

PME 3222

**Bombas**

Alberto Hernandez Neto

# Bombas

Máquinas hidráulicas que adicionam energia ao fluido (líquido)

Características principais:

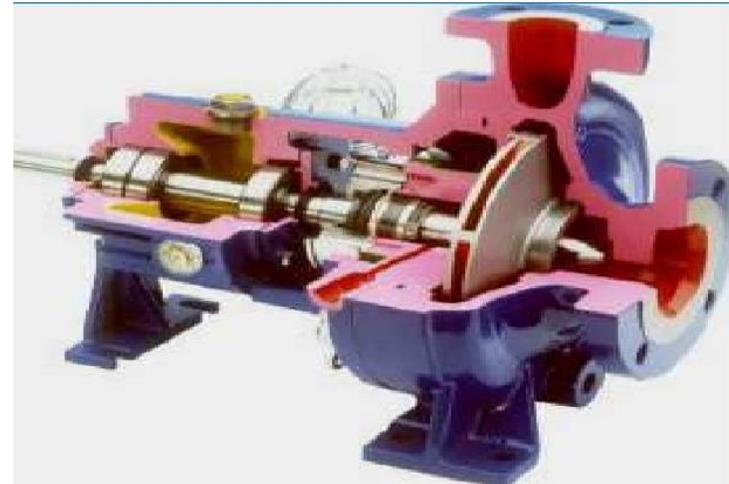
- Alta densidade de potência
- Poucas partes móveis
- Eficiência razoável  $80 \rightarrow 90 \%$

Tipos:

- Deslocamento positivo (estáticas)
- Turbobombas (dinâmicas)

# Bombas

- Deslocamento positivo: fluido é forçado para dentro ou para fora por uma mudança de volume de uma câmara
- Turbobombas: presença de um rotor que quando gira adiciona energia ao fluido



# Bombas de deslocamento positivo

(a) Pistão recíproco

(b) Engrenagens

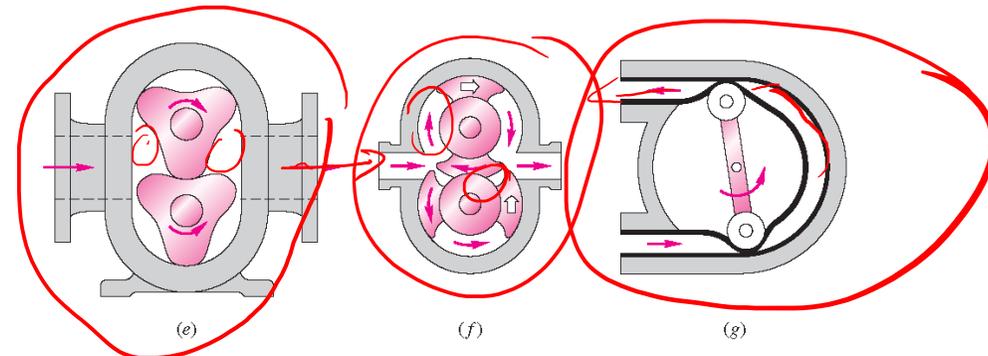
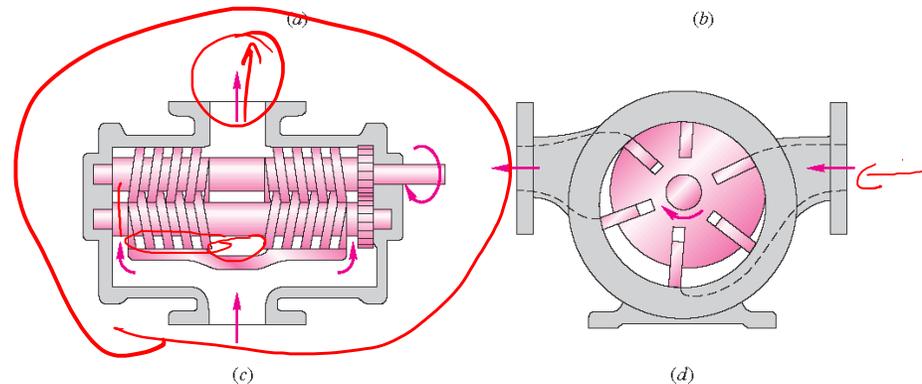
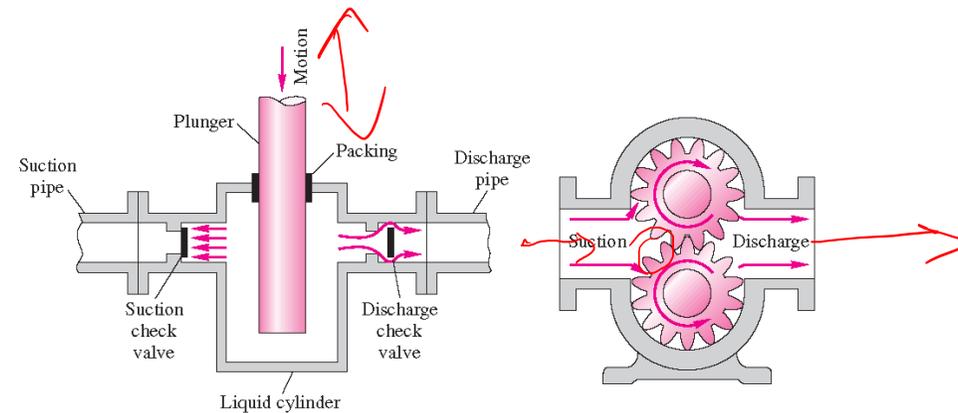
(c) Parafuso duplo

(d) Palhetas

(e) Lóbulos

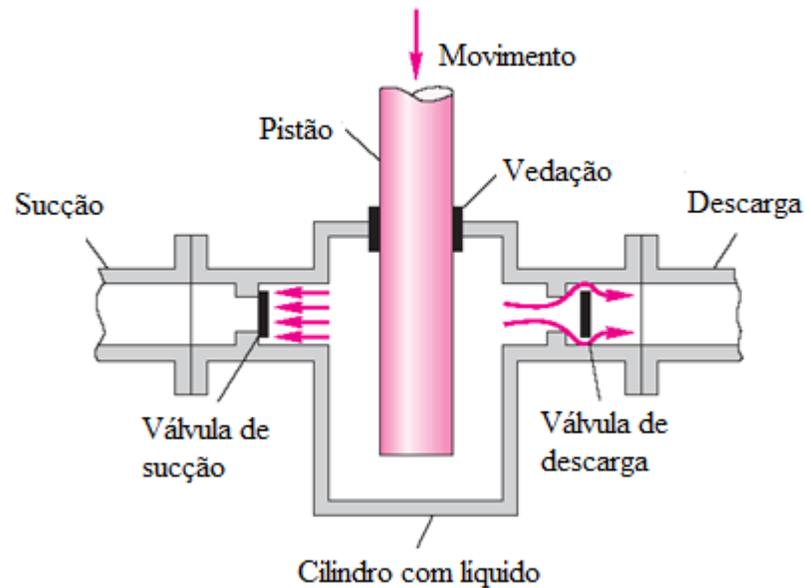
(f) Pistão duplo circunferencial

(g) Tubo flexível



# Bombas de deslocamento positivo

## Pistão recíproco



Alto rendimento

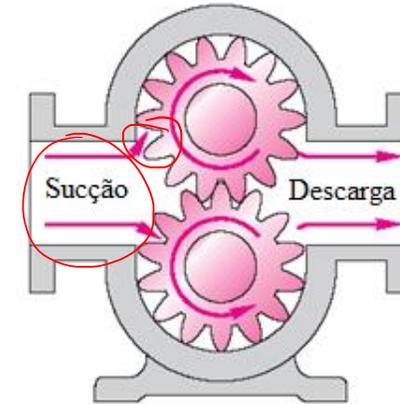
Pressões: máximo de 450 bar

Uso: prensas, máquinas injetoras, extrusoras, máquinas da linha amarela, perfuratrizes, linha de concretagem, movimentação de cargas

# Bombas de deslocamento positivo

## Engrenagens

Tipo de Bomba	Engrenagem Interna	Engrenagem Externa
Características		
Número de Mancais	2	4
Contato com Produto Bombeado	Não	Sim
Quando Desgastada:	Substitua Apenas as Partes Rotativas e o Cabeçote	Substitua por uma Bomba Nova
Opera com Produtos Contaminados, Abrasivos, ou de Alta Viscosidade?	Sim	Não
Opera com Produtos de baixa Viscosidade e Pouca Lubricidade?	Sim	Não
Ajuste de Folga Axial	Sim	Não
Eficiência do Bombeamento	Alta	Baixa
Vedação/Nível de Confiabilidade	Selo Mecânico/Alto	Gaxetas/Baixo
Nível de Ruído	Baixo	Alto



## Aplicações:

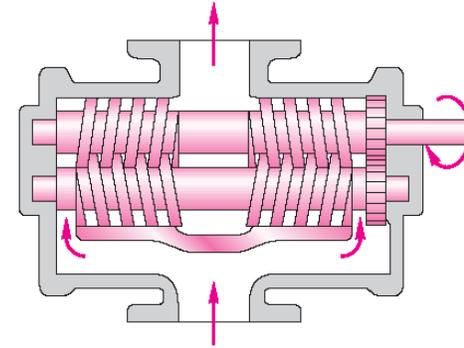
- Bombeamento de Óleos
- Lubrificação de Equipamentos Rotativos
- Dosagem em Processos Industriais
- Sistemas de Filtragem de Óleos
- Recalque de Óleo Solúvel
- Drenagem de Resíduos Oleosos
- Transferência de Resinas e Polímeros
- Transferência e Dosagem de Melaço
- Alimentação de Filtros-Prensa

## Bombas de deslocamento positivo

### Parafuso duplo

#### Características:

- Capacidade: até 1000m<sup>3</sup>/h
- Pressões: de 25 bar a 50 bar
- Configurações de rolamentos internos ou externos
- Montagem horizontal ou vertical



#### Aplicações típicas:

Petróleo

Betume, asfalto

Óleo combustível

Combustível de aviação

Bombeamento de água doce / salgada/

águas oleosas / água suja

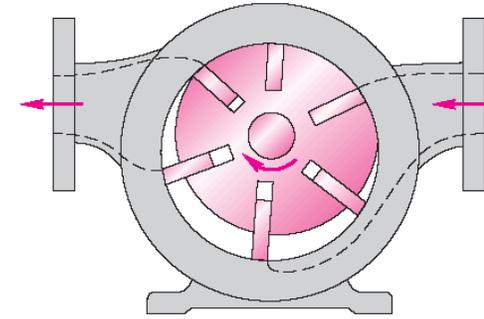
Lavagem de tocha

Injeção de espuma contra incêndio

Evacuação de lastro/líquidos em tubulações

## Bombas de deslocamento positivo

### Palhetas

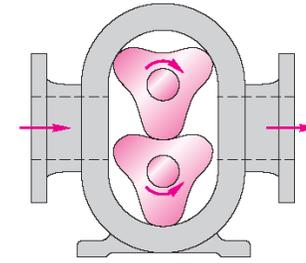


### Aplicações:

- Alta pressão: bombas de direção assistida e câmbio automático; frenagem em caminhões grandes
- Média pressão: carbonadores de dosadores de refrigerantes e máquinas de café espresso
- Baixa pressão: aplicações de gás para controle de emissão de exaustão, evacuação de fluido refrigerante em condicionadores de ar
- Aviões leves: instrumentos de voo giroscópios, o horizonte artificial e indicador de rumo

# Bombas de deslocamento positivo

## Lóbulos



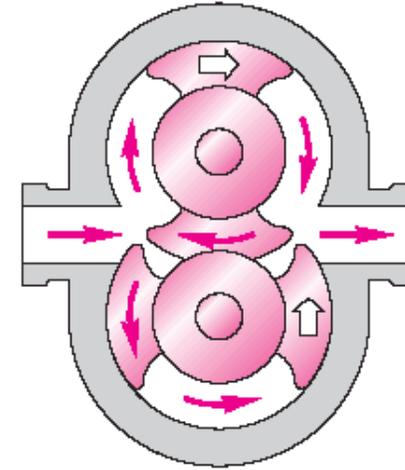
- Princípio de funcionamento: similar ao da bomba de engrenagens
- Produto é transportado no espaço entre lóbulos (que podem ser de asa dupla ou tripla), acionados por dois rotadores
- Bombeamento suave, com fluxo linear e sem pulsação, ideal para fluidos sensíveis ao cisalhamento ou que não podem sofrer processo de emulsificação durante o bombeamento

### Aplicações:

Transporte de fluidos muito viscosos, como adesivos, lodos, óleos, massas alimentícias, pomadas e melaços

## Bombas de deslocamento positivo

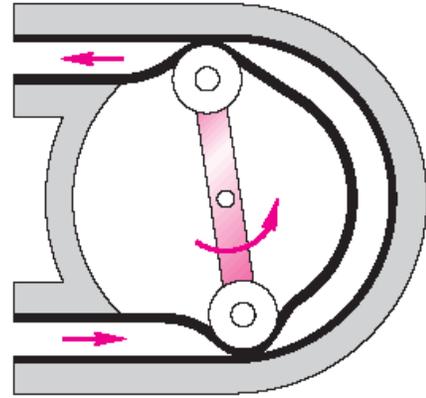
### Pistão duplo circunferencial



- Movimentação de substâncias na indústria cosmética, farmacêutica e a alimentícia
- Isolamento dos produtos do contato externo, evitando contaminação
- Bombeamento suave, evitando alteração das propriedades físicas

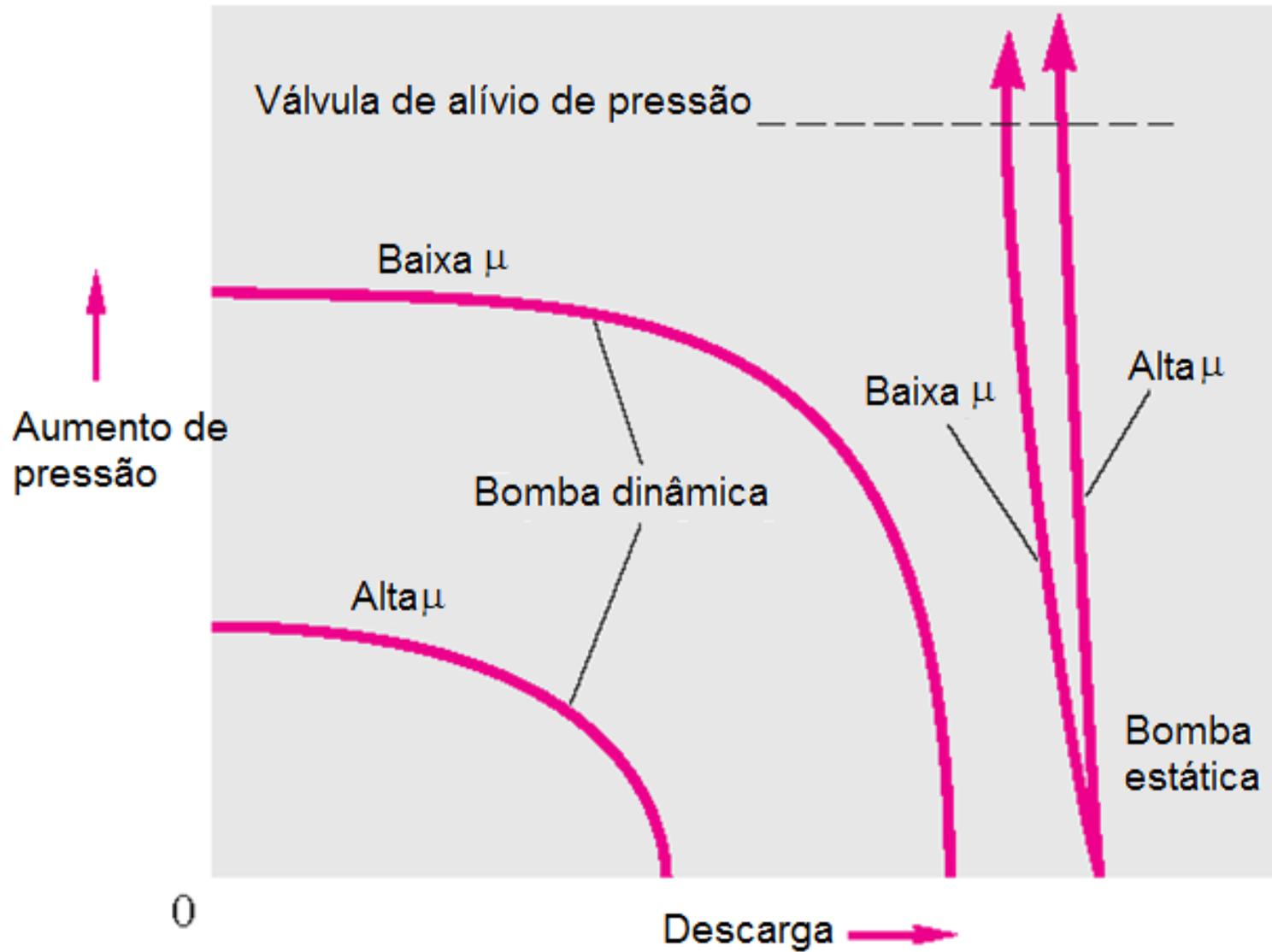
## Bombas de deslocamento positivo

### Tubo flexível (bomba de perfusão)

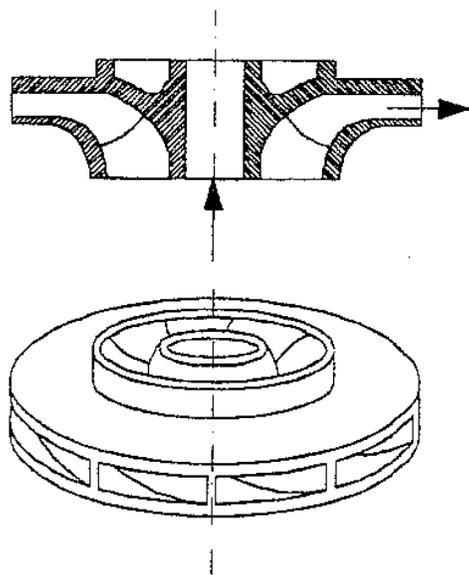


- Mecanismo: rotativo ou linear
- Acionamento: motor de passos com redutor e comandado por um circuito eletrônico de precisão
- Vazão : de 0,5 mililitros por hora até 1 litro por hora e quantidades de 1 ml até 10 litros
- Aplicações médicas

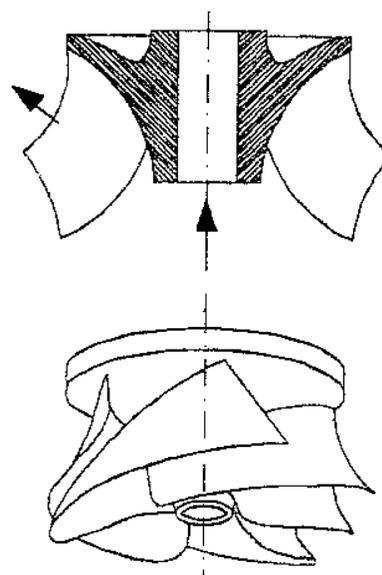
# Comparação entre bombas estáticas e dinâmicas



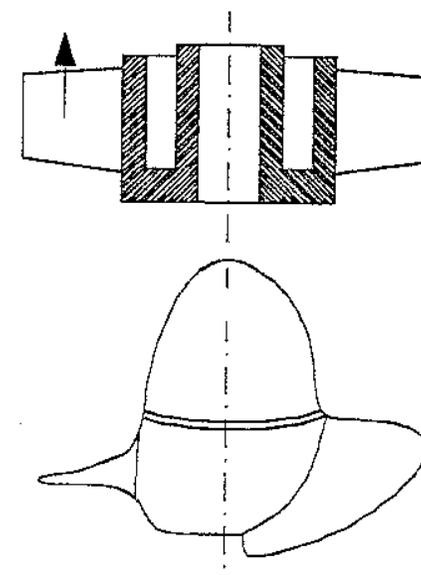
# Classificação das turbobombas quanto à direção principal do escoamento



Radial



Misto

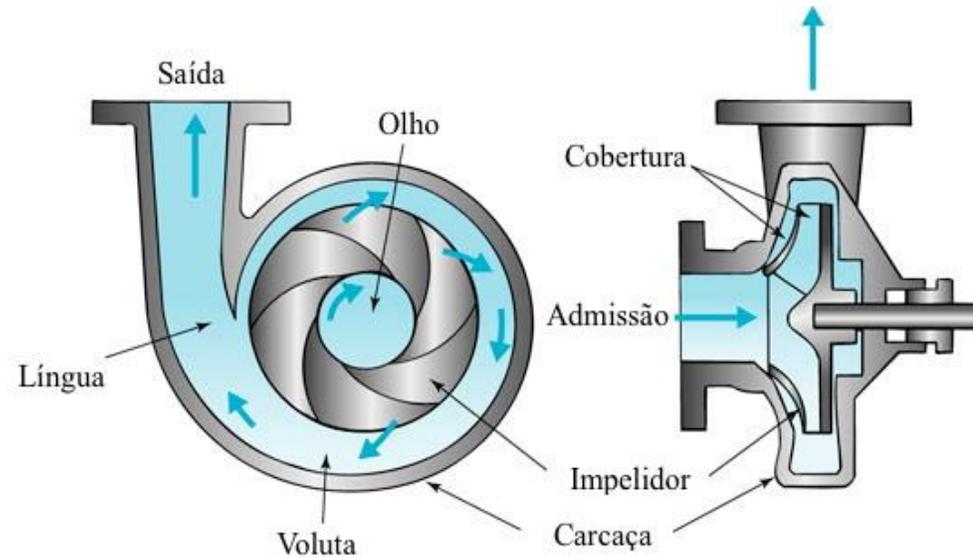


Axial

# Bomba centrífuga

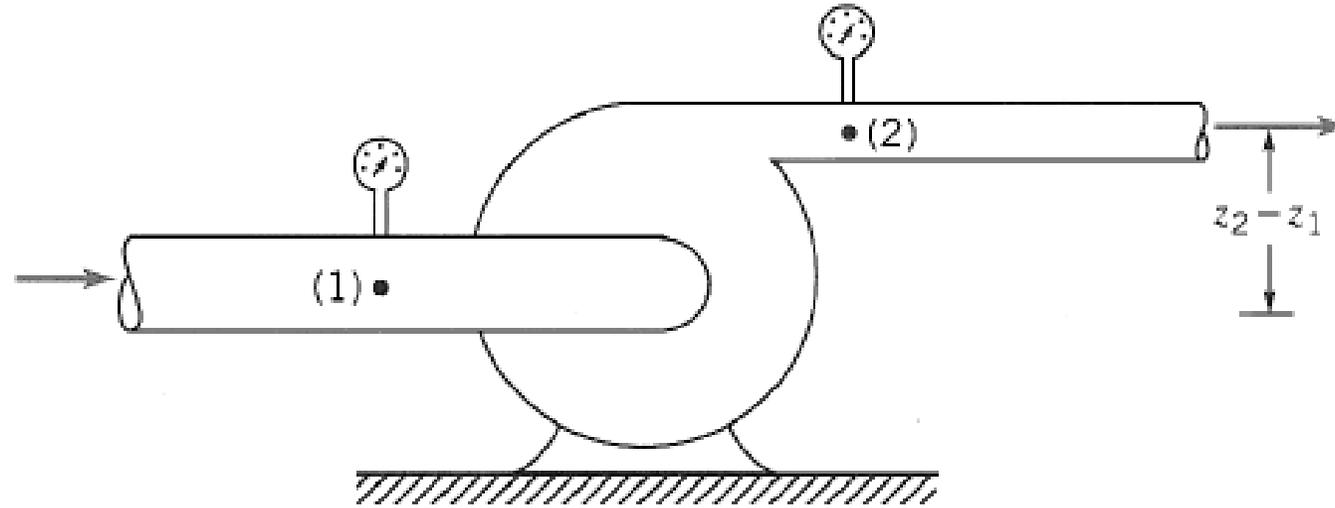
Dois componentes principais:

- Rotor montado em eixo
  - Carcaça (voluta) que envolve o rotor
- 
- Rotores podem ser:
    - Abertos
    - Fechados
    - Simples
    - Dupla sucção
    - Múltiplos estágios



## Análise energética

$\dot{Q}$

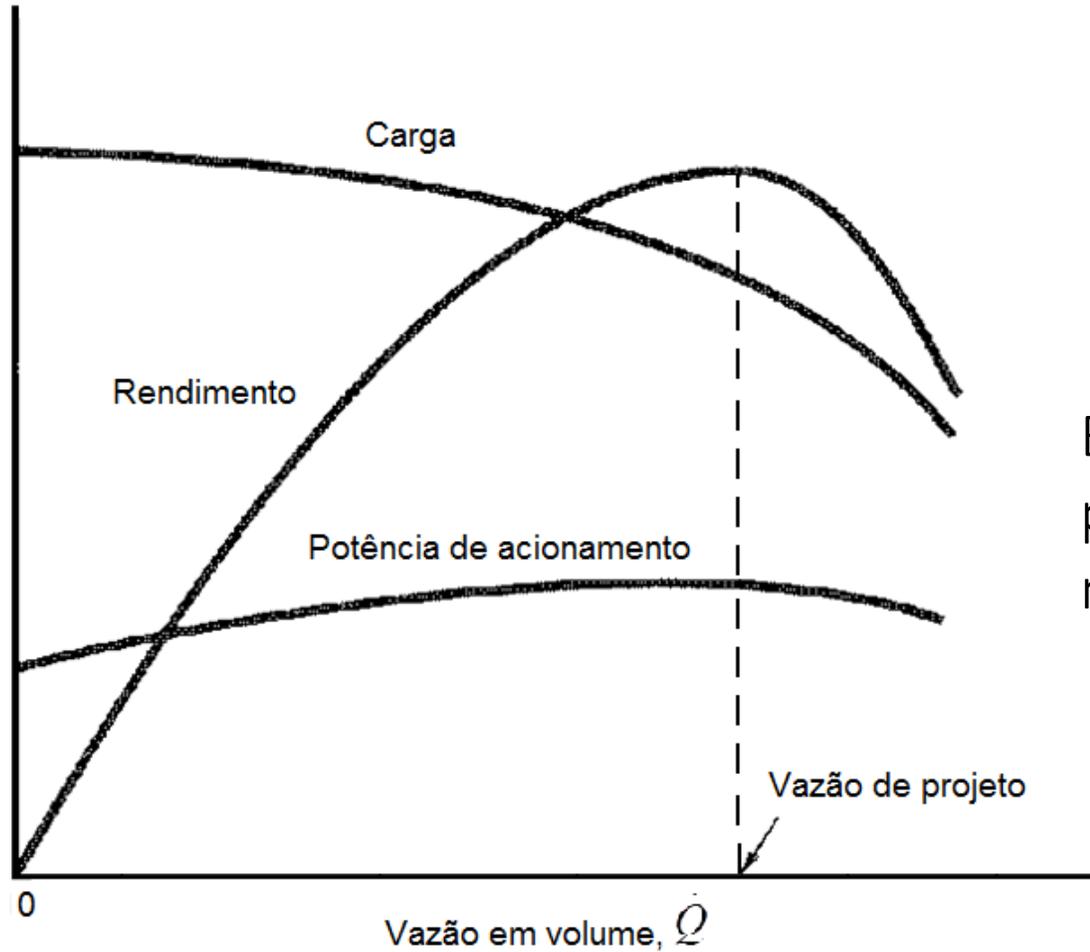


$$h_r = h_e - h_L = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha \bar{V}_2^2}{2g} + z \right)_2 - \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha \bar{V}_2^2}{2g} + z \right)_1$$

Potência:  $\dot{W}_f = \gamma \dot{Q} h_r$

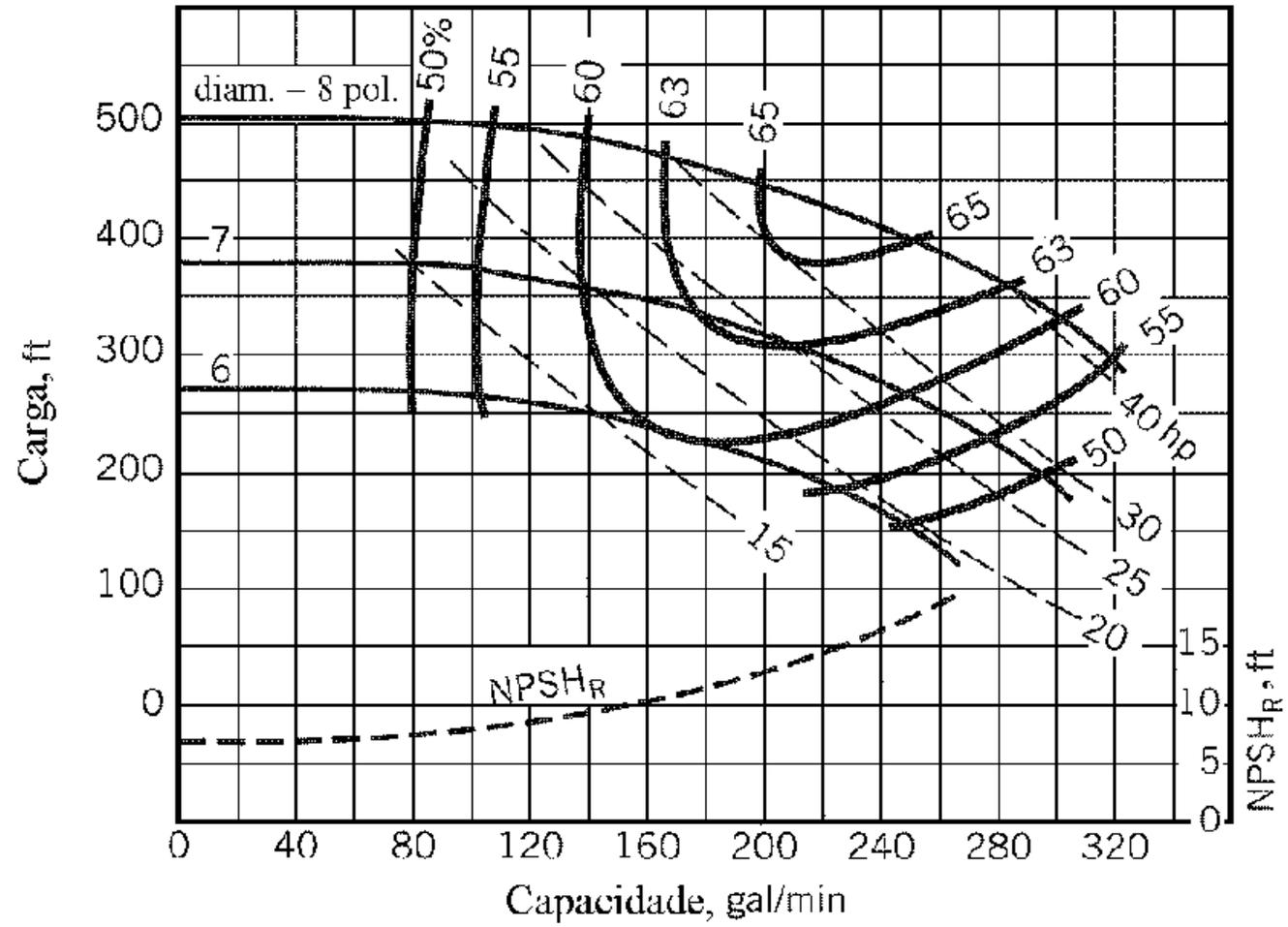
Rendimento:  $\eta = \frac{\dot{W}_f}{\dot{W}_m} = \frac{\gamma \dot{Q} h_r}{\omega T}$

# Curva característica



BEP: best efficiency point = ponto de rendimento máximo

# Curva característica



## NPSH (Net Positive Suction Head)

Parâmetro a ser verificado para evitar a cavitação na entrada da bomba

$$NPSH = \frac{p_s}{\gamma} + \frac{\bar{V}_s^2}{2g} - \frac{p_v}{\gamma}$$

$NPSH_R$  ( NPSH requerido):

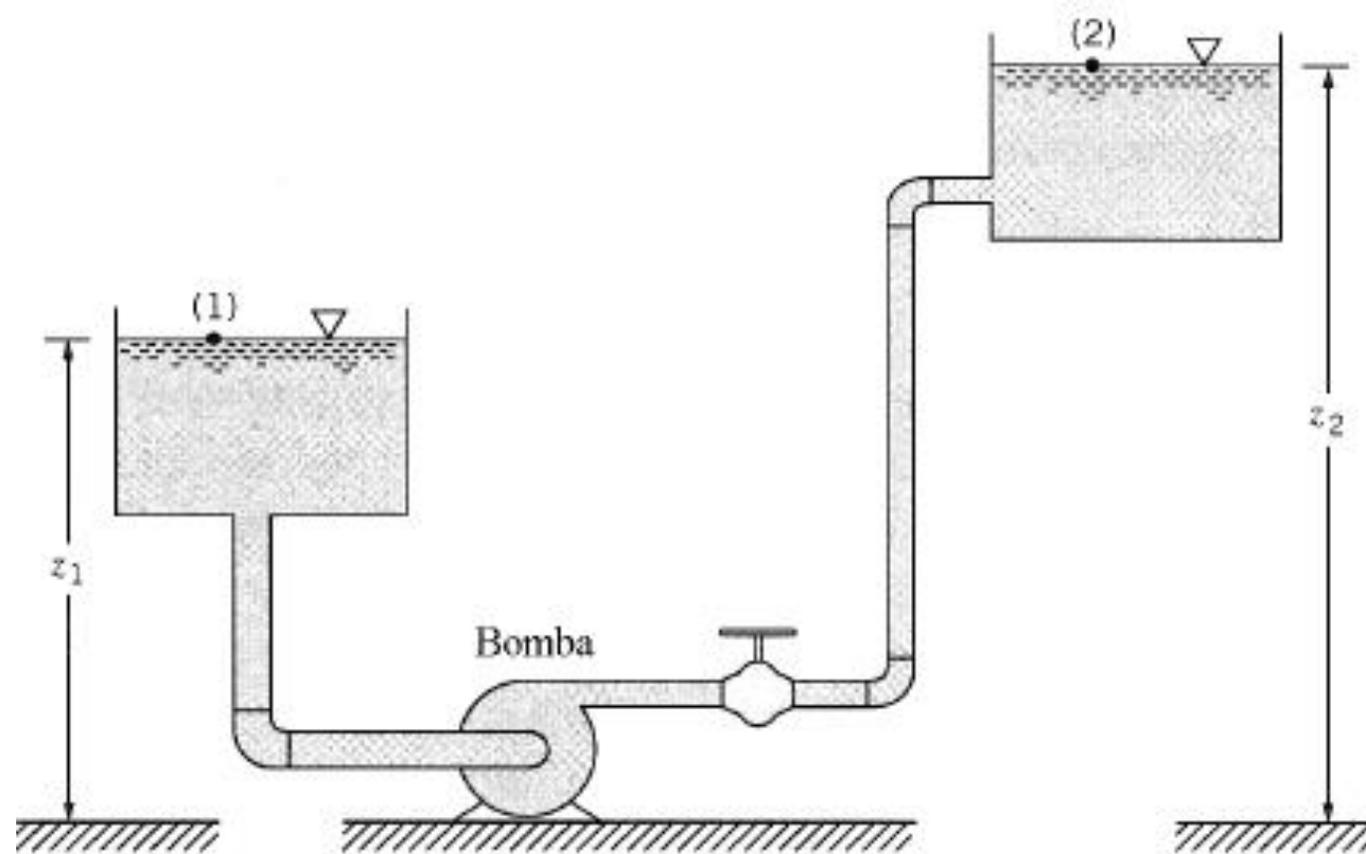
- Deve ser mantido ou excedido para que não ocorra a cavitação
- Variável com vazão
- Determinação experimental

$NPSH_D$  ( NPSH disponível):

- Carga que realmente ocorre

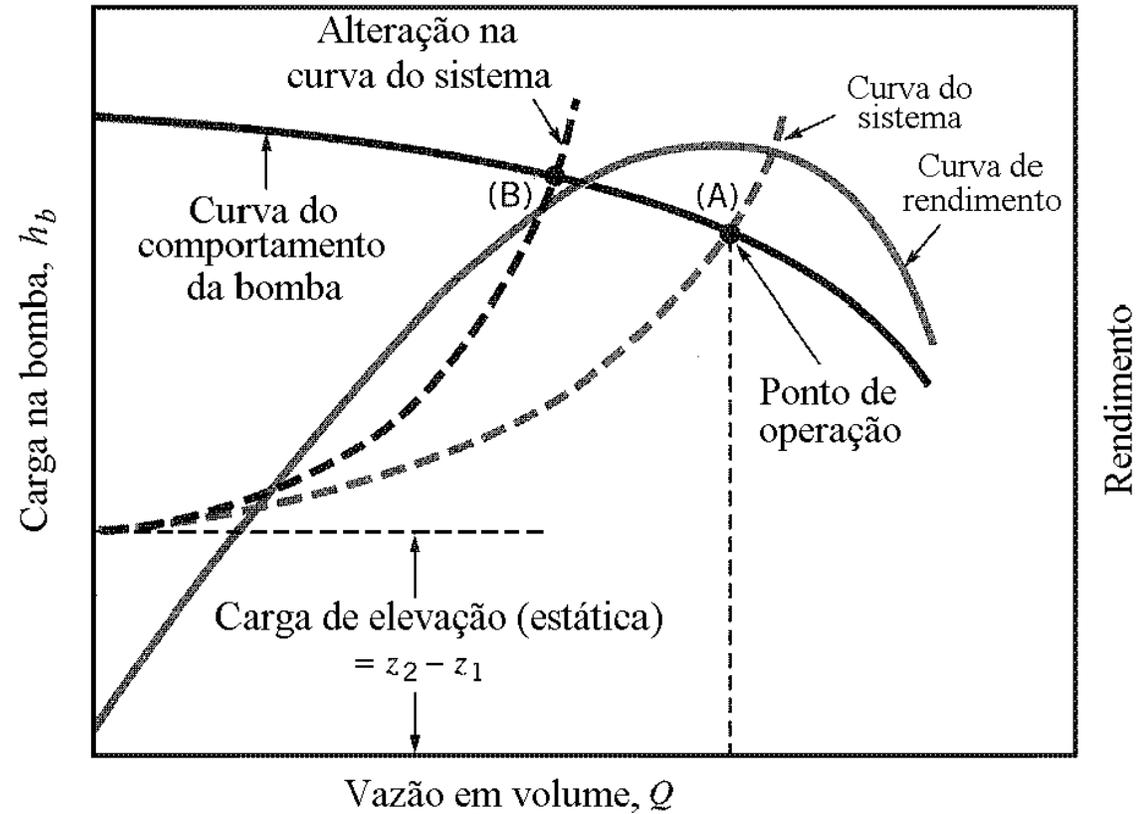
$$NPSH_D \geq NPSH_R$$

## Característica do sistema e seleção da bomba



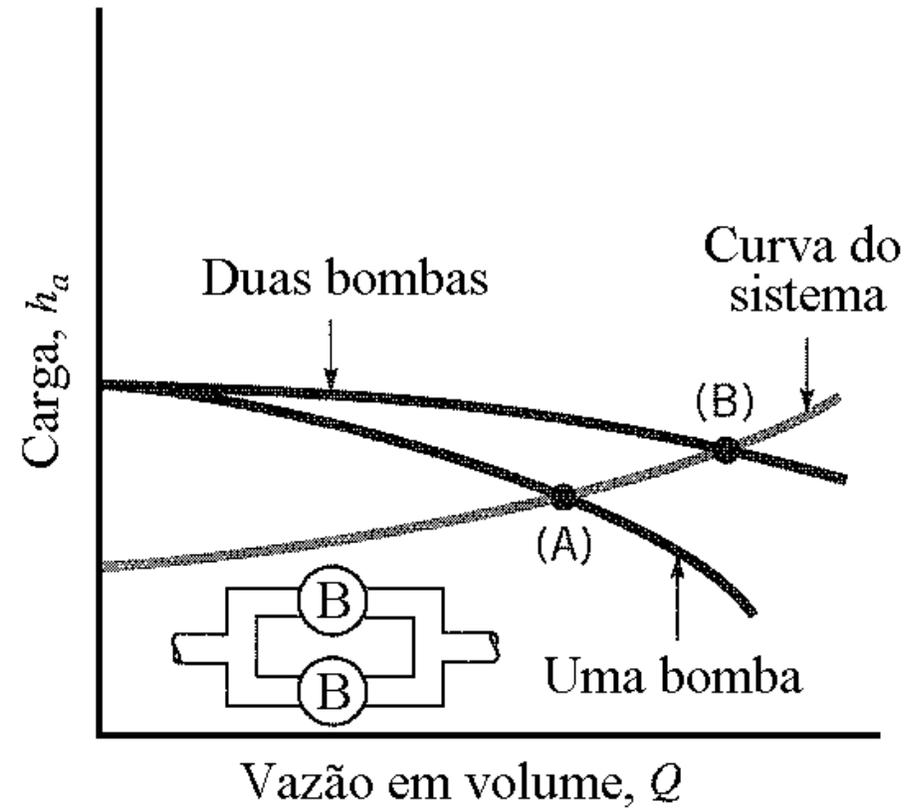
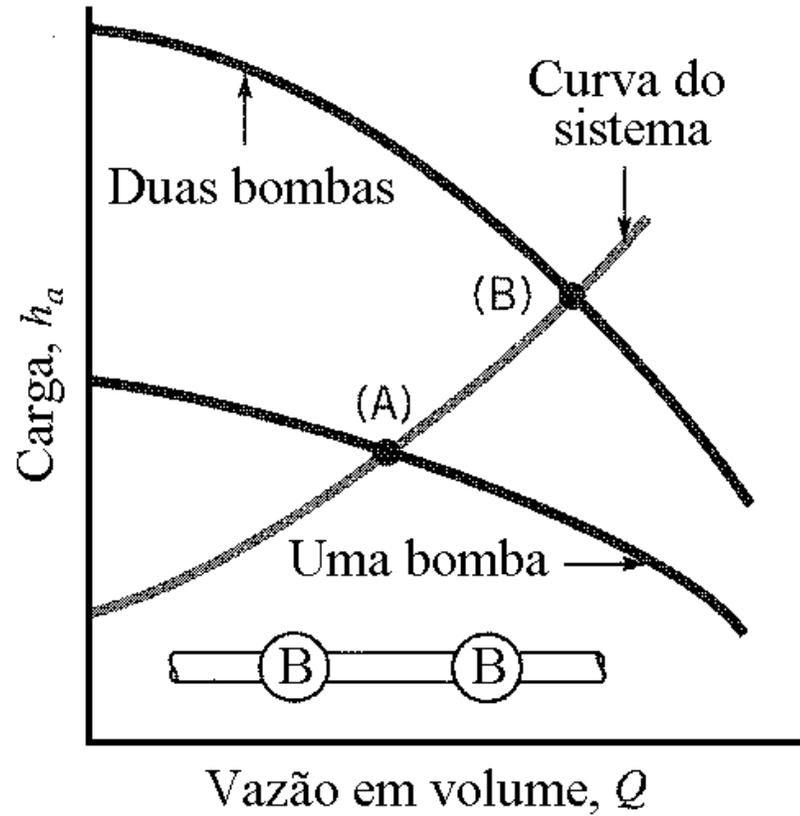
$$h_b = z_2 - z_1 + h_{LT} \approx z_2 - z_1 + K\dot{Q}^2$$

## Característica do sistema e seleção da bomba



- Controle da vazão pode ser feito pela rotação ou pela perda de carga
- As bombas podem ser arranjadas em série ou em paralelo para fornecer maior carga ou vazão, respectivamente

## Arranjos em série e paralelo



## Parâmetros adimensionais e leis de semelhança

$$f(\rho, \mu, D, N, \dot{Q}, E, \dot{W}_m) = 0$$

$\rho$ : massa específica

$\dot{Q}$ : vazão volumétrica

$\mu$ : viscosidade dinâmica  
do fluido

$\dot{W}_m$ : potência consumida pela bomba

$D$ : diâmetro do rotor da  
bomba

$E = gh_r$ : energia por unidade de massa  
fornecida ao fluido

$N$ : rotação do rotor

$$\left( \frac{gh_r}{N^2 D^2}, \frac{\dot{Q}}{ND^3}, \frac{\dot{W}_m}{\rho N^3 D^5}, \frac{\rho ND^2}{\mu} \right) = 0$$

## Parâmetros adimensionais e leis de semelhança

$$\Pi_1 = \frac{gh_r}{N^2 D^2} = C_H: \text{coeficiente manométrico}$$

$$\Pi_2 = \frac{\dot{Q}}{ND^3} = C_Q: \text{coeficiente de vazão}$$

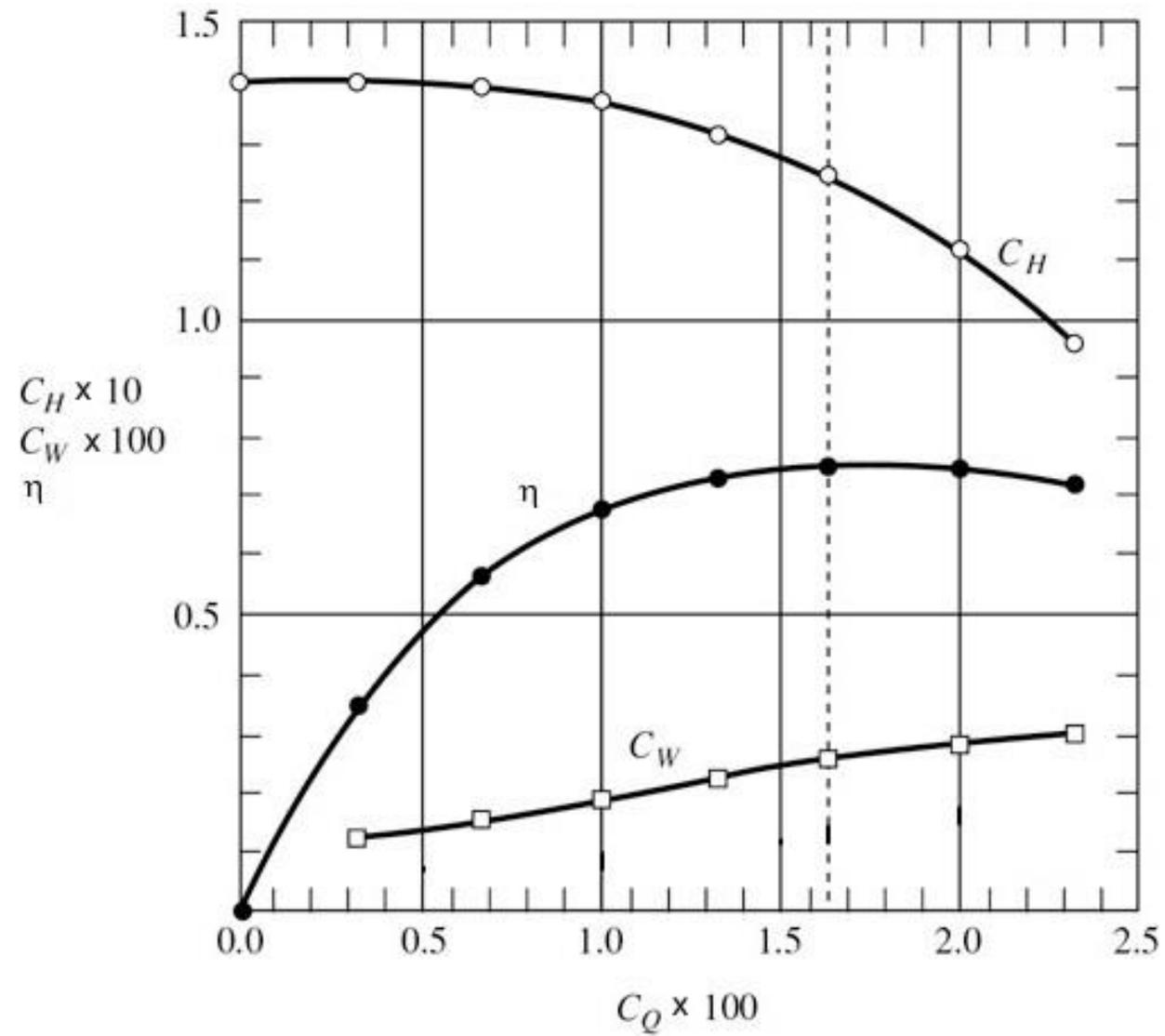
$$\Pi_3 = \frac{\dot{W}_m}{\rho N^3 D^5} = C_{\dot{W}}: \text{coeficiente de potência}$$

$$\Pi_4 = \frac{\rho ND^2}{\mu} = \text{Re}: \text{número de Reynolds}$$

$$\Pi'_3 = \frac{C_{\dot{W}}}{C_{\dot{Q}} C_H} = \eta$$

Máquinas hidráulicas operam em Re elevado  $\longrightarrow$  Baixa influência de Re  $\longrightarrow$  Análise restrita a  $C_H$ ,  $C_Q$  e  $\eta$

# Curvas representativas



## Leis especiais de semelhança

Mantidos  $C_Q$  e  $D$ , temos:

$$\frac{\dot{Q}_1}{\dot{Q}_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \frac{h_{r1}}{h_{r2}} = \frac{N_1^2}{N_2^2} \quad \frac{\dot{W}_{m,1}}{\dot{W}_{m,2}} = \frac{N_1^3}{N_2^3}$$

Mantidos  $C_Q$  e  $N$ , temos:

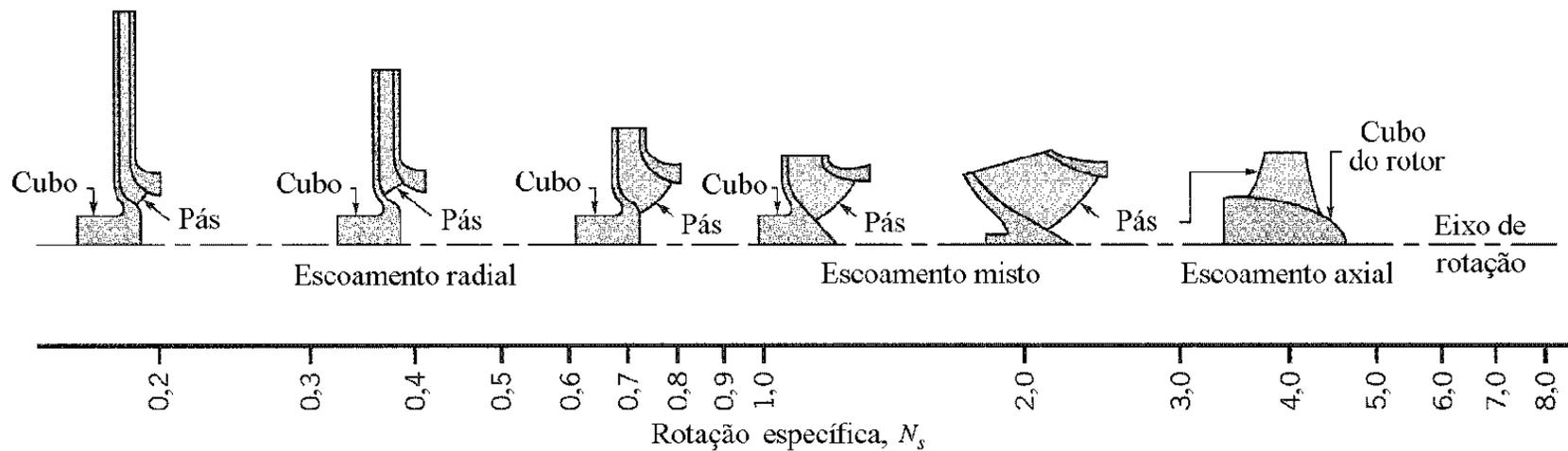
$$\frac{\dot{Q}_1}{\dot{Q}_2} = \frac{D_1^3}{D_2^3} \quad \frac{h_{r1}}{h_{r2}} = \frac{D_1^2}{D_2^2} \quad \frac{\dot{W}_{m,1}}{\dot{W}_{m,2}} = \frac{D_1^5}{D_2^5}$$

## Rotação específica

$$N_s = \frac{C_{\dot{Q}}^{1/2}}{C_H^{3/4}} = \frac{[\dot{Q}/(ND^3)]^{1/2}}{[gh_r/(N^2D^2)]^{3/4}} = \frac{N\sqrt{\dot{Q}}}{(gh_r)^{3/4}}$$

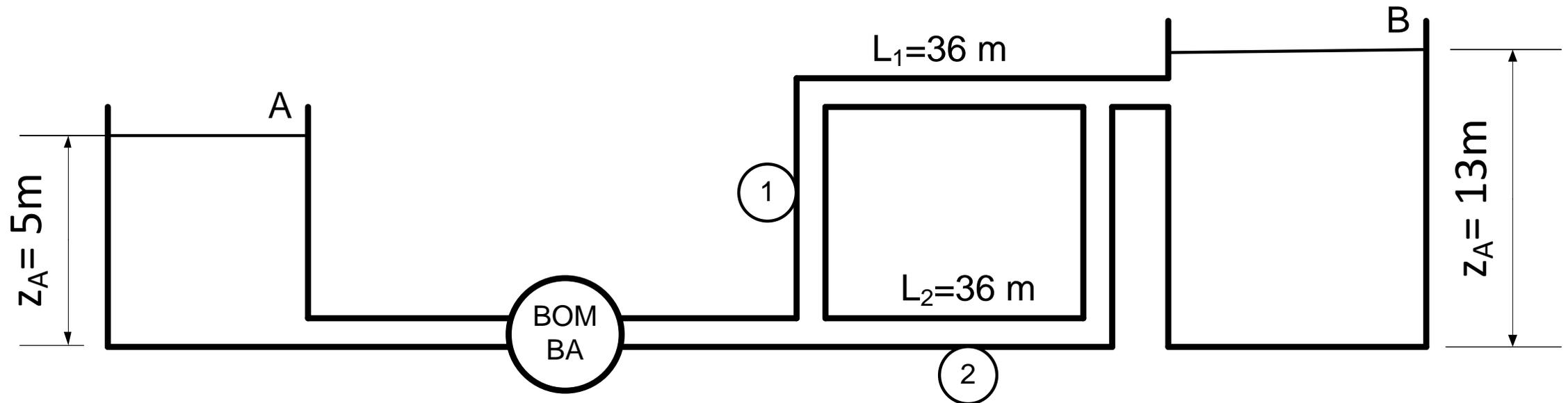
$$N_s \uparrow \begin{cases} \dot{Q} \uparrow \\ h_r \downarrow \end{cases}$$

$$N_s \downarrow \begin{cases} \dot{Q} \downarrow \\ h_r \uparrow \end{cases}$$



## Exercício 01

O sistema mostrado na figura movimenta água a  $20^{\circ}\text{C}$  entre os dois reservatórios por meio de 2 tubos de aço laminado com cada um dos tubos com 36 m de comprimento e em arranjo em paralelo. O trecho 1 tem diâmetro de 4 cm e o trecho 8 cm. Sabendo-se que o conjunto motor-bomba tem um rendimento de 70% e consome uma potência de 8 kW. Desprezando as perdas singulares, determine a vazão total entre os dois reservatórios e a vazão em cada trecho.



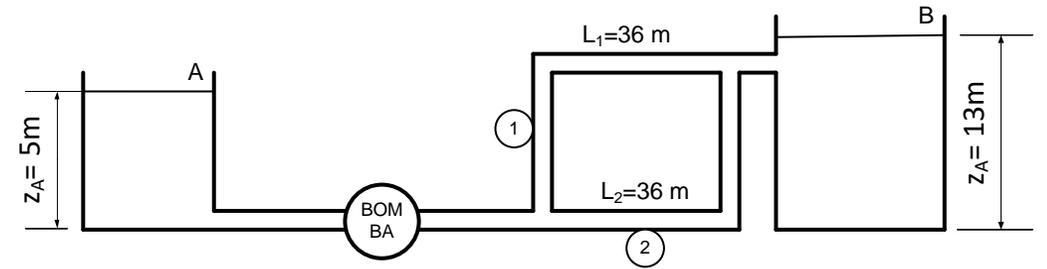
## Exercício 01

### Hipóteses:

- Regime permanente
- escoamento turbulento ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ )
- escoamento incompressível ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ )
- Reservatórios com níveis constantes ( $V_1 = V_2 = 0$ )
- Perdas singulares e perdas de trechos curtos desprezíveis
- Não há turbinas ( $h_{\text{turbina}} = 0$ )

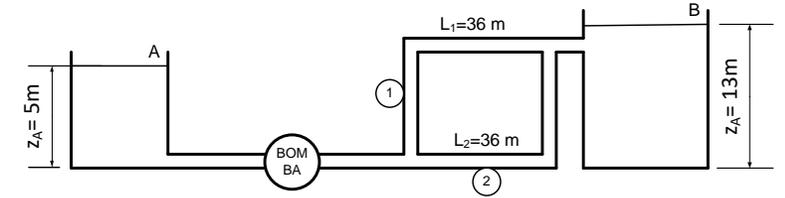
### Dados:

- Água a 20°C:  $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$  e  $\mu = 1,002 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$
- $\varepsilon = 0,00045 \text{ m}$



## Exercício 01

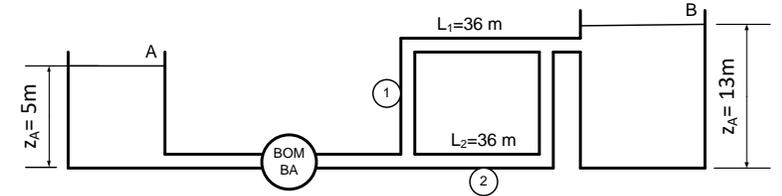
Aplicando a equação da energia entre as seções (1) e (2)



$$\frac{p_1}{\gamma_1} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + z_1 + h_{bomba} = \frac{p_2}{\gamma_2} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 + h_{turbina} + h_L$$

$$\left. \begin{aligned} h_{bomba} &= \frac{\dot{W}_{fluido}}{\gamma \dot{Q}} \\ \eta_{bomba} &= \frac{\dot{W}_{fluido}}{\dot{W}_{motor}} \end{aligned} \right\} \eta_{bomba} = \frac{\gamma \dot{Q} h_{bomba}}{\dot{W}_{motor}} \longrightarrow h_{bomba} = \frac{\eta_{bomba} \dot{W}_{motor}}{\gamma \dot{Q}}$$

## Exercício 01

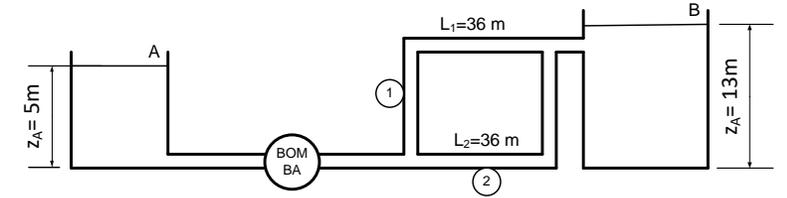


$$z_1 + \frac{\eta_{bomba} \dot{W}_{motor}}{\gamma \dot{Q}} = z_2 + h_L \quad \longrightarrow \quad \dot{Q} = \frac{\eta_{bomba} \dot{W}_{motor}}{\gamma (z_2 - z_1 + h_L)}$$

$$h_L = f \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{\bar{V}^2}{2g} = \sum_{i=0}^N h_{d,i} + \sum_{j=0}^M h_{s,j} \quad \sum_{j=0}^M h_{s,j} = 0 \text{ (perdas singulares desprezíveis)}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^N h_{d,i} &= \sum_{i=0}^N f_i \cdot \frac{l_i}{D_i} \cdot \frac{\bar{V}_i^2}{2g} = f_1 \cdot \frac{l_1}{D_1} \cdot \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + f_2 \cdot \frac{l_2}{D_2} \cdot \frac{\bar{V}_2^2}{2g} \\ \dot{Q}_1 &= \bar{V}_1 A_1 \quad \longrightarrow \quad \bar{V}_1 = \frac{\dot{Q}_1}{A_1} = \frac{4\dot{Q}_1}{\pi D_1^2} \quad \bar{V}_2 = \frac{4\dot{Q}_2}{\pi D_2^2} \end{aligned} \right\} h_L = f_1 \cdot \frac{l_1}{D_1} \cdot \frac{16\dot{Q}_1^2}{2g\pi^2 D_1^4} + f_2 \cdot \frac{l_2}{D_2} \cdot \frac{16\dot{Q}_2^2}{2g\pi^2 D_2^4}$$

## Exercício 01



Equações:

$$\dot{Q} = \frac{\eta_{bomba} \dot{W}_{motor}}{\gamma(z_2 - z_1 + h_L)} \quad (1)$$

$$h_L = f_1 \cdot \frac{16l_1 \dot{Q}_1^2}{2g\pi^2 D_1^5} + f_2 \cdot \frac{16l_2 \dot{Q}_2^2}{2g\pi^2 D_2^5} \quad (2)$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 \quad (3)$$

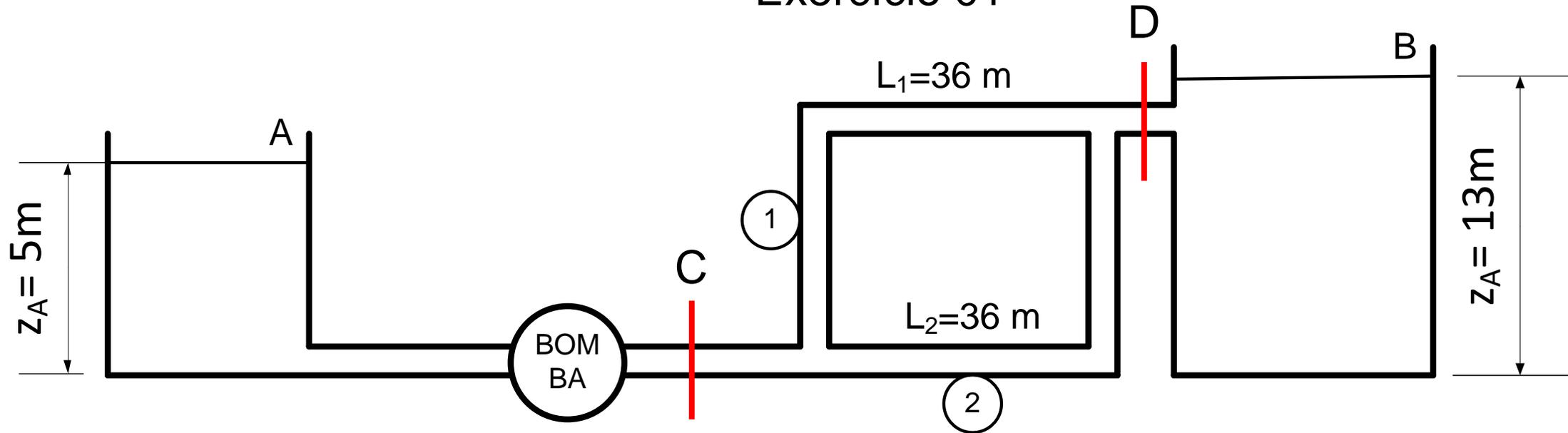
Variáveis:

$$\dot{Q}_1 \quad \dot{Q}_2$$

$$f_1 \quad f_2$$



## Exercício 01

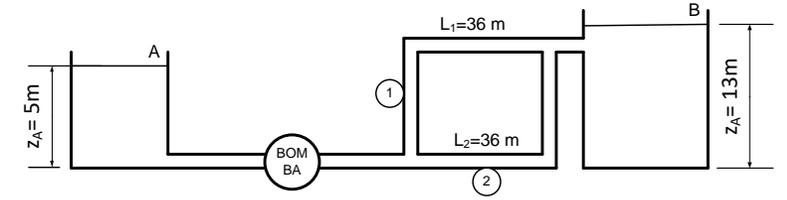


$$(H_C - H_D)_1 = (H_C - H_D)_2$$

$$f_1 \cdot \frac{16l_1 \dot{Q}_1^2}{2g\pi^2 D_1^5} = f_2 \cdot \frac{16l_2 \dot{Q}_2^2}{2g\pi^2 D_2^5}$$

$$\frac{f_1 l_1 \dot{Q}_1^2}{D_1^5} = \frac{f_2 l_2 \dot{Q}_2^2}{D_2^5} \quad (4)$$

## Exercício 01



Equações:

$$\dot{Q} = \frac{\eta_{bomba} \dot{W}_{motor}}{\gamma(z_2 - z_1 + h_L)} \quad (1)$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 \quad (3)$$

Variáveis:

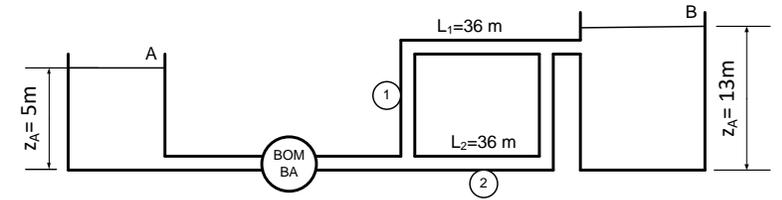
$$\dot{Q}_1 \quad \dot{Q}_2$$

$$f_1 \quad f_2$$

$$h_L = f_1 \cdot \frac{16l_1 \dot{Q}_1^2}{2g\pi^2 D_1^5} + f_2 \cdot \frac{16l_2 \dot{Q}_2^2}{2g\pi^2 D_2^5} \quad (2)$$

$$\frac{f_1 l_1 \dot{Q}_1^2}{D_1^5} = \frac{f_2 l_2 \dot{Q}_2^2}{D_2^5} \quad (4)$$

## Exercício 01



Processo de solução:

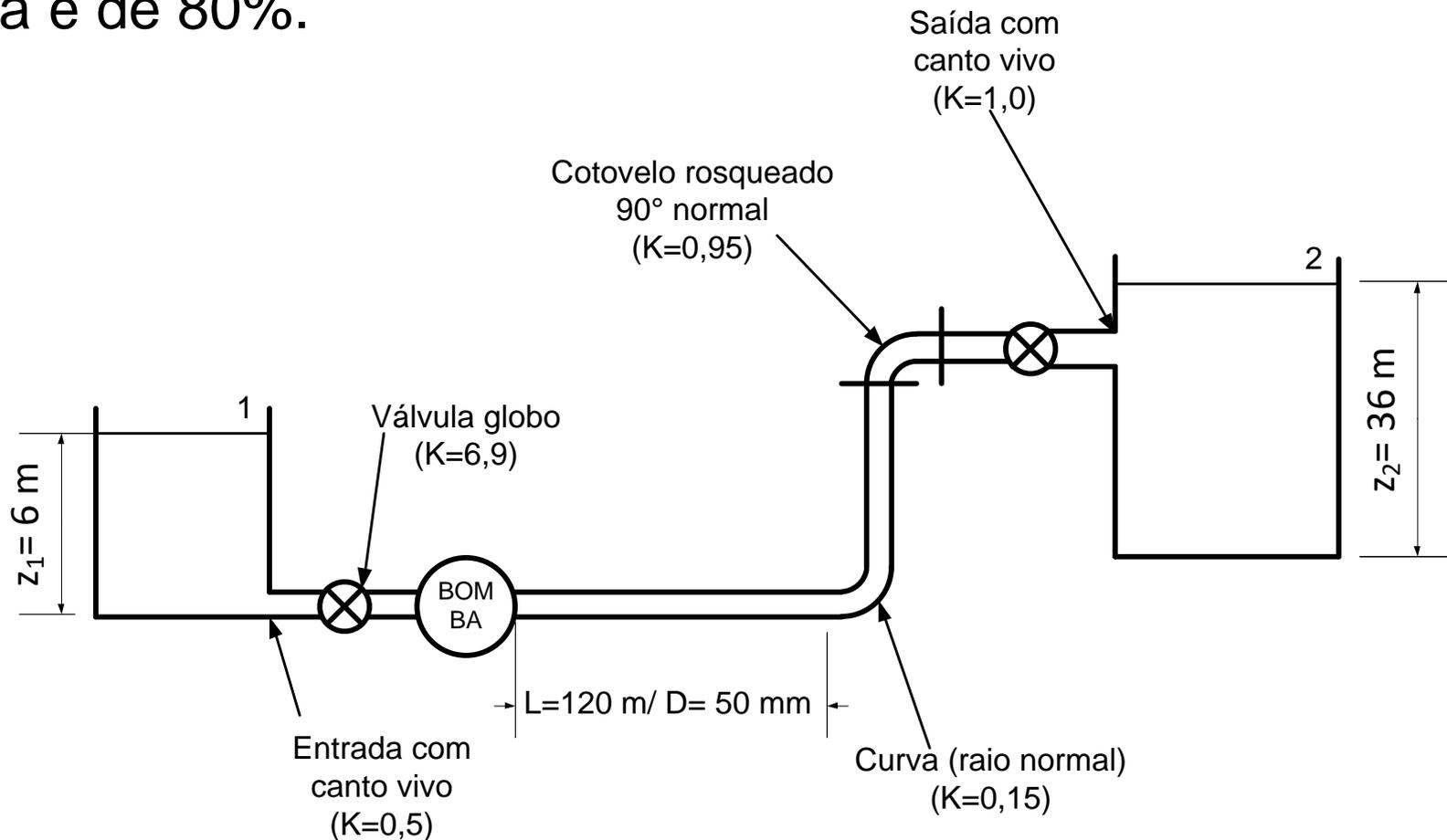
1. Admite  $f_1$  e  $f_2$  (escoamento completamente rugoso)
2. Com a equação (4) calcula a razão entre as vazões dos trechos 1 e 2
3. Substitui a razão nas equações (2) e (3)
4. Substitui os resultados na equação e avalia uma das vazões (trecho 1 ou 2)
5. Calcula o número de Reynolds para cada trecho e calcula  $f_1$  e  $f_2$
6. Compara com os valores calculados no passo 1
7. Se convergiu, encerra o processo
8. Se não convergiu, utiliza os novos valores de  $f_1$  e  $f_2$  e retorna ao passo 2

Solução final:

$$f_1 = 0,0211 \quad \dot{Q}_1 = 0,00415 \text{ m}^3/\text{s} \quad \dot{Q} = 0,03 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$f_2 = 0,0182 \quad \dot{Q}_2 = 0,02585 \text{ m}^3/\text{s}$$

## Exercício 02

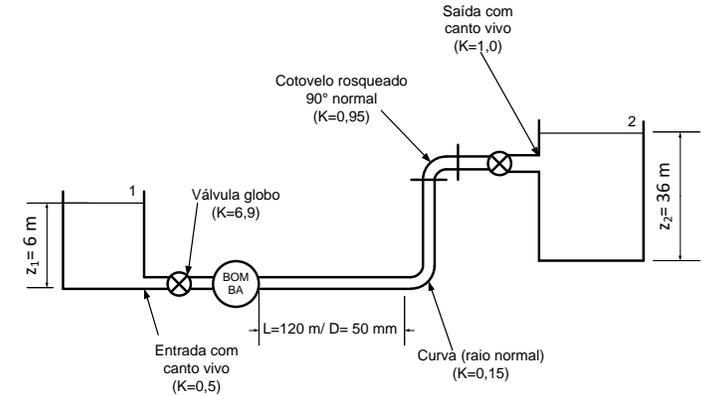
Água a  $20^{\circ}\text{C}$  é bombeada entre dois reservatórios (1) e (2) com uma vazão de  $6 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$  utilizando uma tubulação de aço trefilado conforme mostrado na figura. Calcule a potência requerida pelo conjunto motor-bomba sendo que a sua eficiência é de 80%.



## Exercício 02

### Hipóteses:

- Regime permanente
- escoamento turbulento
- Sem variação de propriedades
- Não há turbinas
- Reservatórios com superfície livre



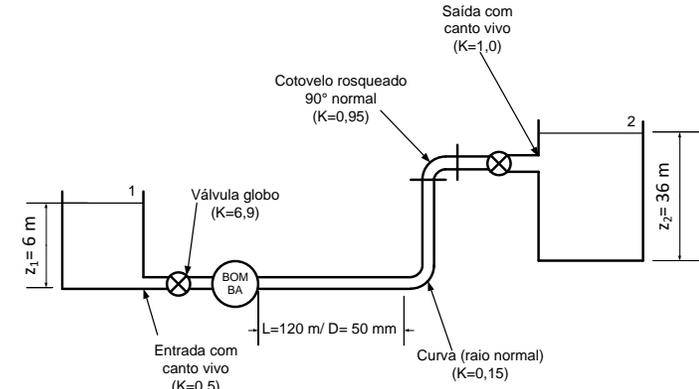
## Exercício 02

Aplicando a conservação de energia entre as seções (1) e (2):

$$\frac{p_1}{\gamma_1} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + z_1 + h_{bomba} = \frac{p_2}{\gamma_2} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 + h_{turbina} + h_L$$

$$h_{bomba} = (z_2 - z_1) + h_L$$

$$\left. \begin{aligned} h_{bomba} &= \frac{\dot{W}_{fluido}}{\gamma \dot{Q}} \\ \eta_{bomba} &= \frac{\dot{W}_{fluido}}{\dot{W}_{motor}} \end{aligned} \right\} \eta_{bomba} = \frac{\gamma \dot{Q} h_{bomba}}{\dot{W}_{motor}} \quad \longrightarrow \quad h_{bomba} = \frac{\eta_{bomba} \dot{W}_{motor}}{\gamma \dot{Q}}$$



## Exercício 02

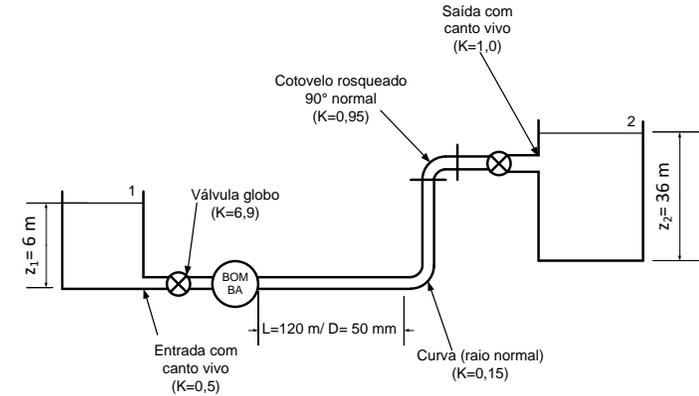
$$h_{bomba} = (z_2 - z_1) + h_L$$

$$h_{bomba} = \frac{\eta_{bomba} \dot{W}_{motor}}{\gamma \dot{Q}}$$

$$h_L = f \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{\bar{V}^2}{2g} = \sum_{i=0}^N h_{d,i} + \sum_{j=0}^M h_{s,j}$$

$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = \sum_{i=0}^N f_i \cdot \frac{l_i}{D_i} \cdot \frac{\bar{V}_i^2}{2g}$$

$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = \sum_{i=0}^N f_i \cdot \frac{l_i}{D_i} \cdot \frac{\bar{V}_i^2}{2g} = f \cdot \frac{\bar{V}^2}{2gD} \sum_{i=0}^N l_i$$



Para o cálculo do fator de atrito temos:

Tubos de aço trefilado:  
 $\varepsilon = 0,00005 \text{ mm}$   $\rightarrow \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,00005}{50 \times 10^{-3}} = 0,001$

Pela fórmula de Souza-Cunha-Marques:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,16}{\text{Re}} \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,09}{\text{Re}^{0,87}} \right) \right]$$

## Exercício 02

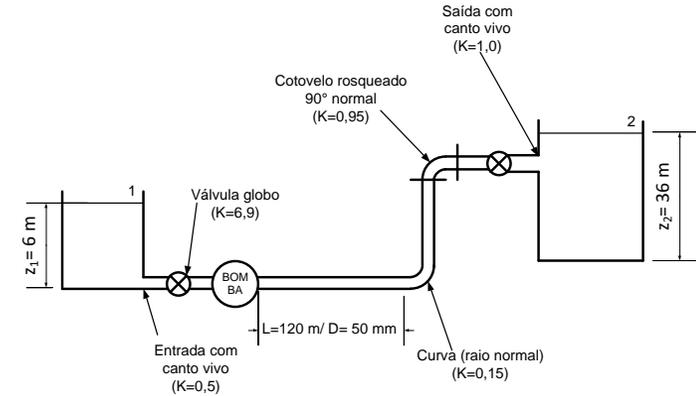
Água a 20°C:  $\rho=998 \text{ kg/m}^3$  e  $\nu=1,02 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

$$\dot{Q} = \bar{V}A \Rightarrow \bar{V} = \frac{\dot{Q}}{\frac{\pi}{4}D^2} = \frac{6 \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{4}(50 \times 10^{-3})^2} = 3,06 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \frac{3,06 * 50 \times 10^{-3}}{1,02 \times 10^{-6}} = 1,50 \times 10^5 \text{ (turbulento)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,16}{Re} \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,09}{Re^{0,87}} \right) \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \log \left[ \frac{0,001}{3,7} + \frac{5,16}{1,50 \times 10^5} \log \left( \frac{0,001}{3,7} + \frac{5,09}{(1,50 \times 10^5)^{0,87}} \right) \right] \Rightarrow f = 0,01721$$



## Exercício 02

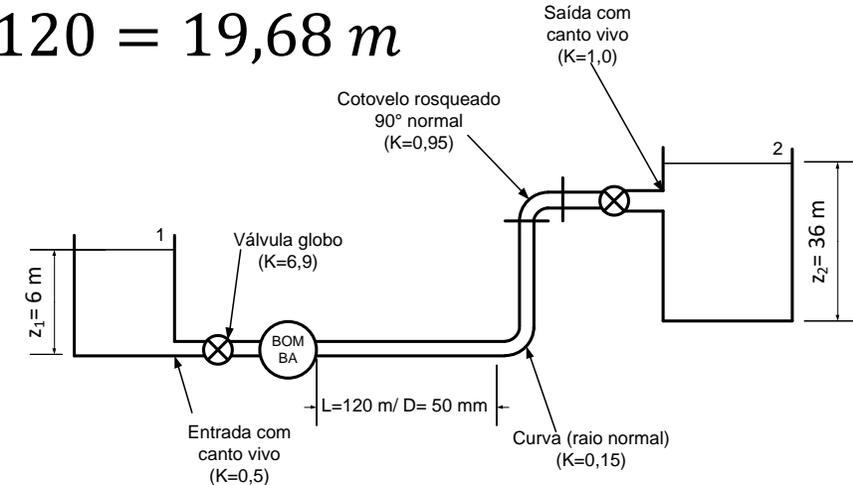
$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = f \cdot \frac{\bar{V}^2}{2gD} \sum_{i=0}^N l_i = 0,01721 \times \frac{(3,06)^2}{2 \times 9,8 \times (50 \times 10^{-3})} \times 120 = 19,68 \text{ m}$$

Para o cálculo das perdas singulares:

$$\sum_{j=0}^M h_{s,j} = \sum_{j=0}^M K_j \frac{\bar{V}_j^2}{2g}$$

$$\sum_{j=0}^M h_{s,j} = \sum_{j=0}^M K_j \frac{\bar{V}_j^2}{2g} = \frac{\bar{V}^2}{2g} \sum_{j=0}^M K_j = \frac{(3,06)^2}{2 \times 9,8} (0,5 + 6,9 + 0,15 + 0,95 + 1,0) = 4,53 \text{ m}$$

$$h_L = \sum_{i=0}^N h_{d,i} + \sum_{j=0}^M h_{s,j} = 19,68 + 4,53 = 24,20 \text{ m}$$



## Exercício 02

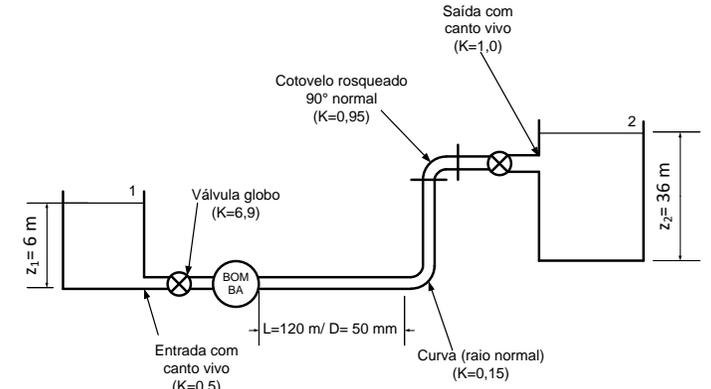
$$h_{bomba} = \frac{\dot{W}_{fluido}}{\gamma \dot{Q}}$$

$$\eta_{bomba} = \frac{\dot{W}_{fluido}}{\dot{W}_{motor}}$$

$$h_{bomba} = \frac{\eta_{bomba} \dot{W}_{motor}}{\gamma \dot{Q}}$$

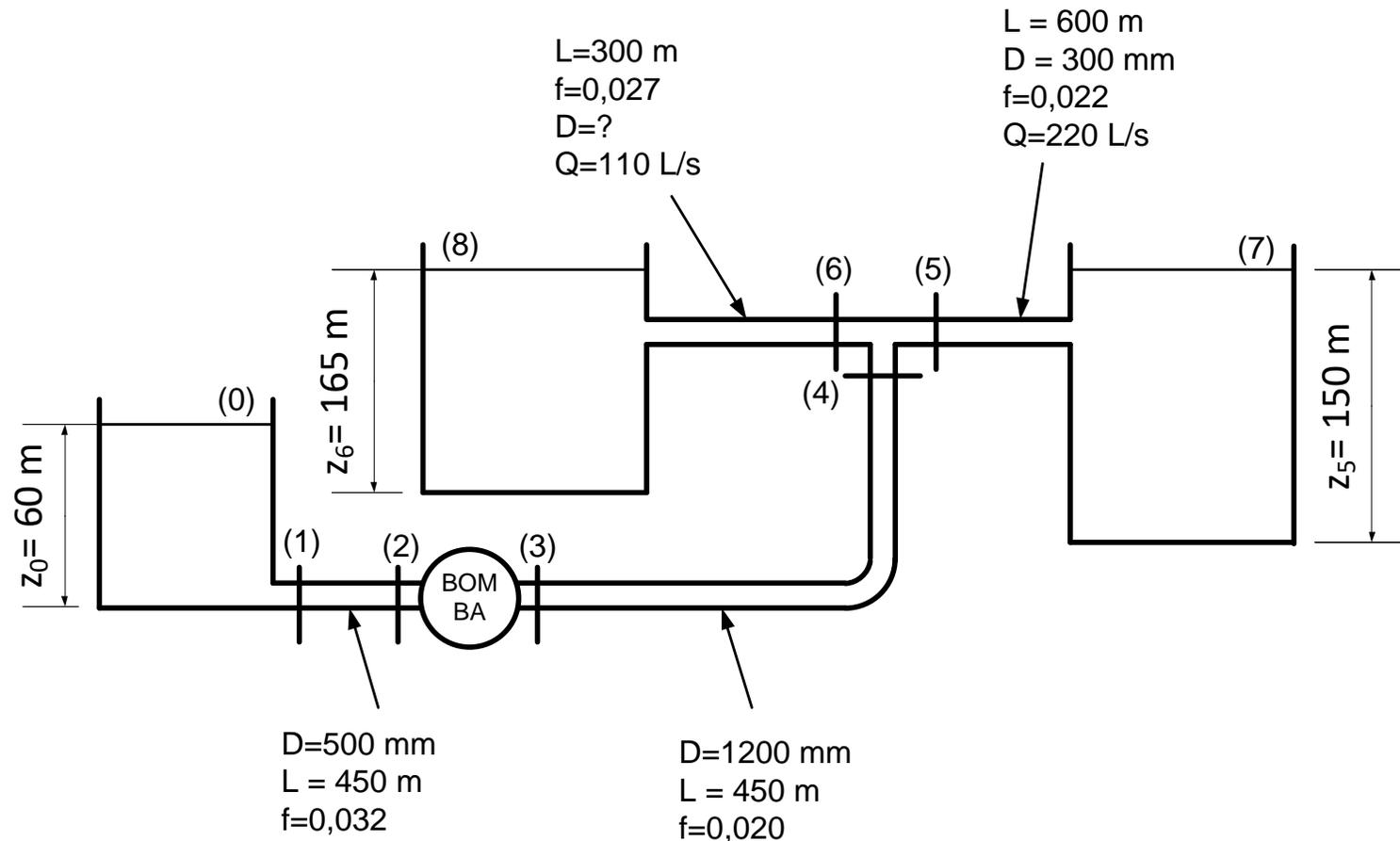
$$h_{bomba} = (z_2 - z_1) + h_L \quad \longrightarrow \quad \frac{\eta_{bomba} \dot{W}_{motor}}{\gamma \dot{Q}} = (z_2 - z_1) + h_L$$

$$\dot{W}_{motor} = \frac{\gamma \dot{Q}}{\eta_{bomba}} [(z_2 - z_1) + h_L] = \frac{998 \times 6 \times 10^{-3}}{0,80} [(36 - 6) + 24,20] = 405,7 \text{ W}$$



## Exercício 03

Para o sistema mostrado na figura, avalie a potência a ser fornecida para a bomba e o diâmetro do trecho (6)-(8) sabendo que  $\gamma_{\text{água}} = 10.000 \text{ N/m}^3$  e a eficiência da bomba é 85%. (os valores de cota fornecidos são para o mesmo pano de referência)



## Exercício 03

Hipóteses:

- Regime permanente
- escoamento turbulento e incompressível
- Sem variação de temperatura da água ao longo do sistema
- Perdas singulares desprezíveis
- Reservatórios (0), (8) e (7) com superfície livre e sem variação de nível

Aplicando a conservação de massa no nó (4)-(5)-(6):

$$\dot{m}_4 = \dot{m}_5 + \dot{m}_6$$

$$\rho_4 \dot{Q}_4 = \rho_5 \dot{Q}_5 + \rho_6 \dot{Q}_6$$

 Escoamento incompressível e sem variação de temperatura

$$\dot{Q}_4 = 220 + 110 = 330 \text{ L/s}$$

## Exercício 03

Aplicando a equação de conservação de energia entre as seções (0) e (7):

$$\frac{p_0}{\gamma_0} + \alpha_0 \frac{\bar{V}_0^2}{2g} + z_0 + h_{bomba} = \frac{p_7}{\gamma_7} + \alpha_7 \frac{\bar{V}_7^2}{2g} + z_7 + h_{turbina} + h_{L,0-7}$$

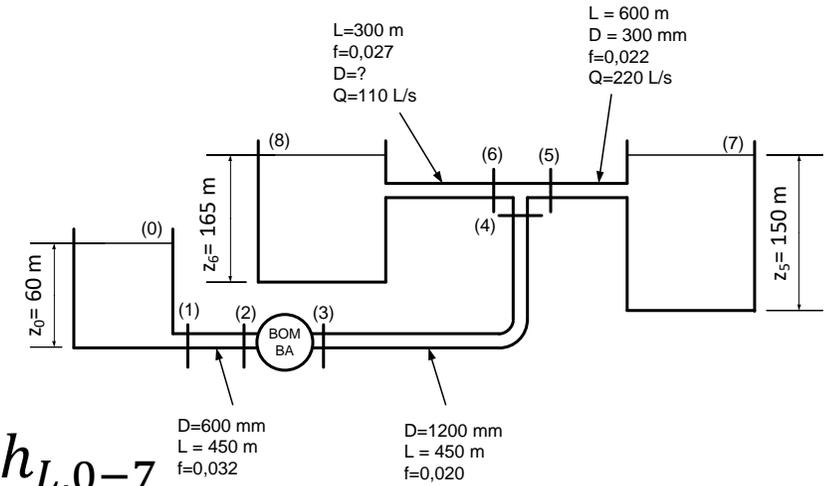
Mas:

$$p_0 = p_7 = p_{atm} \text{ (reservatórios com superfícies livres)}$$

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_7 = 0 \text{ (sem variação de nível)}$$

Logo:

$$h_{bomba} = (z_7 - z_0) + h_{L,0-7}$$



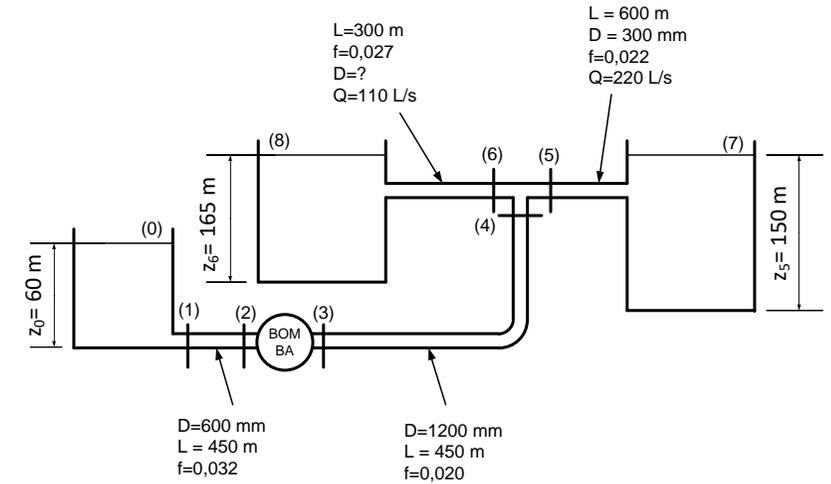
## Exercício 03

$$h_{L,0-7} = f \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{\bar{V}^2}{2g} = \sum_{i=0}^N h_{d,i} + \sum_{j=0}^M h_{s,j}$$

$$\sum_{j=0}^M h_{s,j} = 0 \text{ (perdas singulares desprezíveis)}$$

$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = \sum_{i=0}^N f_i \cdot \frac{l_i}{D_i} \cdot \frac{\bar{V}_i^2}{2g}$$

$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = f_{1,2} \cdot \frac{l_{1,2}}{D_{1,2}} \cdot \frac{\bar{V}_{1,2}^2}{2g} + f_{3,4} \cdot \frac{l_{3,4}}{D_{3,4}} \cdot \frac{\bar{V}_{3,4}^2}{2g} + f_{5,7} \cdot \frac{l_{5,7}}{D_{5,7}} \cdot \frac{\bar{V}_{5,7}^2}{2g}$$



## Exercício 03

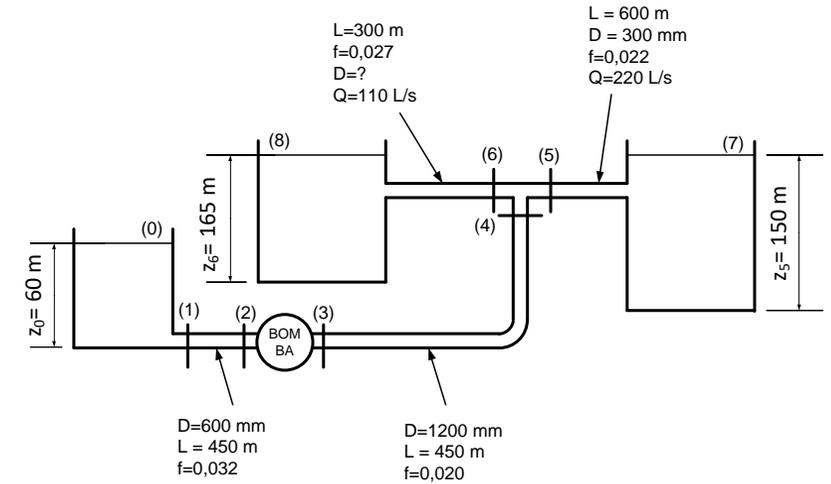
$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = f_{1,2} \cdot \frac{l_{1,2}}{D_{1,2}} \cdot \frac{\bar{V}_{1,2}^2}{2g} + f_{3,4} \cdot \frac{l_{3,4}}{D_{3,4}} \cdot \frac{\bar{V}_{3,4}^2}{2g} + f_{5,7} \cdot \frac{l_{5,7}}{D_{5,7}} \cdot \frac{\bar{V}_{5,7}^2}{2g}$$

$$\dot{Q} = \bar{V}A \Rightarrow \bar{V} = \frac{\dot{Q}}{\frac{\pi}{4}D^2}$$

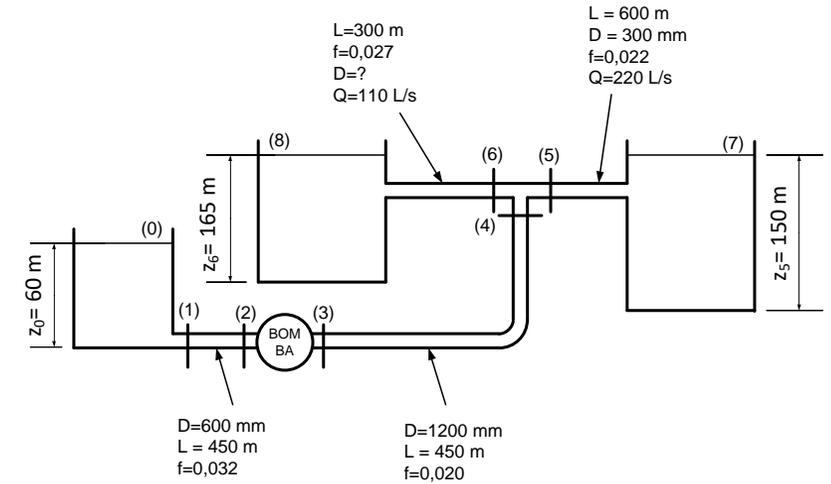
$$\bar{V}_{1,2} = \frac{\dot{Q}_4}{\frac{\pi}{4}D_{1,2}^2} = \frac{4 \times (0,330)}{\pi(0,500)^2} = 1,68 \text{ m/s}$$

$$\bar{V}_{3,4} = \frac{\dot{Q}_4}{\frac{\pi}{4}D_{3,4}^2} = \frac{4 \times (0,330)}{\pi(1,2)^2} = 0,29 \text{ m/s}$$

$$\bar{V}_{5,7} = \frac{\dot{Q}_5}{\frac{\pi}{4}D_{5,7}^2} = \frac{4 \times (0,220)}{\pi(0,300)^2} = 3,11 \text{ m/s}$$



## Exercício 03



$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = 0,032 \times \frac{450}{0,500} \times \frac{(1,68)^2}{2 \times 9,8} + 0,020 \times \frac{450}{0,450} \times \frac{(0,29)^2}{2 \times 9,8} + 0,022 \times \frac{600}{0,300} \times \frac{(3,11)^2}{2 \times 9,8}$$

$$h_{L,0-7} = \sum_{i=0}^N h_{d,i} = 4,15 + 0,03 + 21,75 = 25,93 \text{ m}$$

$$h_{bomba} = (z_7 - z_0) + h_{L,0-7} = (150 - 60) + 25,93 = 115,93 \text{ m}$$

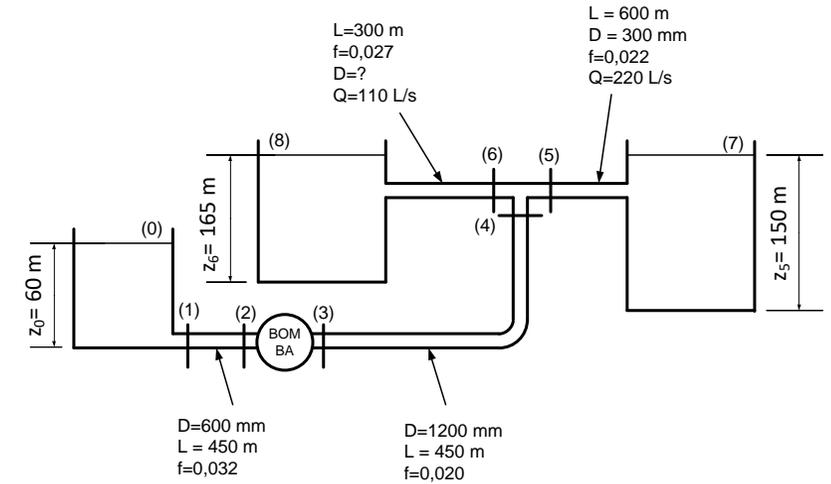
## Exercício 03

Para a bomba tem-se:

$$h_{bomba} = \frac{\dot{W}_{fluido}}{\gamma \dot{Q}_4}$$

$$\eta_{bomba} = \frac{\dot{W}_{fluido}}{\dot{W}_{motor}}$$

$$\dot{W}_{motor} = \frac{\gamma \dot{Q}_4 h_{bomba}}{\eta_{bomba}} = \frac{10.000 \times 0,330 \times 115,93}{0,85} = 450.077 \text{ W} = 450,077 \text{ kW}$$



## Exercício 03

Aplicando a equação de conservação de energia entre as seções (0) e (8):

$$\frac{p_0}{\gamma_0} + \alpha_0 \frac{\bar{V}_0^2}{2g} + z_0 + h_{bomba} = \frac{p_8}{\gamma_8} + \alpha_8 \frac{\bar{V}_8^2}{2g} + z_8 + h_{turbina} + h_{L,0-8}$$

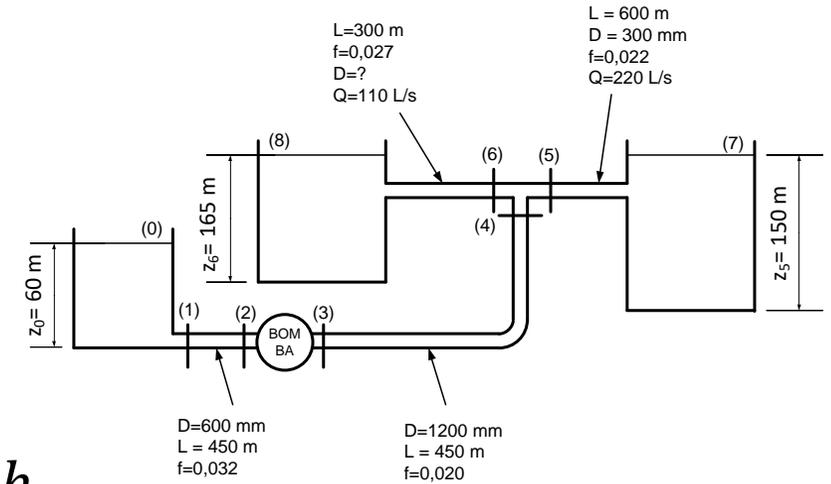
Mas:

$$p_0 = p_8 = p_{atm} \text{ (reservatórios com superfícies livres)}$$

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_8 = 0 \text{ (sem variação de nível)}$$

Logo:

$$h_{bomba} = (z_8 - z_0) + h_{L,0-8}$$



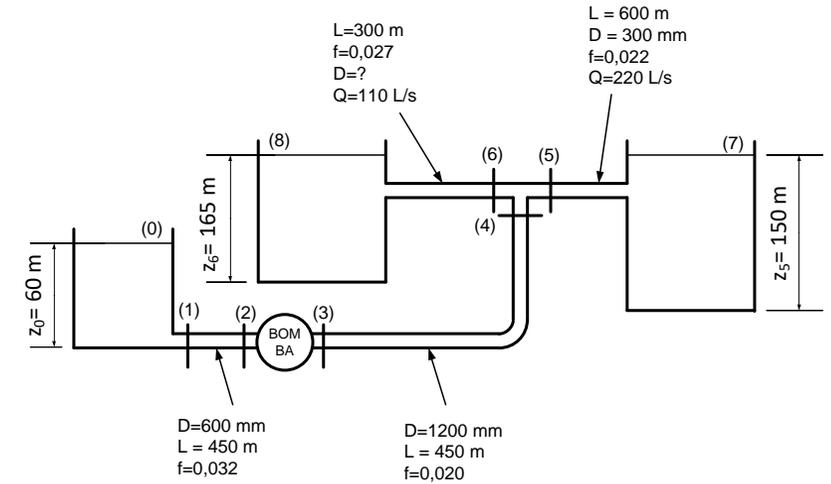
## Exercício 03

$$h_{L,0-8} = f \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{\bar{V}^2}{2g} = \sum_{i=0}^N h_{d,i} + \sum_{j=0}^M h_{s,j}$$

$$\sum_{j=0}^M h_{s,j} = 0 \text{ (perdas singulares desprezíveis)}$$

$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = \sum_{i=0}^N f_i \cdot \frac{l_i}{D_i} \cdot \frac{\bar{V}_i^2}{2g}$$

$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = f_{1,2} \cdot \frac{l_{1,2}}{D_{1,2}} \cdot \frac{\bar{V}_{1,2}^2}{2g} + f_{3,4} \cdot \frac{l_{3,4}}{D_{3,4}} \cdot \frac{\bar{V}_{3,4}^2}{2g} + f_{6,8} \cdot \frac{l_{6,8}}{D_{6,8}} \cdot \frac{\bar{V}_{6,8}^2}{2g}$$



## Exercício 03

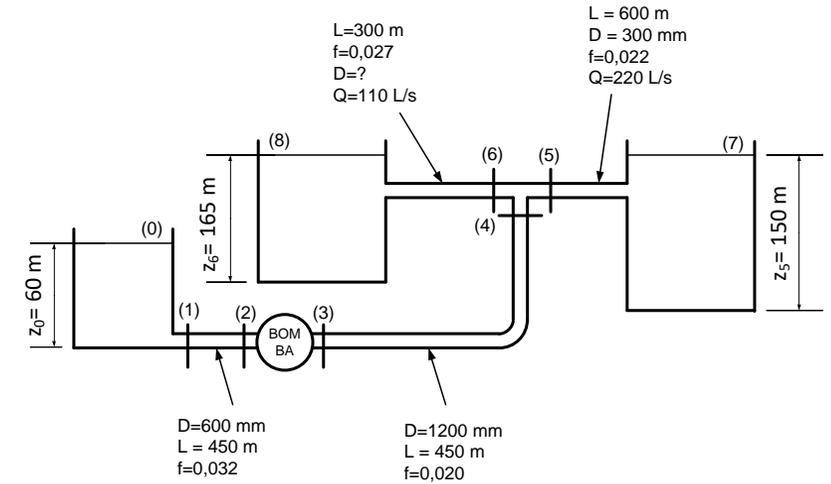
$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = f_{1,2} \cdot \frac{l_{1,2}}{D_{1,2}} \cdot \frac{\bar{V}_{1,2}^2}{2g} + f_{3,4} \cdot \frac{l_{3,4}}{D_{3,4}} \cdot \frac{\bar{V}_{3,4}^2}{2g} + f_{5,8} \cdot \frac{l_{5,8}}{D_{5,8}} \cdot \frac{\bar{V}_{5,8}^2}{2g}$$

$$\dot{Q} = \bar{V}A \Rightarrow \bar{V} = \frac{\dot{Q}}{\frac{\pi}{4}D^2}$$

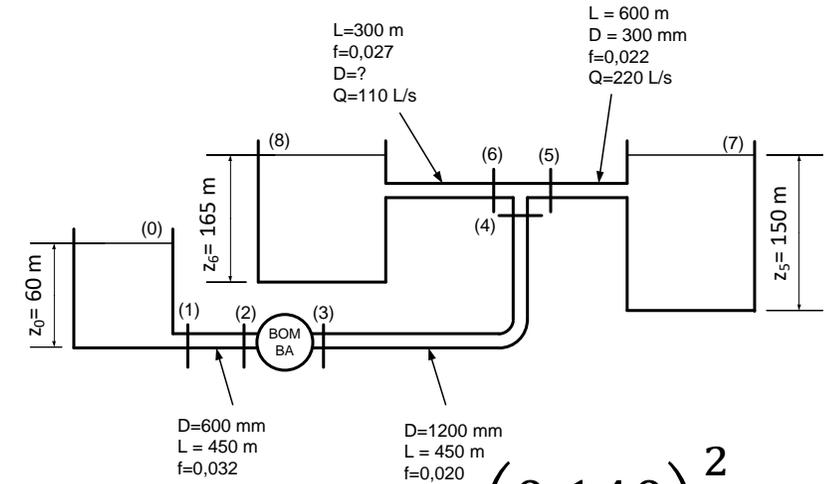
$$\bar{V}_{1,2} = \frac{\dot{Q}_4}{\frac{\pi}{4}D_{1,2}^2} = \frac{4 \times (0,330)}{\pi(0,500)^2} = 1,68 \text{ m/s}$$

$$\bar{V}_{3,4} = \frac{\dot{Q}_4}{\frac{\pi}{4}D_{3,4}^2} = \frac{4 \times (0,330)}{\pi(1,2)^2} = 0,29 \text{ m/s}$$

$$\bar{V}_{5,8} = \frac{\dot{Q}_6}{\frac{\pi}{4}D_{5,8}^2} = \frac{4 \times (0,110)}{\pi D_{5,8}^2} = \frac{0,140}{D_{5,8}^2} \text{ m/s}$$



## Exercício 03



$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = 0,032 \times \frac{450}{0,500} \times \frac{(1,68)^2}{2 \times 9,8} + 0,020 \times \frac{450}{1,2} \times \frac{(0,29)^2}{2 \times 9,8} + 0,027 \times \frac{600}{D_{6,8}} \times \frac{\left(\frac{0,140}{D_{6,8}^2}\right)^2}{2 \times 9,8}$$

$$h_{L,0-8} = \sum_{i=0}^N h_{d,i} = 4,15 + 0,03 + \frac{0,0162}{D_{6,8}^5} = 4,18 + \frac{0,0162}{D_{6,8}^5}$$

$$h_{bomba} = (z_8 - z_0) + h_{L,0-8} \Rightarrow 115,93 = (165 - 60) + 4,18 + \frac{0,0162}{D_{6,8}^5}$$

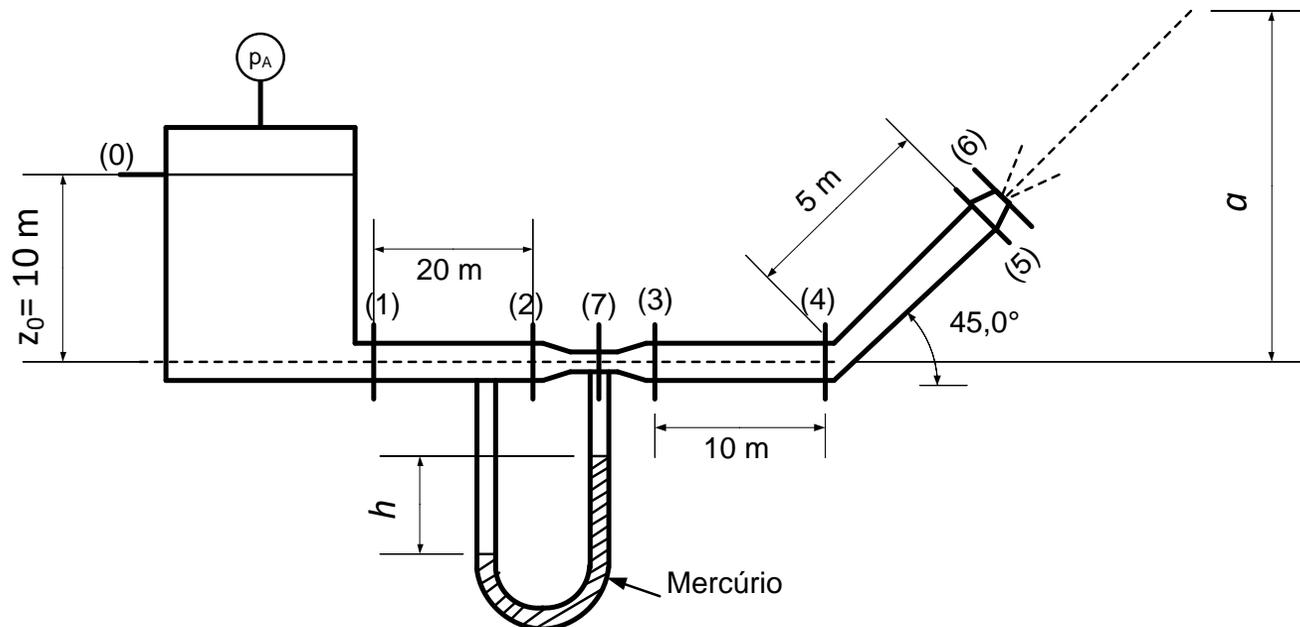
$$115,93 = (165 - 60) + 4,18 + \frac{0,0162}{D_{6,8}^5} \Rightarrow D_{5,8} = 0,299 \text{ m}$$

## Exercício 04

Para o sistema abaixo no qual escoava um fluido ( $\gamma=10.000 \text{ N/m}^3$  e  $\nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) em uma tubulação com rugosidade  $\varepsilon=1,5 \times 10^{-4} \text{ m}$ ), determine:

- a velocidade do fluido na seção 6
- a pressão total na seção 2
- a altura  $h$  do fluido no manômetro U
- a altura  $a$  máxima que o jato atinge após a seção 6

Dados:



$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = 0,15 \text{ m}$$

$$D_6 = D_7 = 0,075 \text{ m}$$

$$K_1 = 0,5 \quad K_{2,7,3} = 0,6 \quad K_4 = 0,3$$

$$K_{5,6} = 1,1 \quad \gamma_{Hg} = 13.600 \text{ N/m}^3$$

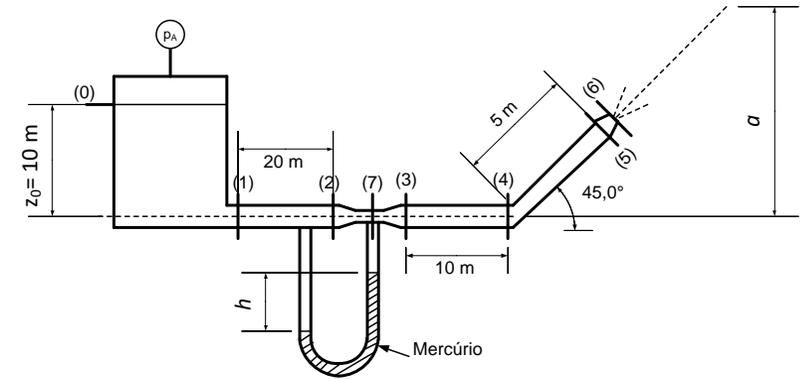
$$p_a = 300 \text{ kPa}$$

$$p_6 = p_{atm} = 100 \text{ kPa}$$

## Exercício 04

Hipóteses:

- Regime permanente
- escoamento turbulento e incompressível
- Sem variação de temperatura e de propriedades ao longo do sistema
- Variação desprezível do nível do líquido no tanque (seção (0))
- Não há turbina e nem bomba



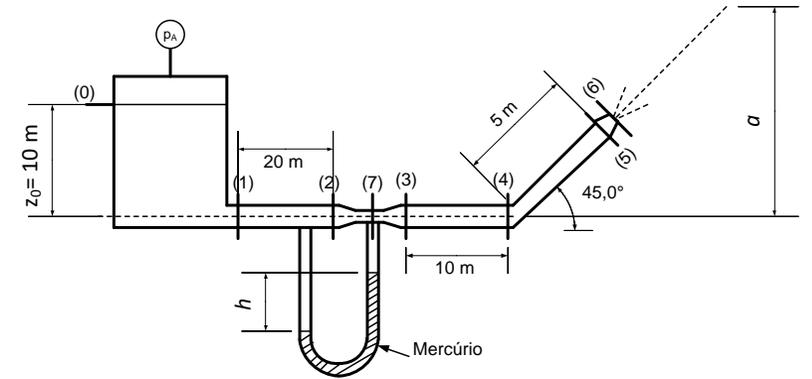
Aplicando a equação da conservação de energia entre as (0) e (6):

$$\frac{p_0}{\gamma_0} + \alpha_0 \frac{\bar{V}_0^2}{2g} + z_0 + h_{bomba} = \frac{p_6}{\gamma_6} + \alpha_6 \frac{\bar{V}_6^2}{2g} + z_6 + h_{turbina} + h_{L,0-6}$$

## Exercício 04

Hipóteses:

- Regime permanente
- escoamento turbulento e incompressível
- Sem variação de temperatura e de propriedades ao longo do sistema
- Variação desprezível do nível do líquido no tanque (seção (0))



Aplicando a equação da conservação de energia entre as (0) e (6):

$$\frac{p_0}{\gamma_0} + \alpha_0 \frac{\bar{V}_0^2}{2g} + z_0 + h_{bomba} = \frac{p_6}{\gamma_6} + \alpha_6 \frac{\bar{V}_6^2}{2g} + z_6 + h_{turbina} + h_{L,0-6}$$

## Exercício 04

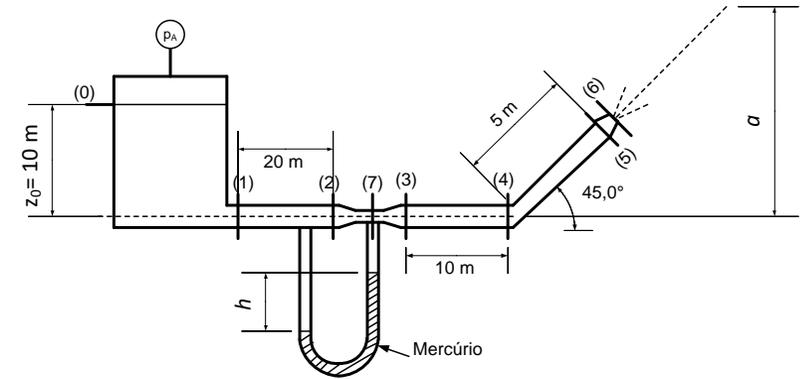
$$p_0 = p_A = 300 \text{ kPa} \quad p_6 = p_{atm} = 100 \text{ kPa} \quad \bar{V}_0 = 0$$

$$z_0 = 10 \quad z_6 = 5 \text{sen}45^\circ = 5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 3,54 \text{ m} \quad \alpha_0 = \alpha_6 = 1$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$\frac{300 \times 10^3}{10.000} + 10 = \frac{200.000}{10.000} + \alpha_6 \frac{\bar{V}_6^2}{2 \times 10} + 3,54 + h_{L,0-6}$$

$$\bar{V}_6 = \sqrt{20(16,46 - h_{L,0-6})}$$



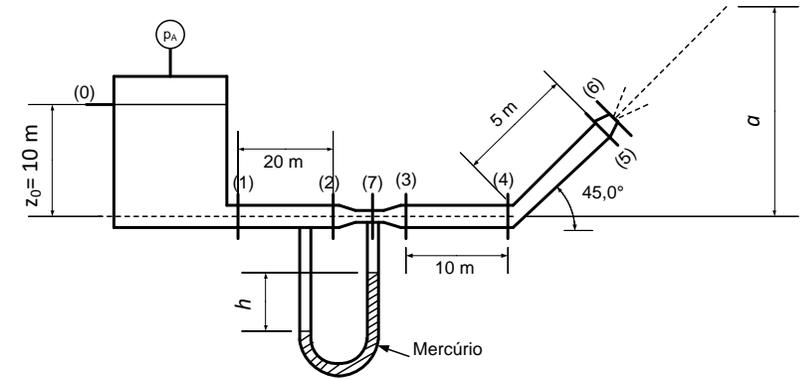
## Exercício 04

$$h_{L,0-6} = f \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{\bar{V}^2}{2g} = \sum_{i=0}^N h_{d,i} + \sum_{j=0}^M h_{s,j}$$

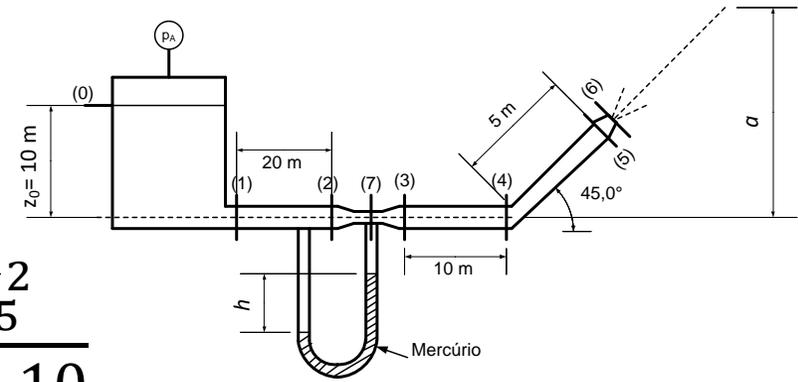
$$\sum_{j=0}^M h_{s,j} = \sum_{j=0}^M K_j \frac{\bar{V}_j^2}{2g} = \frac{\bar{V}^2}{2g} \sum_{j=0}^M K_j$$

$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = \sum_{i=0}^N f_i \cdot \frac{l_i}{D_i} \cdot \frac{\bar{V}_i^2}{2g} = f \frac{\bar{V}^2}{2gD} \sum_{i=0}^N l_i$$

$$h_{L,0-6} = f \frac{\bar{V}^2}{2gD} \sum_{i=0}^N l_i + \frac{\bar{V}^2}{2g} \sum_{j=0}^M K_j = \left( \frac{f}{D} \sum_{i=0}^N l_i + \sum_{j=0}^M K_j \right) \frac{\bar{V}^2}{2g}$$



## Exercício 04



$$h_{L,0-6} = \left( \frac{f}{0,15} (20 + 10 + 5) + (0,5 + 0,6 + 0,3 + 1,1) \right) \frac{\bar{V}_5^2}{2 \times 10}$$

$$h_{L,0-6} = (2,88f + 0,125) \bar{V}_5^2$$

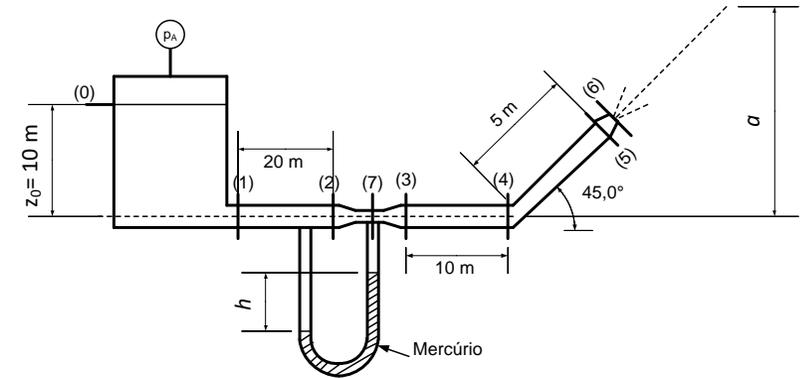
$$\bar{V}_6 = \sqrt{20(16,46 - h_{L,0-6})} = \sqrt{20(16,46 - (2,88f + 0,125)\bar{V}_5^2)}$$

Aplicando a equação da conservação de massa entre as (5) e (6):

$$\dot{m}_5 = \dot{m}_6 \Rightarrow \rho_5 \bar{V}_5 A_5 = \rho_6 \bar{V}_6 A_6 \Rightarrow \bar{V}_5 \frac{\pi D_5^2}{4} = \bar{V}_6 \frac{\pi D_6^2}{4} \Rightarrow \bar{V}_5 = \bar{V}_6 \left( \frac{D_6}{D_5} \right)^2$$

## Exercício 04

$$\bar{V}_6 = \sqrt{20 \left( 16,46 - (2,88f + 0,125) \left( \bar{V}_6 \left( \frac{D_6}{D_5} \right)^2 \right)^2 \right)}$$



Utilizando como primeira estimativa o fator de atrito para escoamento plenamente rugoso:

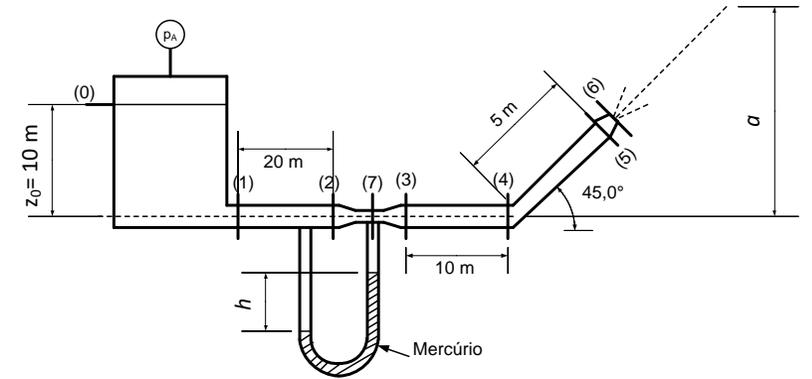
$$f_{CR} = \left[ -2,0 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right]^{-2}$$

Para a tubulação do sistema:  $\varepsilon = 1, \times 10^{-4} \text{ m} \rightarrow \frac{\varepsilon}{D} = \frac{1 \times 10^{-4}}{0,15} = 6,67 \times 10^{-4}$

$$f_{CR} = \left[ -2,0 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right]^{-2} = \left[ -2,0 \log \left( \frac{6,67 \times 10^{-4}}{3,7} \right) \right]^{-2} = 0,0178$$

## Exercício 04

$$\bar{V}_6 = \sqrt{20 \left( 16,46 - (2,88f + 0,125) \left( \bar{V}_6 \left( \frac{D_6}{D_5} \right)^2 \right)^2 \right)}$$

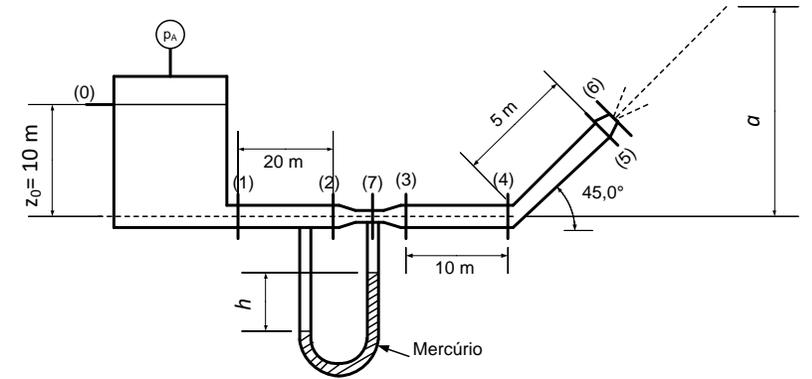


Iteração	\$f_i\$	\$V_6\$	\$V_5\$	\$Re_5\$	\$f_{i+1}\$
0	0,0178	16,42	4,11	\$6,16E+05\$	0,0171
1	0,0171	16,44	4,11	\$6,17E+05\$	0,0171

$$\bar{V}_6 = 16,44 \text{ m/s}$$

## Exercício 04

Aplicando a equação da conservação de energia entre as seções (0) e (2):



$$\frac{p_0}{\gamma_0} + \alpha_0 \frac{\bar{V}_0^2}{2g} + z_0 + h_{bomba} = \frac{p_2}{\gamma_2} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 + h_{turbina} + h_{L,0-2}$$

$$p_0 = p_A = 300\text{ kPa} \quad \bar{V}_0 = 0 \quad \alpha_0 = \alpha_6 = 1 \quad z_0 = 10 \quad g = 10\text{ m/s}^2$$

$$\frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 + h_{L,0-2}$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} - \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_0 - z_2 - h_{L,0-2}$$

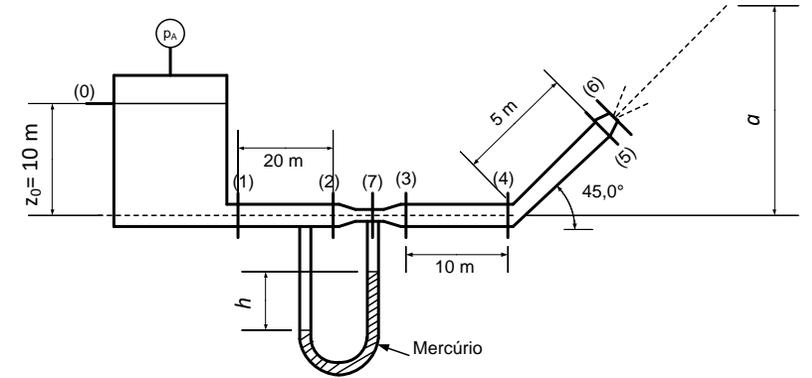
## Exercício 04

$$h_{L,0-2} = f \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{\bar{V}^2}{2g} = \sum_{i=0}^N h_{d,i} + \sum_{j=0}^M h_{s,j}$$

$$\sum_{j=0}^M h_{s,j} = \sum_{j=0}^M K_j \frac{\bar{V}_j^2}{2g} = \frac{\bar{V}^2}{2g} \sum_{j=0}^M K_j$$

$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = \sum_{i=0}^N f_i \cdot \frac{l_i}{D_i} \cdot \frac{\bar{V}_i^2}{2g} = f \frac{\bar{V}^2}{2gD} \sum_{i=0}^N l_i$$

$$h_{L,0-2} = f \frac{\bar{V}^2}{2gD} \sum_{i=0}^N l_i + \frac{\bar{V}^2}{2g} \sum_{j=0}^M K_j = \left( \frac{f}{D} \sum_{i=0}^N l_i + \sum_{j=0}^M K_j \right) \frac{\bar{V}^2}{2g}$$



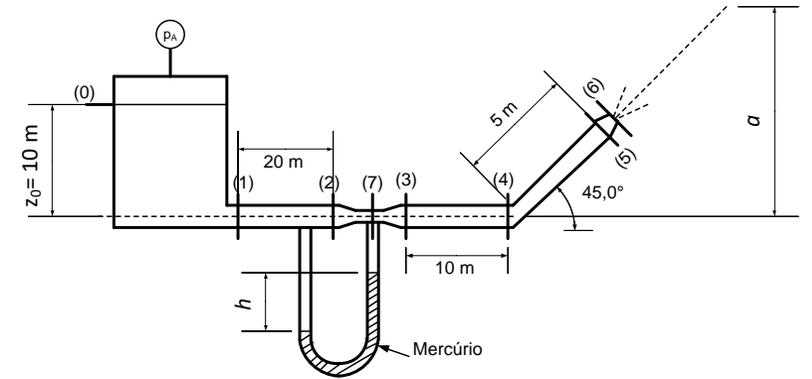
## Exercício 04

$$h_{L,0-2} = \left( \frac{f}{D} \sum_{i=0}^N l_i + \sum_{j=0}^M K_j \right) \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$h_{L,0-2} = \left( \frac{0,0171}{0,15} 20 + 0,5 \right) \frac{(4,11)^2}{2 \times 10} = 2,35 \text{ m}$$

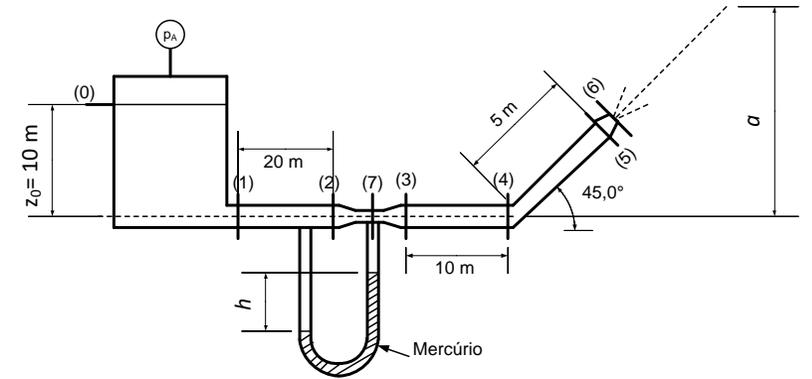
$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} - \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_0 - z_2 - h_{L,0-2}$$

$$\frac{p_2}{10.000} = \frac{300.000}{10.000} - \frac{(4,11)^2}{2 \times 10} + 10 - 0 - 2,35 \quad \longrightarrow \quad p_2 = 368.054 \text{ Pa} = 368,504 \text{ kPa}$$



## Exercício 04

Aplicando a equação da conservação de energia entre as seções (2) e (7):



$$\frac{p_2}{\gamma_2} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 + h_{bomba} = \frac{p_7}{\gamma_7} + \alpha_7 \frac{\bar{V}_7^2}{2g} + z_7 + h_{turbina} + h_{L,2-7}$$

$$\alpha_2 = \alpha_7 = 1 \quad z_2 = z_7 \quad h_{bomba} = 0 \quad h_{turbina} = 0$$

$$h_{L,2-7} = f \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{\bar{V}^2}{2g} = \sum_{i=0}^N h_{d,i} + \sum_{j=0}^M h_{s,j}$$

$$\sum_{i=0}^N h_{d,i} = 0 \quad \sum_{j=0}^M h_{s,j} = \frac{\bar{V}^2}{2g} \sum_{j=0}^M K_j = 0,6 \times \frac{(4,11)^2}{2 \times 10} = 0,507 \text{ m}$$

## Exercício 04

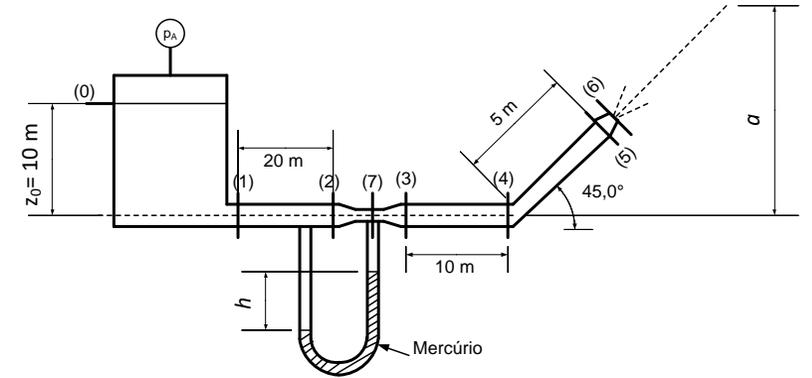
Aplicando a equação da conservação de massa entre as (2) e (7):

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_7 \Rightarrow \rho_2 \bar{V}_2 A_2 = \rho_7 \bar{V}_7 A_7 \Rightarrow \bar{V}_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = \bar{V}_7 \frac{\pi D_7^2}{4}$$

$$\bar{V}_7 = \bar{V}_2 \left( \frac{D_2}{D_7} \right)^2 = 4,11 \times \left( \frac{0,15}{0,075} \right)^2 = 16,44 \text{ m/s}$$

$$\frac{p_2}{\gamma_2} + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 = \frac{p_7}{\gamma_7} + \frac{\bar{V}_7^2}{2g} + z_7 + h_{L,2-7}$$

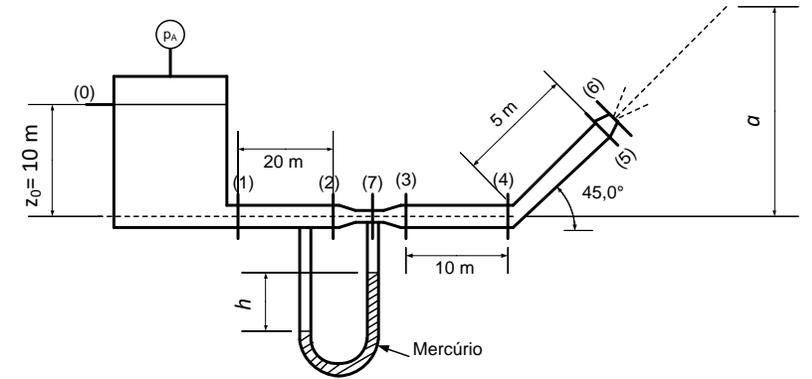
$$\frac{p_2}{\gamma_{\text{água}}} + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} = \frac{p_7}{\gamma_{\text{água}}} + \frac{\bar{V}_7^2}{2g} + 0,507$$



## Exercício 04

Aplicando a Lei de Stevin para o manômetro:

$$p_2 + \gamma_{\text{água}} h = p_7 + \gamma_{\text{mercúrio}} h$$



$$p_2 - p_7 = (\gamma_{\text{mercúrio}} - \gamma_{\text{água}}) h$$

$$\frac{(p_2 - p_7)}{\gamma_{\text{água}}} = \frac{(\bar{V}_7^2 - \bar{V}_2^2)}{2g} + 0,507$$

$$\left. \begin{array}{l} p_2 - p_7 = (\gamma_{\text{mercúrio}} - \gamma_{\text{água}}) h \\ \frac{(p_2 - p_7)}{\gamma_{\text{água}}} = \frac{(\bar{V}_7^2 - \bar{V}_2^2)}{2g} + 0,507 \end{array} \right\} \frac{(\gamma_{\text{mercúrio}} - \gamma_{\text{água}}) h}{\gamma_{\text{água}}} = \frac{(\bar{V}_7^2 - \bar{V}_2^2)}{2g} + 0,507$$

$$\frac{(13.600 - 10.000)h}{10.000} = \frac{((16,44)^2 - (4,11)^2)}{2 \times 10} + 0,507 \Rightarrow h = 36,6 \text{ m}$$

## Exercício 04

Para avaliar a altura atingida pelo jato temos que a água está em movimento uniformemente acelerado. Logo analisando a figura temos:

$$y = y_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad V = V_0 + a t$$

Para altura máxima:  $V=0$ . Logo:

$$V_0 = V_{6,y} = V_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 16,44 \frac{\sqrt{2}}{2} = 11,63 \text{ m/s}$$

$$0 = 11,63 + (-10)t \Rightarrow t = 1,163 \text{ s}$$

$$a = 3,54 + 11,63 \times 1,163 + \frac{1}{2} \times (-10) \times (1,163)^2$$

$$a = 10,30 \text{ m}$$

