A INTEGRAL DE RIEMANN

1. Propriedades da Integral de Riemann

Dadas as dificuldades para o cálculo da integral pela definição é importante obter propriedades que ajudem nesta tarefa. Começamos com as ‘propriedades algébricas.

Proposição 1.1. *Suponhamos que $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Então temos:*
a) Se $k \in \mathbb{R}$, então $kf \in \mathcal{R}[a,b]$ e

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

b) $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$ e

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

c) Se $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$ então

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Dem. Vamos demonstrar b), os outros itens são semelhantes e ficam a cargo do leitor.

Seja $L_1 = \int_a^b f$ e $L_2 = \int_a^b g$. Dado $\epsilon > 0$, sejam δ_1 e δ_2 tais que $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_1 \Rightarrow |S(f,\dot{\mathcal{P}}) - L_1| < \epsilon/2$ e $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_2 \Rightarrow |S(g,\dot{\mathcal{P}}) - L_2| < \epsilon/2$.

Se $\delta - \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, teremos então $|S(f+g,\dot{\mathcal{P}}) - (L_1 + L_2)| \leq |S(f,\dot{\mathcal{P}}) - L_1| + |S(g,\dot{\mathcal{P}}) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. $\square$

Date: July 21, 2021.

Exemplo 1.2. *Seja J um subintervalo de $[a,b]$ de extremos c e d e* $\phi_J(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in J \\ 0, & se\ x \in [a,b] \setminus J \end{cases}$

Podemos mostrar diretamente da definição que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. e $\int_a^b f = d - c$.

Dizemos que uma função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma ***função em escada*** *se ela assumente apenas um número finito de valores, cada um em um número finito de subintervalos de $[a,b]$. Pode-se mostrar que toda função em escada pode ser escrita como uma combinação linear de funções do tipo acima, $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_{J_i}$.*

Segue das propriedades algébricas que toda função em escada é integrável e $\int_a^b \phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_a^b \phi_{J_i}$.

O resultado seguinte destaca uma classe de funções que **não** pertencem a $\mathcal{R}[a,b]$.

Proposição 1.3. *Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$, então f é limitada. (Ou seja se f não é limitada em $[a,b]$, então f não é integrável neste intervalo).*

Dem. Suponhamos que f é não limitada e integrvel em $[a,b]$. Dado $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(1) \qquad \|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta \Rightarrow |S(f,\dot{\mathcal{P}} - \int_a^b f| < 1 \Rightarrow |S(f,\dot{\mathcal{P}}| < 1 + |\int_a^b f|$$

Seja $\mathcal{P}$ uma partição qualquer com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$.

Então existe um subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição $\mathcal{P}$ no qual f não ́limitada.

Vamos marcar a partição $\mathcal{P}$ em dois passos da seguinte forma. Primeiro escoolhemos um ponto qualquer t_j no subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$, para todo $j \neq 1$.

Temos então, para qualquer escolha do ponto $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = f(t_i)\Delta x_i + \sum_{j \neq i}^{n} f(t_j)\Delta x_j \Rightarrow$$

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}})| \geq |f(t_i)||\Delta x_i| - |\sum_{j \neq i}^{n} f(t_j)\Delta x_j|.$$

Escolhendo agora t_i de tal forma que
$|f(t_i)||\Delta x_i| > 1 + |\int_a^b f| + |\sum_{j \neq i}^{n} f(t_j)\Delta x_j|$, segue que

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}})| > 1 + |\int_a^b f| \tag{2}$$

em contradição com (1). □

Exemplo 1.4. *A função* $f(x) := \begin{cases} f(x) = 1/x \ se \ x \neq 0 \\ 0 \ se \ x = 0 \end{cases}$ *, não é integrável em nenhum intervalo contendo a origem.*

2. Funções integráveis

Vejamos alguns resultados que permitem decidir sobre a integrabilidade de classes amplas de funções, como funções "em escada", continuas etc.).

Proposição 2.1. *(Critério de Cauchy) Uma função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *pertence a* $\mathcal{R}[a, b]$ *se e somente se para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, para quaisquer partições marcadas* $\dot{\mathcal{P}}$ *e* $\dot{\mathcal{Q}}$ *com* $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ *e* $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$ *temos*

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})| < \epsilon.$$

Esboço da demonstração.
$(\Longrightarrow)$

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pertence a $\mathcal{R}[a, b]$ Então $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| < \epsilon/2$ e $|S(f, \dot{\mathcal{Q}}) - \int_a^b f| < \epsilon/2 \Rightarrow |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})| < \epsilon$, pela desigualdade triangular.

($\Longleftarrow$)

Se f satisfaz o critério, escolhemos uma sequência δ_n decrescente de números positivos tais que, se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_n$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta_n$ então $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f\dot{\mathcal{Q}})| < 1/n$.

Escolhendo agora particões marcadas $\dot{\mathcal{P}}_n$, com $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| < \delta_n$, segue que $S(f, \dot{\mathcal{P}}_n)$ śequência de Cauchy. Se $L = \lim_{n\to\infty} S(f, \dot{\mathcal{P}}_n)$, obtemos então, para qualquer partição marcada $\dot{\mathcal{P}}$ com norma menor do que δ_n que

$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - L| < |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{P}}_m)| + |S(f, \dot{\mathcal{P}}_m) - L|$. Fazendo $m \to \infty$, obtemos $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - L| < 1/n$. $\square$

Teorema 2.2. *Toda função contínua em $[a, b]$ pertence a $\mathcal{R}[a, b]$.*

Dem. Sendo f contínua em $[a, b]$, ela é uniformemente contínua, ou seja: dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ de tal forma que $x, y \in [a, b]$ e $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta$.

Vamos usar o critério de Cauchy acima. Sejam $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$, partições marcadas. Suponhamos inicialmente, que $\mathcal{Q}$ é um **refinamento** de $\mathcal{P}$, ou seja, $P \subset Q$.

Dado um subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição $\mathcal{P}$, existe então $k = k(i)$, $m = m(i)$ tais que os pontos $y_{k-1}, y_k, \cdots y_{k+m}$ da partição $\mathcal{Q}$, satisfazem : $x_{i-1} = y_{k-1}$, $x_i = y_{k+m}$, ou seja:

$[x_{i-1}, x_i] = \cup_{j=k}^{k+m} [y_{j-1}, y_j]$.

Dado $\epsilon > 0$, escolhemos $\delta > 0$ de tal forma que $x, y \in [a, b]$ e $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Temos então, se $\|\mathcal{P}\| < \delta$, escolhendo marcas $t_1, t_2, \cdots, t_m$ em $\mathcal{P}$ e $s_1, s_2, \cdots, s_{k(n)+n}$ em $\mathcal{Q}$.

$$\begin{aligned} S(f, \dot{\mathcal{P}}) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=k(i)}^{k(i)+m(i)} f(t_i)(y_j - y_{j-1}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f, \dot{\mathcal{Q}}) &= \sum_{i=1}^{k(n)+m(n)} f(s_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=k(i)}^{k(i)+m(i)} f(s_j)(y_j - y_{j-1}) \right) \end{aligned}$$

Nas somatórias acima, como t_i e s_j estão no mesmo intervalo $[x_{i-1}.x_i[$, para $k(i) \leq j \leq k(i) + m(i)$. obtemos $|t_i - s_j| < \delta$ e, portanto,

$$\begin{aligned} |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=k(i)}^{k(i)+m(i)} |f(s_j) - f(t_i)|(y_j - y_{j-1}) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\eta \sum_{j=k(i)}^{k(i)+m(i)} (y_j - y_{j-1}) \right) \\ &\leq \eta \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \eta(b - a) < \epsilon/2 \end{aligned}$$

Dadas, agora partições marcadas arbitrárias com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$ seja $\mathcal{R} = \mathcal{P} U \mathcal{Q}$ e $\dot{\mathcal{R}}$ uma marcação qualquer em $\mathcal{R}$.

Como R é refinamento de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, segue do que foi demonstrado acima que

$$\begin{aligned} |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})| &\leq |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{R}})| + |S(f, \dot{\mathcal{Q}}) - S(f, \dot{\mathcal{R}})| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

□

Observação 2.3. *Com uma pequena modificação dos argumentos acima, podemos mostrar que toda função f limitada e contínua, exceto em um número finito de pontos do intervalo $[a, b]$, pertence a $\mathcal{R}[a, b]$. Mais geralmente, $f \in \mathcal{R}[a, b]$, se o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é 'suficientemente pequeno' (tem medida nula). Isto vale, em particular, se ele é enumerável. Segue daí que toda função monótona em $[a, b]$ pertence a $\mathcal{R}[a, b]$.*