Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 2 - Contagem- Introdução a probabilidade

Nesta aula, iremos apresentaremos o conceito de probabilidade

Experimentos determinísticos ou aleatórios

Experimentos como:

1. soltar uma moeda de certa altura e observar sua trajetória;
2. soltar uma moeda de certa altura e anotar sua velocidade ao tocar o solo.

São ditos **experimentos determinísticos**, pois seus resultados podem ser determinados antes mesmo de serem realizados.

Agora, experimentos como:

1. soltar uma moeda de certa altura e observar sua face superior;
2. lançar um dado e observar sua face superior;
3. retirar uma bola de uma urna que contém três bolas pretas e cinco bolas vermelhas e observar a cor da bola.

São exemplos de **experimentos aleatórios**, pois seus resultados, apesar de previsíveis, só podem ser determinados com a realização do experimento.

Definição: Um espaço amostral associado a um experimento aleatório é um conjunto de todos os possíveis resultados para esse experimento.

Exemplos de espaços amostrais:

1. Para o experimento aleatório E: lançar uma moeda uma vez e observar sua face superior, um espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{ \text{cara}, \text{coroa} \}$.
2. No lançamento simultâneo de duas moedas, os possíveis resultados são KK, KC, CK e CC, em que a letra C significa cara e a letra K significa coroa. Assim, KK significa “coroa no primeiro e no segundo lançamentos”, enquanto KC significa “coroa no primeiro e cara no segundo lançamentos”. O espaço amostral para esse experimento é, portanto, o conjunto

   $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$.

Exemplos de espaços amostrais:

Seja E o experimento que consiste em lançar uma moeda para cima até que se obtenha cara. O espaço amostral deste experimento aleatório é Ω = {C, KC, KKC, KKKC, KKC, … }, pois podemos observar "cara" (C) já no primeiro lançamento, ou no segundo lançamento (KC), ou no terceiro lançamento (KKC), e assim por diante. Esse espaço amostral também pode ser representado pelo conjunto W = {0, 1, 2, 3, 4, … }, em que cada elemento representa o número de vezes que deu coroa antes de dar a primeira cara.

Eventos associados a um experimento aleatório

Por exemplo: lançar um dado e observar sua face superior temos o conjunto

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ como um espaço amostral associado a E.

Exemplos de subconjuntos de Ω:

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 2\}$

Definição do que é um evento: Seja Ω um espaço amostral associado ao experimento aleatório E. Um evento desse experimento é qualquer subconjunto de Ω .

Observação importante: Evento impossível é um evento que nunca ocorre. **Exemplo:** Observar uma bola vermelha retirada de uma urna que contém somente bolas pretas e bolas brancas é um evento impossível.

Operações entre os eventos:

União. O evento união de A com B é o evento A ∪ B que ocorre quando o resultado do experimento é um elemento de A ou um elemento de B.

Exemplo: Lançar duas moedas distinguíveis, simultaneamente, e observar suas faces, a união dos eventos A ={observar duas caras} e B = {observar duas coroas}.

O evento A ∪ B: observar dois resultados iguais.

Eventos A e B são, respectivamente, A = {CC} e B ={KK} e, assim, o evento A ∪ B é dado por A ∪ B = {CC, KK}

Operações entre os eventos:

Interseção: O evento interseção de A com B é o evento A∩B que ocorre quando o resultado do experimento é um elemento de A e de B ao mesmo tempo.

Exemplo: lançar duas moedas distinguíveis, simultaneamente, e observar suas faces, a interseção dos eventos A ={observar pelo menos uma cara} e B={ observar pelo menos uma coroa}.

Os eventos A e B são A = {CC, CK, KC} e B = {KK, KC, CK} e, assim, o evento A∩ B é dado por A∩ B = {CK, KC}.

Operações entre os eventos:

Evento complementar: O evento complementar de A é o evento A^c que ocorre quando o resultado do experimento é um elemento de Ω que não está em A.

Exemplo: lançar uma moeda e observar suas faces, se A = Cara e A^c = Coroa.

Profª. Felipe Rocha Felix

Eventos mutuamente excludentes: Dizemos que os eventos A e B de um experimento aleatório E são mutuamente excludentes se $A \cap B = \varnothing$

Exemplo: No experimento aleatório E: lançar um dado e observar o número na face superior, os eventos A = {observar um número maior do que 5} e B = {observar um número ímpar}.

Temos: $A = \{6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e, assim, o evento $A \cap B = \varnothing$

Propriedades das operações entre eventos.

1. Se A e B são eventos de um experimento aleatório E, então vale o seguinte:
   a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Propriedades das operações entre eventos.

1. Se A, B e C são eventos de um experimento aleatório E, então vale o seguinte:
   a. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
   b. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Definição: Seja $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ um espaço amostral finito, isto é, um conjunto finito, não vazio, com n elementos. Uma distribuição de probabilidade é uma função p, que associa a cada elemento a_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ um número real $p(a_i)$ que será indicado por p_i, satisfazendo:

1. $0 < p_i < 1$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$
2. $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Probabilidade

Definição de probabilidade de um evento A

Definição. Dado um evento A, definimos a probabilidade de A, que denotaremos por p(A), como segue:

$$p(A) = 0, \text{ se } A = \varnothing;$$

$$p(A) = \sum_{a_i \in A} p(a_i).$$

Propriedades de probabilidade:

1. Se $A = \varnothing$, então $p(A) = 0$
2. Se $A = \Omega$, então $p(A) = 1$
3. Se A e B são eventos tais que $A \cap B = \varnothing$, então $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
4. Se A e B são eventos quaisquer, então $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
5. Seja A^c o evento complementar de A. Temos que $p(A^c) = 1 - p(A)$.

Probabilidade condicional

Dados um experimento aleatório E, com espaço amostral Ω , e A e B eventos de E, com $B \neq \varnothing$, a probabilidade de ocorrer o evento A dado que ocorreu o evento B (probabilidade de A dado B) ou a probabilidade do evento A condicionado ao evento B é indicada por p(A/B) e definida por:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Probabilidade condicional

Exemplo: De uma urna contendo 55 bolas numeradas de 1 a 55, uma bola é sorteada ao acaso. A probabilidade de o número na bola sorteada ser um número par é 27/55 . Já a probabilidade de o número na bola sorteada ser par, dado que o número sorteado foi um múltiplo de 11 é 2/5.

Eventos independentes.

Sejam A e B eventos de um experimento E com espaço amostral Ω. Dizemos que A e B são independentes se, e somente se, vale a igualdade:

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

Exemplo: Um sistema de segurança tem dois dispositivos que funcionam de modo independente e que têm probabilidades iguais a 0,2 e 0,3 de falharem. Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos dois componentes não falhe?

Eventos independentes.

Solução do exemplo: Como os componentes funcionam independentemente, os eventos A = "o primeiro dispositivo falha" e B = "o segundo dispositivo falha" são independentes. Logo, o evento $A \cap B$ = "ambos falham" tem probabilidade $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$ e, assim, a probabilidade de que pelo menos um não falhe é igual a $1 - 0,06 = 0,94$.

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP