A INTEGRAL DE RIEMANN

1. Introdução

A ideia de integração, como inversa do processo de derivação, aparece nos trabalhos revolucionários de Isaac Newton e Gotfried Leibniz, no final do século XVII.

É apenas em meados do século XIX, que a integração é vista como um processo independente, como limites de certas somas interpretadas como aproximação de áreas sob o gráfico de funções, conhecidas desde então como **Somas de Riemann**. As ideias de Riemann deram origem a outras teorias de integração, notadamente a de **Henry Lebesgue**, já no início do século XX.

A integral de Riemann (e suas generalizações) permanecem, porém, como um dos assuntos mais importantes da Análise Matemática pela sua aplicabilidade, natureza intuitiva e importência histórica.

Para definir a integral de Riemann, precisamos de alguns conceitos preliminares.

Definição 1.1. *Uma **partição** do intervalo fechado $I = [a, b]$ é um conjunto finito e ordenado $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_1, \cdots, x_n\}$ de pontos de I tais que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

O intervalo $I_k = [x_{k-1}, x_{k-1}]$ de comprimento $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ será denominado o k-ésimo subintervalo *da partição $\mathcal{P}$.*

Definição 1.2. *O comprimento máximo dos subintervalos da partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_1, \cdots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$ é a **norma da partição** e será denotada por $\|\mathcal{P}\|$.*

Date: July 14, 2021.

Ou seja, se $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$:

$$\|\mathcal{P}\| := \max\{\Delta x_k,\ 1 \leq k \leq n\}.$$

Definição 1.3. *Dizemos que a partição* $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_1, \cdots, x_n\}$ *foi* ***marcada*** *se escolhemos um ponto (ou* ***marca****)* t_k *em cada subintervalo* $I_k = [x_{k-1}, x_{k-1}]$. *Denotaremos por* $\dot{\mathcal{P}}$ *esta partição marcada, e usaremos a mesma notação* $\|\dot{\mathcal{P}}\|$ *para a norma desta partição.*

Definição 1.4. *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *e* $\dot{\mathcal{P}}$ *é uma partição marcada de* $[a, b]$, *definimos a* ***soma de Riemann*** *de* f *relativa a* $\dot{\mathcal{P}}$ *por*

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$

Podemos agora definir a integral de Riemann.

Definição 1.5. *Dizemos que a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é* ***Riemann inegrável*** *no intervalo* $[a, b]$ $\dot{\mathcal{P}}$ *se existir um nḿero real* L *tal que para qualquer* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que a* ***soma de Riemann*** *de* f *relativa a qualquer partição marcada* $\dot{\mathcal{P}}$*, com* $\|P\| < \delta$ *satisfaz*

$$\|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L\| < \epsilon.$$

Usaremos a notação $f \in \mathcal{R}[a, b]$*, nesse caso.*

É usual dizer que a integral de Riemann é o ‘limite das somas de Riemann‘. Deve ser lembrado, porém que este é um limite no sentido dado pela definição 1.5 , não no sentido de limites para funções reais. Algumas propriedades, entretanto, são similares. Em particular, temos a unicidade da integral de Riemann, quando ela existe.

Proposição 1.6. *Se* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *então o valor da integral é único.*

Dem.

□

Se $f \in f \in \mathcal{R}[a,b]$ usamos as notações:

$$\int_a^b f,\ \int_a^b f(x)\,d\,x,\ \int_a^b f(t)\,d\,t,$$

(A varivél usada na integração é, obviamente, irrelevante).

Exemplos 1.7. *1) Se $f(x) = k$ em $[a,b]$, então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,d\,x = k(b-a)$.*

2) Se $f(x) = \begin{cases} 2, & se\ x \in [0,1] \\ 3, & se\ x \in]1,3] \end{cases}$ então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,d\,x = 8$.

3) Se $f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & se\ x \in [0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ *então* $f \notin \mathcal{R}[a,b]$.

1) Se $f(x) = x^2$ *em* $[0,1]$, *então* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *e* $\int_a^b f(x)\,d\,x = 1/3$.

Nesse caso, é dificil mostrar que $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *diretamente da definição. Admitindo este fato, podemos calcular a integral, usando uma sequência especial de particões marcadas* $\dot{\mathcal{P}}$ *definida por* $x_i = i/n$ *e marcas* $t_i = x_i$. *Para isto vamos usar a fórmula da soma dos n primeiros quadrados:* $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n^3/3 + n^2/3 + n/6$.

De fato, uma vez calculado o valor da integral por este método, é possível agora mostrar que a integral, de fato, tem esse valor, mostrando que o valor da soma de Riemann, usando qualquer partição marcada com norma suficiente pequena fica arbitrariamente próxima de uma desse tipo. Mas não faremos isto aqui.