NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 3 - Combinações

Objetivos dessa aula:

- Conceituar os agrupamentos chamados de combinações simples.
- Relacionar as combinações simples com os arranjos simples, determinando o número de um em função do número do outro.

COMBINAÇÕES

Quando estudamos os arranjos simples de n objetos tomados p a p, com $1 \leq p \leq n$, vimos que eles consistem na escolha e ordenação de p desses objetos. Assim, para os algarismos 2, 3, 4 e 5, se escolhermos o 3 e o 4, por exemplo, podemos ordená-los de duas formas: 34 ou 43; se escolhermos os algarismos 2 e 5, podemos ordená-los, também, de duas formas: 25 ou 52; escolhendo os algarismos 2, 3 e 5, podemos ordená-los de seis formas: 235, 253, 325, 352, 523 ou 532.

Como se percebe, *para cada escolha de p dentre os n objetos dados temos um número de ordenações que coincide com o número de permutações de p objetos*, ou seja, é igual a P_p.

COMBINAÇÕES

Denotando por $C_{n,p}$ o número de escolha de p dentre n objetos distintos, conclui-se que

$$A_{n,p} = C_{n,p} \times P_p$$

Cada uma dessas escolhas é dita uma combinação dos n objetos tomados p a p.

Combinação simples de n objetos. Uma combinação simples ou combinação de n objetos tomados p a p, com $1 \leq p \leq n$, é qualquer escolha de p desses objetos.

CÁLCULO DE COMBINAÇÕES SIMPLES

Da igualdade anterior, temos que

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

é o número de combinações de n objetos distintos, tomados p a p.

Exemplo 1. Dadas as vogais a, e, i, o, u, as combinações dessas letras tomadas 3 a 3 são os conjuntos { a, e, i }, { a, e, o }, {a, e, u}, { a, i, o }, { a, i, u }, { a, o, u }, { e, i, o }, { e, i, u } e { i, o, u } e, portanto, são 10. Note que essas combinações são todos os subconjuntos do conjunto V = { a, e, i, o, u } que possuem, exatamente, 3 elementos. E são ao todo $C_{5,3}$.

Exemplo 2. Os subconjuntos do conjunto V = { a, e, i, o, u }, com exatamente 2 elementos são os 10 conjuntos: { a, e }, { a, i }, { a, o }, { a, u }, { e, i }, { e, o }, { e, u }, { i, o }, { i, u }, { o, u }, e são os subconjuntos das combinações dos objetos – a, e, i, o, u – tomados 2 a 2. E são ao todo $C_{5,2}$.

Exemplo 3. As combinações das vogais a, e, i, o, u tomadas 1 a 1 correspondem aos cinco subconjuntos unitários do conjunto V = { a, e, i, o, u }: {a}, {e}, {i}, {o} e {u}. E são ao todo $C_{5,1}$.

Exemplo 4. Qualquer que seja o número natural n, $1 \leq n$, temos

$$C_{n,1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Exemplo 5. Qualquer que seja o número natural n, $1 \leq n$, temos $C_{n,0} = 1$.

Exemplo 6. Os números $C_{7,3}$ e $C_{7,4}$ são iguais, pois $C_{7,3} = \dfrac{7!}{3!\ 4!}$ e $C_{7,4} = \dfrac{7!}{4!\ 3!}$

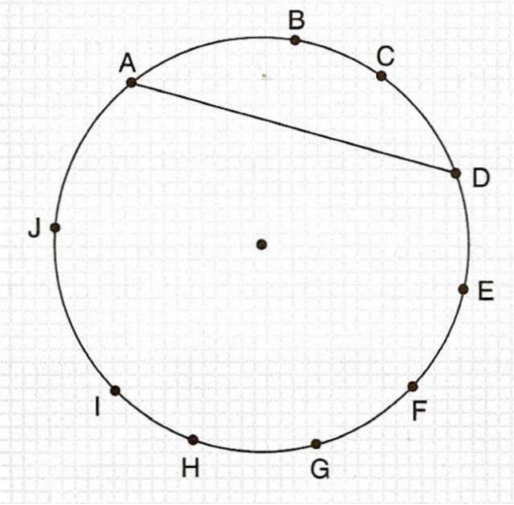
Combinações complementares. Dados n objetos distintos, qualquer escolha de p desses objetos corresponde à escolha dos n – p restantes ou que completam o conjunto. Assim,

$$C_{n,\,p} = C_{n,\,n-p}\,.$$

De fato,

$$C_{n,n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_{n,p}$$

Exemplo 7. Considerando dez pontos sobre uma circunferência, quantas cordas podem ser construídas com extremidades em dois desses pontos?



Solução. Uma corda fica determinada ao escolhermos dois pontos, entre os dez disponíveis.

Escolher, por exemplo (A,D) é o mesmo que escolher (D,A); em qualquer caso, determinam o segmento AD.

Cada corda construída corresponde, então, a uma combinação de 10 pontos tomados 2 a 2. Assim:

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2!\ 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2!\ \cancel{8!}} = 45 \text{ cordas}$$

Exemplo 8. Num acampamento, o monitor deve montar uma equipe de quatro jovens para improvisar uma ponte que possibilite a travessia de um riacho. Se há 8 rapazes e 6 moças, quantas equipes de dois rapazes e duas moças podem ser formadas?

Solução. Número de maneiras de escolher os rapazes:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{2 \cdot \cancel{6!}} = 28$$

Número de maneiras de escolher as moças:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot \cancel{4!}} = 15$$

Pelo PFC, a equipe poderá ser formada por 28 x 15 = **420 maneiras distintas**.

- Quantas equipes de quatro jovens têm *pelo menos* um rapaz?

$$C_{14,4} - C_{6,4} =$$

$$= \frac{14!}{4!\,10!} - \frac{6!}{4!\,2!}$$

$$= \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 15$$

$$= 1001 - 15 = 986$$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP