Fundo Patrimonial FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 2 - Arranjos, Permutações e o Fatorial de um número

Objetivos dessa aula:

- Determinar o fatorial de um número e utilizá-lo na fórmula para determinar o número de arranjos e de permutações.
- Conceituar e exemplificar arranjos e permutações simples e arranjos e permutações com elementos repetidos.
- Conceituar permutações circulares de n objetos e determinar seu número em função de n.

1. FATORIAL DE UM NÚMERO

Dado o número inteiro n, com n ≥ 0, o **fatorial de n** é indicado pelo símbolo n! (que se lê: **n fatorial** ou **fatorial de n**) é definido por:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad onde \quad \begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \end{cases}$$

Exemplo 1. O fatorial de 4 é indicado por 4! que, por sua vez, é igual a 4! = 4 · 3 · 2 · 1 = 24.

Exemplo 2. Calcule o valor da expressão $\dfrac{10!}{8!\;2!}$.

Solução. $$\frac{10!}{8!\;2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!\;2!} = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45$$

Exemplo 3. Vamos encontrar o valor de n na equação $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} = 12$.

Solução. Como $n-1 > n-3$, podemos escrever

$$\frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = 12 \;\Rightarrow\; n^2 - 3n - 10 = 0 \;\Rightarrow\; n = 5 \;\; ou \;\; \cancel{n = -2}$$

2. ARRANJOS SIMPLES E ARRANJOS COM ELEMENTOS REPETIDOS

Dentre os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, podemos escolher três e formar com eles um número de três algarismos distintos – um ***arranjo simples*** – ou com algarismos repetidos – um ***arranjo com elementos repetidos***.

Os seguintes números, entre outros, são arranjos simples desses algarismos tomados 3 a 3: 123, 324, 154, 135, 145, 132. Já os números 113, 235, 233, 344, 555, 432, 454 são exemplos de arranjos desses algarismos tomados 3 a 3.

2. ARRANJOS SIMPLES E ARRANJOS COM ELEMENTOS REPETIDOS

Arranjo simples. Dados os números inteiros positivos n e p, com $1 \leq p \leq n$, um **arranjo simples** dos n objetos distintos a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n tomados p a p, denotado $A_{n,p}$, é qualquer *sequência ordenada* de p objetos *diferentes* escolhidos entre os n existentes.

Arranjo com elementos repetidos. Dados os números inteiros positivos n e p, com $1 \leq p \leq n$, um **arranjo com repetição** dos n objetos distintos a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n tomados p a p, denotado por $(AR)_{n,p}$, é qualquer *sequência ordenada* de p objetos, *diferentes ou não*, escolhidos dentre esses objetos.

2. ARRANJOS SIMPLES E ARRANJOS COM ELEMENTOS REPETIDOS

Exemplo 1. Se de uma sala com 20 alunos premiarmos os 5 primeiros colocados, com prêmios diferentes, cada premiação possível é um arranjo simples dos 20 alunos tomados 5 a 5.

Exemplo 2. As sequências de letras abc, acd, bca, cdb, e abd podem ser pensadas como arranjos simples das letras a, b, c, e d tomadas 3 a 3.

Exemplo 3. As sequências de letras abc, acd, bba, cdb, e aaa podem ser pensadas como arranjos com elementos repetidos das letras a, b, c, e d tomadas 3 a 3

2.1. CÁLCULO DE ARRANJOS SIMPLES

Seja um conjunto com n elementos distintos. Escrever um arranjo dos n elementos tomados p a p significa escolher uma sequência ordenada de p elementos distintos entre os n disponíveis. Pelo princípio multiplicativo da contagem, essa ação consta de p etapas sucessivas:

1ª etapa	2ª etapa	3ª etapa	...	p-ésima etapa
(há n elementos a serem escolhidos)	(como os elementos devem ser distintos, há n-1 possibilidades)			
n	$n - 1$	$n - 2$	...	$n - (p - 1)$

2.1. CÁLCULO DE ARRANJOS SIMPLES

Dessa forma, o número total de arranjos dos n elementos tomados p a p (com n ≥ p) é:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

2.2. CÁLCULO DE ARRANJOS COM REPETIÇÃO

O número de arranjos com repetição de n objetos tomados p a p (1 < p ≤ n) pode ser determinado pelo produto n x n x n x ... x n, p fatores, isto é:

$$\boxed{(AR)_{n,p} = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^p}$$

Exemplo 4. Vamos calcular quantos números de três algarismos distintos é possível formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

Solução. $A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ ou $A_{5,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$

Exemplo 5. Vamos calcular quantos números de três algarismos, não necessariamente distintos, é possível formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

Solução. $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

3. PERMUTAÇÕES SIMPLES E PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS

Na definição de arranjo de n objetos distintos, tomados p a p, não excluímos a possibilidade de termos n = p. Assim, qualquer ordenação dos algarismos 1, 2 e 3 é um arranjo de 3 objetos tomados 3 a 3 e cada uma delas é apenas uma troca de lugar entre os algarismos; qualquer fila formada com as mesmas 5 pessoas é uma ordenação dessas pessoas e é, portanto, um arranjo das 5 pessoas tomadas 5 a 5.

A esse tipo de agrupamento chamamos de **permutação**.

3.1. CÁLCULO DE PERMUTAÇÃO SIMPLES

Dados n objetos distintos, uma **permutação simples** desses objetos é qualquer ordenação dos mesmos. Istoé, uma permutação de n objetos distintos, P_n, é um arranjo simples desses n objetos tomados n a n.

O número de permutações de n objetos é denotado por P_n é, portanto,

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Exemplo 6. O número de filas distintas que é possível formar com 5 pessoas é $P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Exemplo 7. O número de maneiras distintas de se arrumar 4 livros na prateleira de uma estante é $P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Exemplo 8. O número de anagramas da palavra AMOR é $P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

3.2. CÁLCULO DE PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

Uma **permutação** de n objetos **com elementos repetidos** é qualquer ordenação de n objetos dos quais, pelo menos dois, são iguais.

O número de permutações de n objetos com repetição de $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r$ desses objetos é denotado por $P_n^{n1, n2, n3, \ldots, nr}$, e pode ser calculado como segue:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_r!}$$

Exemplo 9. Os anagramas da palavra ESSES são $P_5^{2,3} = \dfrac{5!}{2!\ 3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = 10$

Exemplo 10. O número de anagramas da palavra MARIANA é $P_{7,3}$ que é igual a 840.

De fato,

$$P_7^{3} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 840$$

Exemplo 11. A quantidade de números de 5 algarismos que podemos formar usando todos os algarismos 1, 1, 1, 2 e 2 pode ser indicada por $P_5^{3,2}$.

4. PERMUTAÇÃO CIRCULAR

Até agora vimos que com 3 pessoas, A, B e C, é possível formarmos três filas ou ordenações distintas. São elas: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA. Cada uma dessas filas ou ordenações é dita uma permutação simples das três pessoas; é formada pelas mesmas pessoas e difere das outras, apenas, pela ordem em que as pessoas se encontram.

Suponha agora que queiramos distribuir as três pessoas, A, B e C, em torno de uma mesa circular.

Permutação circular. Uma permutação circular de n objetos distintos é qualquer distribuição desses objetos em torno de um círculo (real ou imaginário).

4. PERMUTAÇÃO CIRCULAR

O número de permutações circulares de n objetos distintos é indicado por $(PC)_n$, valendo a igualdade $(PC)_n = (n - 1)!$.

Exemplo 12. Quatro meninos podem formar uma roda de ciranda de $(PC)_4 = 3!$ maneiras diferentes.

Exemplo 13. O número de rodas de ciranda distintas que se pode formar com seis meninos, nas quais dois deles sempre estão juntos, é: $2 \cdot (PC)_5 = 2 \times 4! = 48$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP