Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 1 - Princípios de Contagem

Objetivos dessa aula:

- Apresentar a análise combinatória como os ramos da matemática que se preocupa com os métodos de contagem, sejam eles diretos ou indiretos.
- Enunciar e aplicar os princípios aditivo e multiplicativo da contagem.
- Enunciar e aplicar o princípio de contagem conhecido como princípio da inclusão e exclusão.

1. ANÁLISE COMBINATÓRIA

A origem da Análise Combinatória se remete a problemas relacionados a quadrados mágicos. Ela é decorrente da ampliação de técnicas que permitem contar, de forma direta ou indireta, o número de elementos de um dado conjunto, sendo estes agrupados sob determinadas condições. Enquanto, a Probabilidade nasceu dos problemas envolvendo jogos de azar.

Exemplo 1. Suponha, por exemplo, que desejemos contar os subconjuntos do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Solução. Contagem direta:

- Subconjuntos com zero elementos: $\varnothing$;
- Subconjuntos com um elemento: $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$;
- Subconjuntos com dois elementos: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{2,3\}$;
- Subconjuntos com três elementos: $\{1, 2, 3\}$.

Contando os subconjuntos listados, concluímos que o conjunto A possui 8 ($= 1 + 3 + 3 + 1$) subconjuntos.

Exemplo 1. Suponha, por exemplo, que desejemos contar os subconjuntos do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Solução. Contagem indireta:

Vamos pensar nos subconjuntos de A como sendo uma sequência ordenada de 3 letras que podem ser escolhidas entre S e N, obedecendo a seguinte convenção:

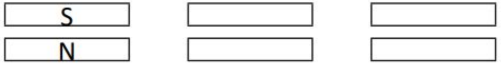
$(N,N,N) \longrightarrow \emptyset$; $(S,N,N) \longrightarrow \{1\}$; $(N,S,S) \longrightarrow \{2,3\}$; $(S,S,S) \longrightarrow \{1,2,3\}$;

Assim, desejamos saber quantas são as sequências ordenadas de três elementos.

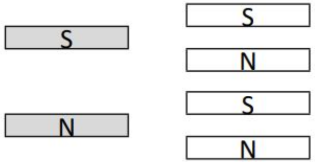
Exemplo 1. Suponha, por exemplo, que desejemos contar os subconjuntos do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Solução. Contagem indireta:

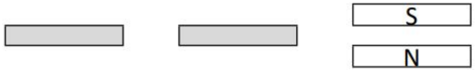
- Para escolher o 1º elemento temos duas opções – S ou N:



- Escolhido o 1º elemento, temos duas opções para a escolha do 2º – S ou N:



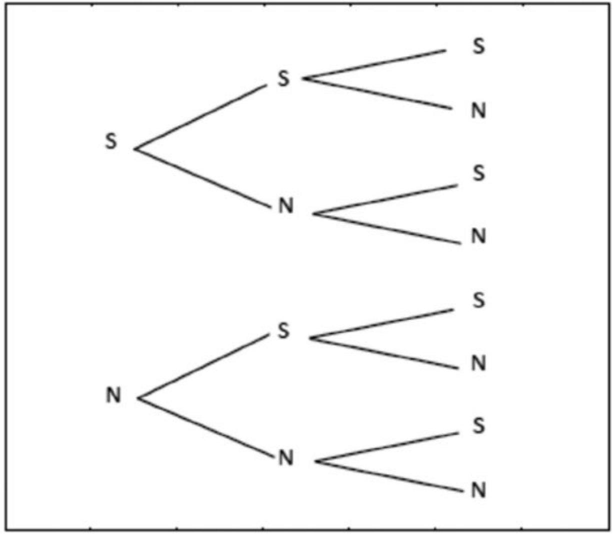
- E, finalmente, escolhidos os dois primeiros temos duas opções de escolha para o 3º – novamente, S ou N:



Perfazendo um total de 8 (= 2 x 2 x 2) sequências. Como cada sequência representa um subconjunto de $A = \{1, 2, 3\}$, podemos concluir que o conjunto A possui 8 subconjuntos.

Exemplo 1. Suponha, por exemplo, que desejemos contar os subconjuntos do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Árvore de possibilidades



Subconjuntos de A correspondentes às sequências

Sequência	Subconjunto
S S S	{1, 2, 3}
S S N	{1, 2}
S N S	{1, 3}
S N N	{1}
N S S	{2, 3}
N S N	{2}
N N S	{3}
N N N	∅

Para refletir! Um conjunto com 10 elementos possui quantos subconjuntos? E com 20 elementos?

Generalizando. Seja um conjunto A com n elementos. Neste caso, a sequência que devemos formar vai possuir n letras que podem ser escolhidas entre S e N e, portanto, o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é 2^n.

Exemplo 2. Em um festival de música há quatro palcos, cujos ingressos são cobrados à parte. Enzo curte as atrações dos quatro palcos, mas só dispõe de dinheiro para comprar dois bilhetes. De quantas maneiras Enzo poderá fazer a escolha dos palcos?

Solução. Denotando por A, B, C e D os quatro palcos, percebemos que Enzo pode fazer as seguintes combinações de ingressos:

AA	AB	AC	AD
	BB	BC	BD
		CC	CD
			DD

Ao todo, são 10 combinações de dois bilhetes.

Observe que com esta solução estamos aceitando a possibilidade de Enzo comprar dois bilhetes de um mesmo palco. Se este não for o caso, Enzo deve obrigatoriamente comprar bilhetes para palcos diferentes e então existem apenas 6 possibilidades. Aquelas destacadas na figura anterior.

Generalizando. Para conseguirmos a generalização, vamos examinar primeiramente o caso de cinco palcos, digamos A, B, C, D e E. As possíveis combinações seriam

AA	AB	AC	AD	AE
	BB	BC	BD	BE
		CC	CD	CE
			DD	DE
				EE

perfazendo um total de (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 15 combinações, se puderem ser comprados dois bilhetes de um mesmo palco, ou 15 - 5 (4 + 3 + 2 + 1 = 10) combinações, se não puderem ser comprados bilhetes iguais.

Generalizando. Assim, generalizando para n palcos, temos

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

possibilidades, se puderem ser comprados dois ingressos para um mesmo palco, ou

$$\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$$

somente com ingressos para palcos diferentes.

2. PRINCÍPIOS DE CONTAGEM

Nos exemplos anteriores foram apresentados e resolvidos problemas de contagem e, direta ou indiretamente, na sua resolução foi utilizado o princípio aditivo da contagem ou o princípio multiplicativo da contagem.

Agora, enunciaremos e aplicaremos esses princípios na contagem do número de elementos de certos conjuntos. Para isso, denotaremos por $n(X)$ o número de elementos do conjunto finito X.

2. PRINCÍPIOS DE CONTAGEM

Princípio aditivo da contagem

- Se A e B são conjuntos finitos disjuntos, isto é, $A \cap B = \varnothing$, então $A \cup B$ também é finito e vale a igualdade

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

- No caso em que A e B são conjuntos não disjuntos, isto é, $A \cap B \neq \varnothing$, vale a igualdade

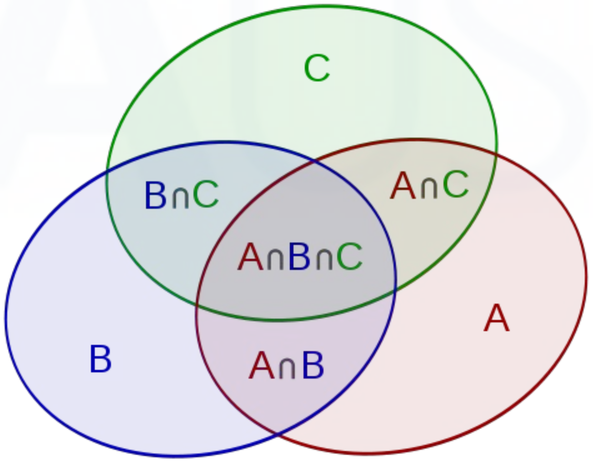
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

2. PRINCÍPIOS DE CONTAGEM

Princípio da inclusão e exclusão

- Se A, B e C são conjuntos finitos, então

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$
$$- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$
$$+ n(A \cap B \cap C)$$



2. PRINCÍPIOS DE CONTAGEM

Princípio multiplicativo da contagem. Se uma decisão A pode ser tomada de m maneiras distintas e, tomada a decisão A, outra decisão B pode ser tomada de n maneiras distintas, então o número de maneiras de tomar sucessivamente as decisões A e B é m x n.

Princípio multiplicativo da contagem. Caso geral. Se as decisões independentes A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_n podem ocorrer de m_1 , m_2 , m_3 , ... , m_n maneiras, respectivamente, então o número de possibilidades de tomar a decisão A_1 , seguida de A_2 , seguida de A_3 , e assim sucessivamente até tomar a decisão A_n é dado por $m_1 \times m_2 \times m_3 \times \ldots \times m_n$.

Exemplo 3. O menino possui 3 calças e 4 camisas e desejamos saber quantos conjuntos de calça e camisa é possível formarmos.

Solução. Basta que observemos que cada conjunto é formado a partir de duas decisões sucessivas: a escolha da calça, que pode ser feita de 3 maneiras, e a escolha da camisa, que pode ser feita de 4 maneiras. Assim, pelo princípio multiplicativo da contagem, o número de conjuntos possíveis de serem formados é 4 x 3, que é igual a 12.

Exemplo 4. Uma prova é constituída de 12 questões do tipo: verdadeiro ou falso. Quantas são as opções para resolver tal prova?

Solução.

Cada questão Q1, Q2, Q3, Q4, ... , Q12 tem exatamente 2 possíveis respostas: V ou F.

Assim, temos

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{12} = 4096$$

possíveis respostas para esta prova.

Exemplo 5. Se existem 4 empresas de ônibus e 3 de avião ligando a cidade X à cidade Y, a viagem pode ser feita de ônibus ou de avião de 7 modos diferentes.

Solução. A viagem pode ser feita de ônibus de 4 maneiras diferentes: O1, O2, O3 e O4, que formam o conjunto O; e de avião de 3 maneiras diferentes: A1, A2 e A3, que formam o conjunto A. Queremos determinar $n(O \cup A)$. Temos que

$$n(O \cup A) = n(O) + n(A) - n(O \cap A)$$

e como os conjuntos O e A são disjuntos,

$$n(O \cup A) = n(O) + n(A) = 4 + 3 = 7.$$

Exemplo 6. A senha de um cadeado é formada por uma sequência de quatro letras, escolhidas entre as 26 do alfabeto.

a) Quantas senhas podemos formar?

456.976

b) Quantas senhas com quatro letras distintas podemos formar?

358.800

c) Quantas senhas começando com vogal podemos formar?

87.880

d) Quantas senhas de letras distintas podem ser formadas começando e terminando com vogal?

11.040

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP