A INTEGRAL DE RIEMANN

1. O teorema fundamental do cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo, em suas diversas formas permite conectar a integração e derivação de funções. Ele mostra, a grosso modo, que esses procedimentos são inversos um do outro, dentro de condiçõe apropriadas.

Precisamos antes de alguns resultados preliminares, que também são importantes por si.

Proposição 1.1. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *e* $c \in [a, b]$*. Então* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *se e somente se* $f \in \mathcal{R}[a, c]$ *e* $f \in \mathcal{R}[c, b]$*. Nesse caso,* $\int_a^b f(x)\,d\,x = \int_a^c f(x)\,d\,x + \int_c^b f(x)\,d\,x$*.*

Definição 1.2. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Dizemos que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma* ***antiderivada*** *ou* ***primitiva*** *de* f *em* $[a, b]$ *se* $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$*.*

Teorema 1.3. *(Teorema Fundamental do Cálculo (*1^a *forma). Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então*

$$F(x) := \int_a^x f(x)\,d\,x \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f$$
$$= \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{x_0+h} - \int_a^{x_0} f$$

é uma primitiva de f *em* $]a, b[$*, contínua em* $[a, b]$*.*

Dem. Seja $x_0 \in]a,b[$.

Date: July 19, 2021.

Então $\underbrace{F(x_0+h) - F(x_0)}$ $- f(x_0) =$

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \left(f(x) - f(x_0)\right)$$

Dado $\varepsilon > 0$ seja δ t.q. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Então temos

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\varepsilon}|$$

$$\leq \frac{1}{h} \varepsilon \cdot h < \varepsilon.$$

No ponto a temos $F(a+h) - F(a) = \int_a^{a+h} f(x)\, dx$

$\therefore |F(a+h) - F(a)| \leq M \cdot h$

□

Corolário 1.4. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e G uma primitiva de f em $]a, b[$, contínua em $[a, b]$.*
Então

$$\int_a^b f(x)\, d\, x = G(b) - G(a).$$

Dem. Para todo $x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x f$ é primitiva de f, $\therefore F'(x) = f(x) = G'(x)$

$\therefore F(x) = G(x) + K \quad \forall x \in [a, b]$

$\therefore F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$

□

Este resultado pode ser demonstrado sob hipótes mais fracas para a função f. Este é o conteúdo da segunda forma do Teorema Fndamental do Cálculo.

Teorema 1.5. *(Teorema Fundamental do Cálculo (2^a forma). Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função em $\mathcal{R}[a, b]$ e F uma primitiva de f em $]a, b[$, contínua em $[a, b]$.*

Então

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = F(b) - F(a).$$

Dem.

$\square$