dot{P}_{ij}(t) = \frac{d\, P_{ij}(t)}{dt}$$

Atraso: $\dot{P}_{ij} = \nu_i \left\{ \sum_{l \neq i} P_{il} P_{lj} - P_{ij} \right\}$

Avanço: $\dot{P}_{ij} = \sum_{l \neq j} \nu_l P_{lj} P_{il} - \nu_j P_{ij}$



$$\begin{cases} \nu_0 = \lambda & P_{01} = 1 \\ \nu_1 = \mu & P_{10} = 1 \end{cases}$$

Atraso: $i=0,\ j=0$: $\dot{P}_{00} = \lambda \{ P_{10} - P_{00} \}$ $\quad P_{00}(0) = 1$

$i=1,\ j=0$: $\dot{P}_{10} = \mu \{ P_{00} - P_{10} \}$ $\quad P_{10}(0) = 0$

Recordação: $\dot{x} = Ax \Rightarrow x(t) = e^{At} x(0)$ $\qquad$ matlab: ~~exp(At)~~ expm(At)

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{00} \\ \dot{P}_{10} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} P_{00} \\ P_{10} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P_{00}(0) \\ P_{10}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{00}(t) \\ P_{10}(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\begin{cases} P_{00}(t) = \dfrac{1}{\lambda+\mu}\left(\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \\[2ex] P_{10}(t) = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \end{cases}$$

$$P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1$$

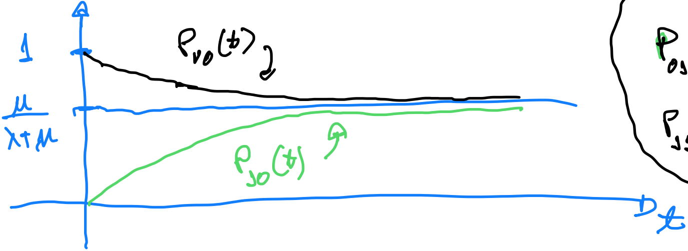
$$P_{10}(t) + P_{11}(t) = 1$$

$$P_{00}(0) = 1 \quad \text{ok}$$

$$P_{10}(0) = 0 \quad \text{ok}$$

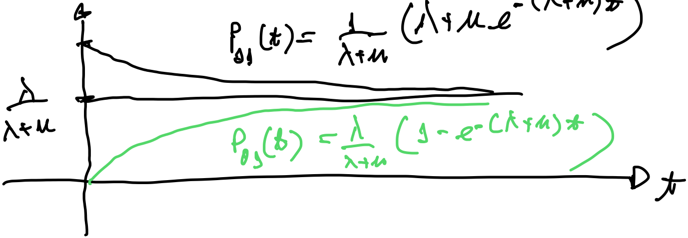
$$P_{00}(t) \xrightarrow{t \to \infty} P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$P_{10}(t) \xrightarrow{t \to \infty} P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$



$$P_{01}(t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$P_{11}(t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$



$$P_{11}(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

$$P_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

Agrança: $\dot{P}_{ij} = \sum_{\ell \neq j} \nu_\ell P_{\ell j} P_{i\ell} - \nu_j P_{ij}$

Estado $i=0, j=0$: $i=0, j=1$: $\begin{cases} \dot{P}_{00} = \mu P_{01} - \lambda P_{00} \\ \dot{P}_{01} = \lambda P_{00} - \mu P_{01} \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{00} \\ \dot{P}_{01} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} P_{00} \\ P_{01} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P_{00}(0) \\ P_{01}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{00} \\ P_{01} \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

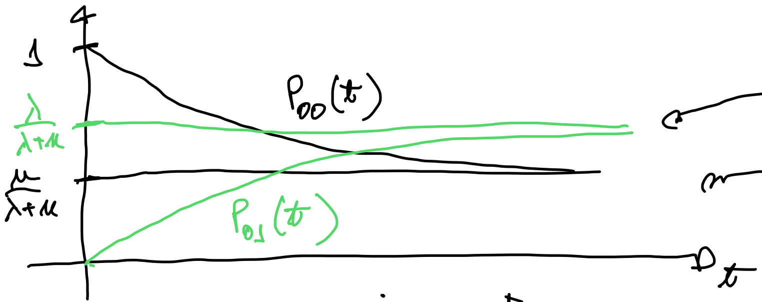
$$P_{00}(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}\left[\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right]$$

$$\underline{P_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right]}$$

$= 1$

$$P_{00}(t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad , \quad P_{01}(t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$P_{00}(0) = 1 \quad , \quad P_{01}(0) = 0$$



sai = entra

$P_0 + P_1 = 1$

Equações de Balanço: $\lambda P_0 = \mu P_1$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \Rightarrow P_0 + \frac{\lambda}{\mu} P_0 = P_0 \left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right) = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Exemplo:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "2\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2
\end{tikzcd}
$$

Estado 0: 2 componentes funcionando em paralelo

Estado 1: 1 componente funcionando, 1 em reparo

Estado 2: sistema inoperante

$$
\begin{cases}
\text{Estado 0:} \quad v_0 = 2\lambda, \quad P_{01} = 1 \\
\text{Estado 1:} \quad v_1 = (\lambda+\mu), \quad P_{10} = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad P_{12} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \\
\text{Estado 2:} \quad v_2 = 0
\end{cases}
$$

Avanço: $\dot{P}_{ij} = \sum_{l \neq j} \nu_l P_{lj} P_{il} - \nu_j P_{ij}$

$i=0,\ j=0$: $\dot{P}_{00} = \cancel{(\lambda+\mu)} \dfrac{\mu}{\cancel{\lambda+\mu}} P_{01} - 2\lambda P_{00} = \mu P_{01} - 2\lambda P_{00}$

$i=0,\ j=1$: $\dot{P}_{01} = 2\lambda P_{00} - (\lambda+\mu) P_{01}$

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{00} \\ \dot{P}_{01} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2\lambda & \mu \\ 2\lambda & -(\lambda+\mu) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} P_{00} \\ P_{01} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P_{00}(0) \\ P_{01}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

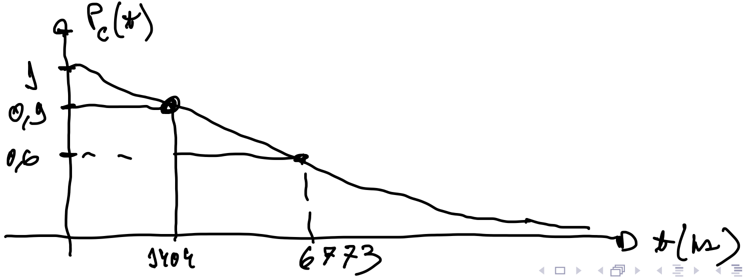
$$\begin{bmatrix} P_{00}(t) \\ P_{01}(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo: $\frac{1}{\lambda} = 500$ hs, $\frac{1}{\mu} = 10$ hs

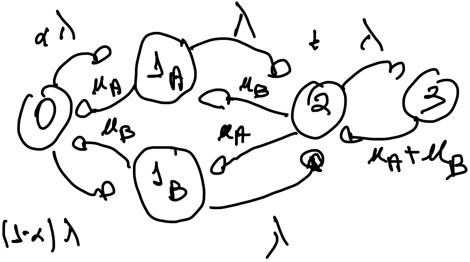
Calcule T_{max} tal que $\overset{P_C(t)}{=} P(X(t)=0 \mid X(0)=0)\, t$

$P(X(t)=1 / X(0)=0) \geq 0{,}9$ para $0 \leq t \leq T_{max}$

Prob. do sistema estar operacional é maior ou igual a 90%



Exercício 26 com fila limitada $N=3$



0 = sistema vazio

1_A = 1 pessoa no servidor A

1_B = 1 pessoa no servidor B

2 = os 2 servidores ocupados

3 = os 2 servidores ocupados e 1 pessoa na fila (sistema fechado)

Equações de Balanço:

Estado	sai = entra
0	$\lambda P_0 = \mu_A P_{1_A} + \mu_B P_{1_B}$
1_A	$(\lambda+\mu_A) P_{1_A} = \alpha\lambda P_0 + \mu_B P_2$

$$\begin{array}{l|l}
\cdot\ 1_B & (\lambda+\mu_B)\,P_{1_B} = \lambda(1-\alpha)\,P_0 + \mu_A P_2 \\
\times\ 2 & (\lambda+\mu_A+\mu_B)\,P_2 = \lambda P_{1_A} + \lambda P_{1_B} + (\mu_A+\mu_B)\,P_3 \\
\cdot\ 3 & (\mu_A+\mu_B)\,P_3 = \lambda P_2
\end{array}$$

$$P_0 + P_{1_A} + P_{1_B} + P_2 + P_3 = 1$$

5 incógnitas e 5 equações ∴

Suponha: $\alpha = 1/3$ $\qquad \frac{1}{\mu_A} = 9$ min

$\frac{1}{\lambda} = 10$ min $\qquad \frac{1}{\mu_B} = 4$ min

$$
\begin{cases}
\frac{1}{10} P_0 = \frac{1}{5} P_{1A} + \frac{1}{4} P_{1B} \\[2ex]
\frac{3}{10} P_{1A} = \frac{1}{30} P_0 + \frac{1}{4} P_2 \\[2ex]
\frac{7}{20} P_{1B} = \frac{1}{15} P_0 + \frac{1}{5} P_2 \\[2ex]
\left(\frac{1}{10} + \frac{9}{20}\right) P_2 = \frac{1}{10} P_{1A} + \frac{1}{10} P_{1B} + \frac{9}{20} P_3 \\[2ex]
\frac{9}{20} P_3 = \frac{1}{10} P_2
\end{cases}
$$

$$P_0 + P_{1A} + P_{1B} + P_2 + P_3 = 1$$

$$\frac{1}{\mu_A + \mu_B} = \frac{1}{1/4 + 1/5} = \frac{20}{9}$$

Solução: $P_0 = 0{,}642$, $P_{1A} = 0{,}1235$, $P_{1B} = 0{,}158$

a) $P_2 = 0{,}0626$, $P_3 = 0{,}0139$

b) $L = (P_{1A} + P_{1B}) + 2P_2 + 3P_3 = 0{,}4484$

$$W = \frac{L}{\lambda_a} = \frac{L}{\lambda(1-P_3)} = \frac{0{,}4484}{\frac{1}{10}\cdot 0{,}9861} = 4{,}5465 \text{ min}$$

$$W_Q = \left(\frac{1}{1-P_3}\right)\left[\frac{1}{\mu_A+\mu_B}\right]P_2 = \frac{1}{0{,}9861}\cdot\frac{20}{9}\cdot 0{,}0626$$

$$= 0{,}141 \text{ min}$$

$$L_Q = \lambda_a W_Q = \underbrace{\lambda}_{0{,}1}\underbrace{(1-P_3)}_{0{,}9861}\,0{,}141 = 0{,}0139$$

c) % ocioso $= P_0 \simeq 64,2\%$

d) $A = \{$recebe serviço do servidor A$\}$, $E = \{$cliente entra no sistema$\}$

$$P(A|E) = \frac{1}{1-P_3}\left\{ \overset{\alpha}{P(A|X=0)}\, P_0 + \cancel{P(A|X=1_A)}^{\,0}\, P_{1_A} + \right.$$

$$\left. \overset{1}{P(A|X=1_B)}\, P_{1_B} + \underbrace{P(A|X=2)}_{\frac{\mu_A}{\mu_A+\mu_B}}\, P_2 \right\} =$$

$$\frac{1}{0,9861}\left\{ \frac{1}{3}\underbrace{P_0}_{0,642} + \underbrace{P_{1_B}}_{0,158} + \frac{4}{9}\underbrace{P_2}_{0,0626} \right\}$$

$$= \frac{1}{0{,}986}\left\{0{,}214 + 0{,}158 + 0{,}0278\right\}$$

$$= 40{,}59\,\%$$