

## Tópico 7 - Contagem - Aula de exercícios 1

quarta-feira, 14 de julho de 2021

**Exercício 1.** Se 5 cavalos disputam um páreo, quantos são os resultados possíveis para os dois primeiros lugares?

$$\text{PFC: } \frac{5}{1^\circ} \cdot \frac{4}{2^\circ} = 20 \quad \text{ou} \quad A_{5,2} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$$

**Exercício 2.** Um experimento consiste em jogar, simultaneamente, uma moeda e um dado para cima e observar os pares de resultados (moeda, dado). Quantos são os pares de resultados possíveis?

$$\frac{2}{\text{moeda}} \cdot \frac{6}{\text{dado}} = 12$$

	1	2	3	4	5	6
C	(C,1)					
K	(K,1)					

**Exercício 4.** Quantos números naturais pares<sup>A</sup> ou múltiplos<sup>B</sup> de 5, com 4 algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 7 e 9?

$$A: \frac{4}{\textcircled{0}} \cdot \frac{3}{\textcircled{4}} \cdot \frac{2}{\textcircled{7}} \cdot \frac{1}{\textcircled{9}} = 24$$
$$+ \frac{3}{\textcircled{4}} \cdot \frac{3}{\textcircled{7}} \cdot \frac{2}{\textcircled{9}} \cdot \frac{1}{\textcircled{0}} = 18$$
$$42$$

$$B: \frac{4}{\textcircled{0}} \cdot \frac{3}{\textcircled{4}} \cdot \frac{2}{\textcircled{7}} \cdot \frac{1}{\textcircled{9}} = 24$$

$$A \cap B: \frac{4}{\textcircled{0}} \cdot \frac{3}{\textcircled{4}} \cdot \frac{2}{\textcircled{7}} \cdot \frac{1}{\textcircled{9}} = 24$$

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$
$$= 42 + 24 - 24 = 42$$

**Exercício 8.** Um amigo mostrou-me 10 livros diferentes, sendo 5 de matemática, 3 de português e 2 de física, e pediu-me que escolhesse dois deles, com a condição que fossem de disciplinas diferentes. De quantas maneiras eu posso fazer minha escolha?

$$A: \frac{5}{\text{mat}} \cdot \frac{2}{\text{fís}} = 10 \quad \gamma$$

$$\begin{array}{l}
 A: \frac{5}{\text{MAT}} \cdot \frac{2}{\text{FÍS}} = 10 \\
 B: \frac{5}{\text{MAT}} \cdot \frac{3}{\text{PORT}} = 15 \\
 C: \frac{3}{\text{PORT}} \cdot \frac{2}{\text{FÍS}} = 6
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) \\
 = 10 + 15 + 6 \\
 = 31
 \end{array}$$

**Exercício 8.** Um amigo mostrou-me 10 livros diferentes, sendo 5 de matemática, 3 de português e 2 de física, e pediu-me que escolhesse dois deles, com a condição que fossem de disciplinas diferentes. De quantas maneiras eu posso fazer minha escolha?

**Exercício 11.** De quantas maneiras é possível sentar cinco casais em 10 cadeiras em fila, se marido e mulher devem sentar sempre juntos?

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline C & D \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline E & F \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline G & H \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline I & J \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 2! \quad 2! \quad 2! \quad 2! \quad 2! \\
 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1
 \end{array}
 = 5! \cdot 2^5 = 120 \cdot 32 = 3840$$

**Exercício 14.** Quantos números compreendidos entre 200 e 1000, com algarismos distintos, é possível formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5? E se os algarismos puderem ser iguais?

$$200 \text{ e } 1000 \rightarrow 200 \text{ e } 999 + 1000$$

$$\frac{4}{\cancel{0,1,2,3,4,5}} \quad \frac{5}{0,1,1,2,3,4,5} \quad \frac{4}{0,1,2,3,4,5} = 80 \text{ números de alg. distintos.}$$

$$\frac{4}{\quad} \quad \frac{6}{\quad} \quad \frac{6}{\quad} = 144 + 1 = 145 \text{ números.}$$

**Exercício 15.** Resolva as equações:

$$A_{x,3} = 4A_{x,2}$$

$$\frac{x!}{(x-3)!} = 4 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} \quad \rightarrow \quad \frac{(x-2) \cdot \cancel{(x-3)!}}{\cancel{(x-3)!}} = 4$$

$$\frac{(x-2)!}{(x-3)!} = 4 \cdot \frac{\cancel{x!}}{\cancel{x!}} = 4 \quad \rightarrow \quad x-2 = 4$$

$$\boxed{x=6}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot A_{6,2} = \\ = 4 \cdot 6 \cdot 5 \\ = 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ = A_{6,3} \end{array} \right\}$$

**Exercício 18.** Determine o inteiro  $n$ , sabendo que

$$(n+4)! + (n+3)! = 15(n+2)! .$$

$$(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)! + (n+3) \cdot (n+2)! = 15 \cdot (n+2)!$$

$$(n+4) \cdot (n+3) + (n+3) = 15$$

$$n^2 + 7n + 12 + n + 3 = 15$$

$$n^2 + 8n = 0$$

$$n(n+8) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{n=0} \text{ ou } \cancel{n=-8}$$

$$\begin{array}{l} n+2 \neq 0 \\ n \neq -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4! + 3! = 15 \cdot 2! \\ 24 + 6 = 30 \end{array}$$

**Exercício 22.** De quantas maneiras podemos dispor 4 casais em torno de uma mesa circular, se marido e mulher devem sentar juntos? E se, além disso, duas mulheres não podem sentar juntas?

$$PC_m = (m-1)!$$

•  $\boxed{A \ B} \ \boxed{C \ D} \ \boxed{E \ F} \ \boxed{G \ H} \rightarrow 3! = 6 \cdot 2^4$

•  $M \ H \ H \ M \ H \ M \ H \ M$   
 $3! = 6$

$H \ M \ H \ M \ H \ M \ H \ M$

$M \ H \ M \ H \ M \ H \ M \ H$

**Exercício 26.** Quantos são os anagramas da palavra ARARA?

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 10$$

**Exercício 32.** Obter o número de elementos de um conjunto, sabendo-se que ele possui 45 subconjuntos de 2 elementos.

$$C_{m,2} = 45 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{m \cdot (m-1) \cdot \cancel{(m-2)!}}{2 \cdot (m-2)!} = 45 \\ \frac{m!}{2!(m-2)!} = 45 \end{array} \right.$$

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot \cancel{8!}} = 45$$

$$m^2 - m = 90$$

$$m^2 - m - 90 = 0$$

$$\boxed{m=10} \quad \text{ou} \quad m = \cancel{9}$$

$$\frac{10}{10} \cdot \frac{-9}{-9} = -90$$

$$\frac{10}{10} + \frac{-9}{-9} = 1$$

**Exercício 37.** A turma de espanhol de uma escola é composta por 20 estudantes. Serão formados grupos de três estudantes para uma apresentação cultural. De quantas maneiras se podem formar esses grupos, sabendo-se que dois dos estudantes não podem pertencer a um mesmo grupo?

$$\text{total } C_{20,3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \overset{3}{18} \cdot \cancel{17!}}{\underset{1}{6} \cdot \cancel{17!}} = 1140$$

$$\text{estud. juntos } \frac{18}{\quad} \frac{A}{\quad} \frac{B}{\quad} = 18$$

$$\Rightarrow 1140 - 18 = \underline{\underline{1122}}$$