Atribuir valor para um parâmetro t e, a partir desse valor, obter cada par (x, y) de ponto ∈ cônica de forma independente.

O que é necessário para que esse processo ocorra?

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad , \quad t \in I$$

Eqs. Paramétricas das Cônicas

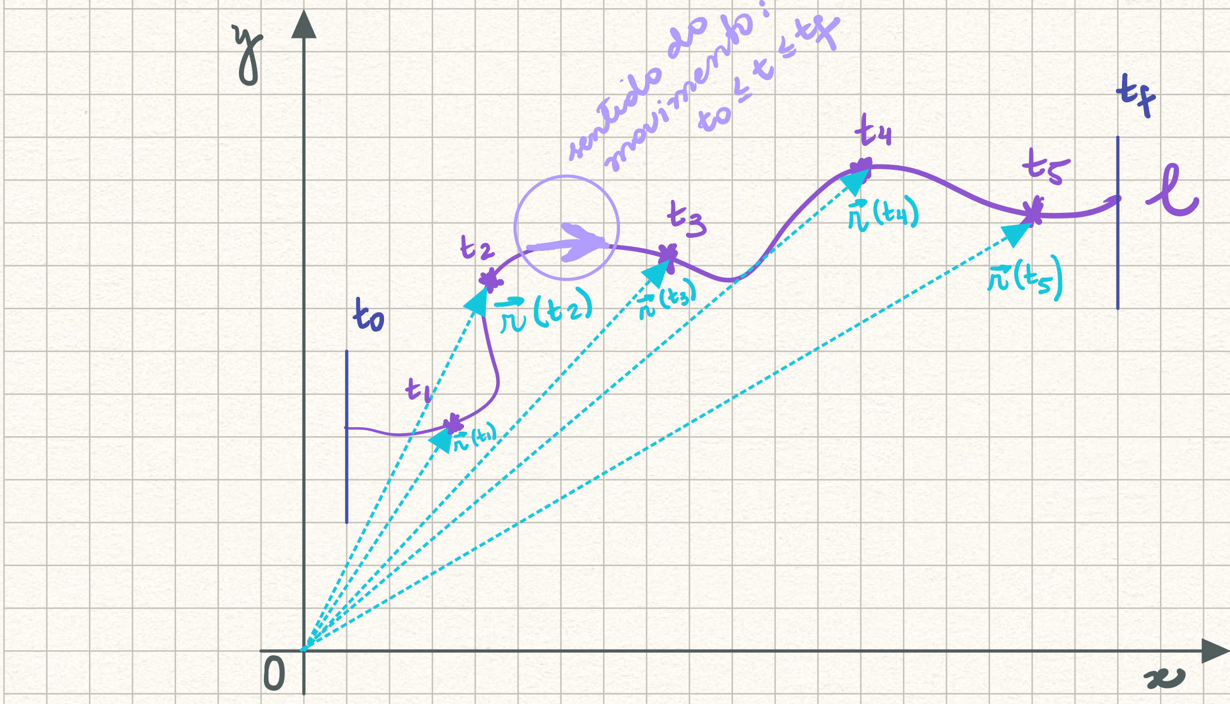
O parâmetro $t \in \mathbb{R}$, introduzido nas eqs. gerais (ou reduzidas) das cônicas, pode apresentar duas naturezas distintas, cada uma gerando um tipo de parametrização. São elas:

$t \longrightarrow$ escalar

$t \longrightarrow$ ângulo (rad)

Significado da parametrização de uma curva plana qualquer $\ell : y = f(x)$

$\vec{r}(t)$ ... representa o movimento da partícula, em função do parâmetro t, descrito por meio da trajetória definida pela curva ℓ.



$$\ell: y = f(x) \xrightarrow{\text{Param.}} \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in I$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{r}(t) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j}}$$

FUNÇÃO VETORIAL

- Limite
- Derivação
- Integração
- Módulo

COORDENADAS POLARES

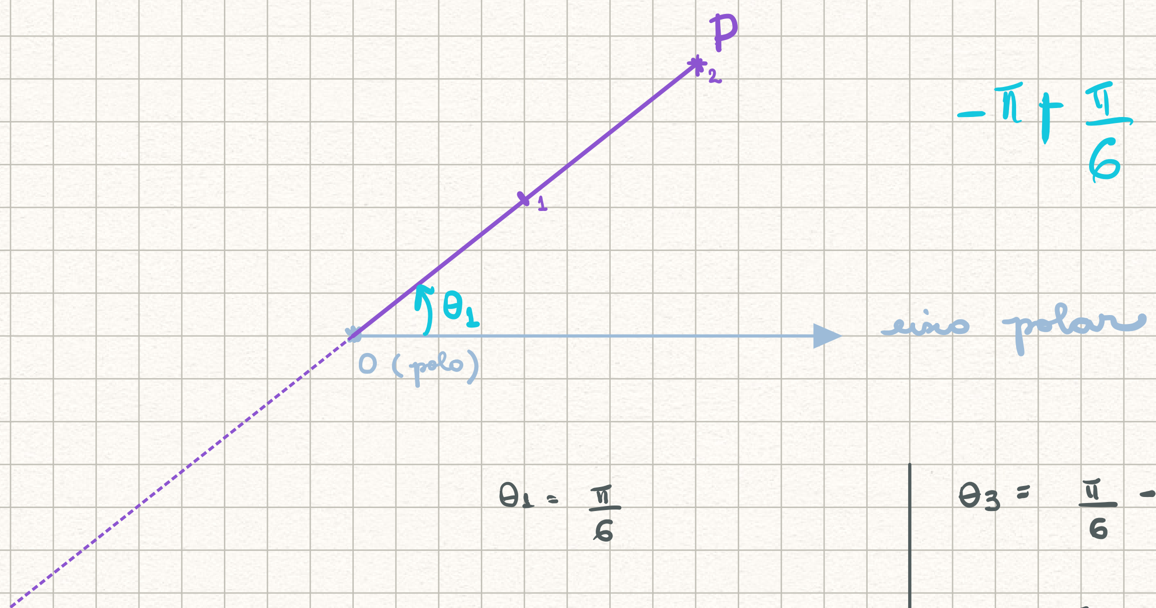
$P(r, \theta)$

r: $\pm\, \delta(O, P)$

θ: ângulo medido do eixo polar a r, em sentido ANTI-HORÁRIO.

Diferentemente das coord. cartesianas, em que um único par de coord. representa um ponto P, nas coord. polares há infinitas representações para o mesmo ponto:

i) $\underset{\theta_1}{P\left(2, \frac{\pi}{6}\right)} = \underset{\theta_2}{P\left(2, \frac{13\pi}{6}\right)} = \underset{\theta_3}{P\left(2, -\frac{11\pi}{6}\right)} = \underset{\theta_4}{P\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)}$



$-\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$

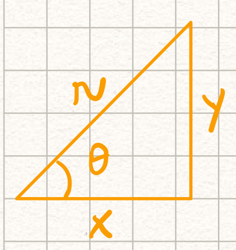
$\theta_1 = \frac{\pi}{6}$

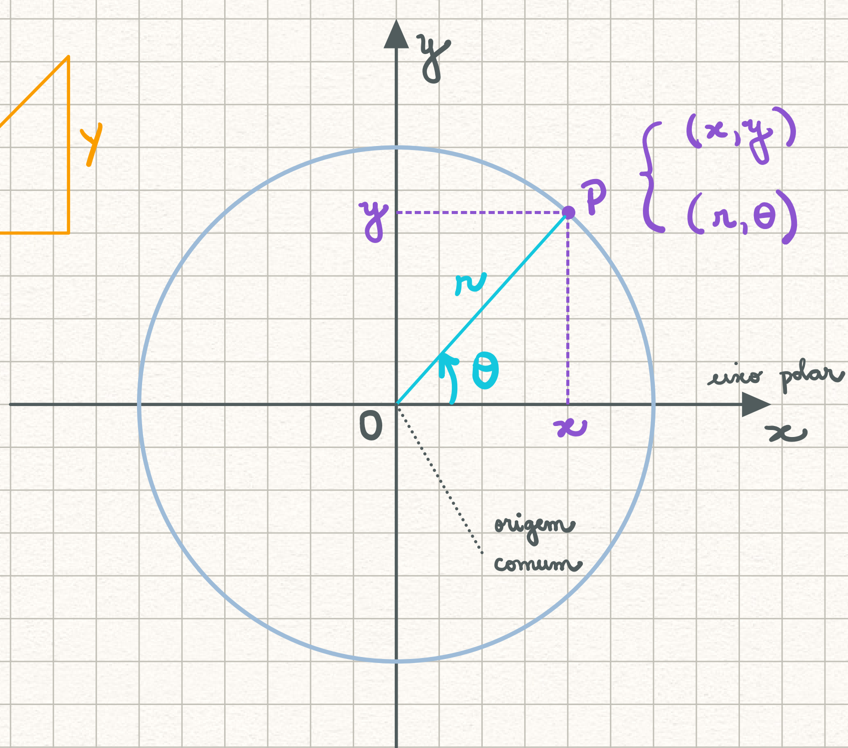
$\theta_2 = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$

$\theta_3 = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$

$\theta_4 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

Coordenadas Polares e Cartesianas





$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x} \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Equação Polar : $\begin{cases} r = f(\theta) \\ \theta = f(r) \end{cases} \longrightarrow$ descreve a correlação entre r e θ.

Simetria em Coord. Polares : $P(r, \theta)$

Simetria em Ox : $P_1(r, -\theta)$ ou $P_2(-r, \pi - \theta)$ satisfaz a EPolar.

$\therefore$ P_1 ou P_2 $\in$ lugar geométrico que a EP define.

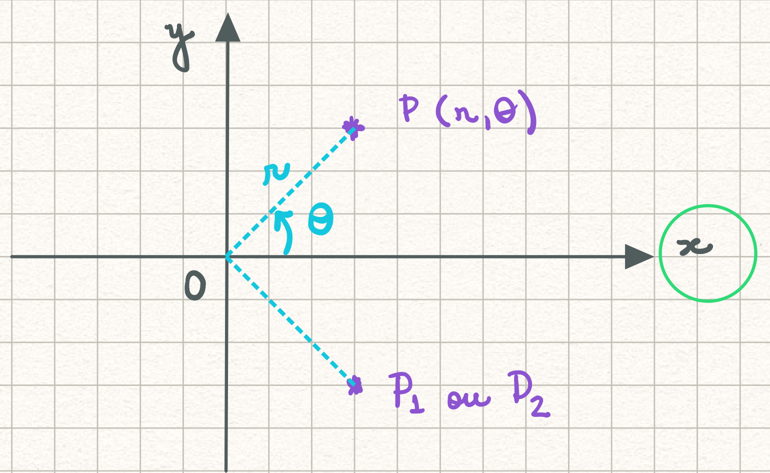
EXEMPLO

EP: $r = -4\cos\theta$

$P_2(-r, \pi - \theta) \longrightarrow$ EP : $-r = -4\cos(\pi - \theta)$

$r = 4(-\cos\theta)$

$r = -4\cos\theta$



curva simétrica em relação à horizontal

Intervalo θ : $0 \leq \theta \leq \pi$

Simetria em Oy : $P_1(-r, -\theta)$ ou $P_2(r, \pi - \theta)$ satisfaz a EPolar.

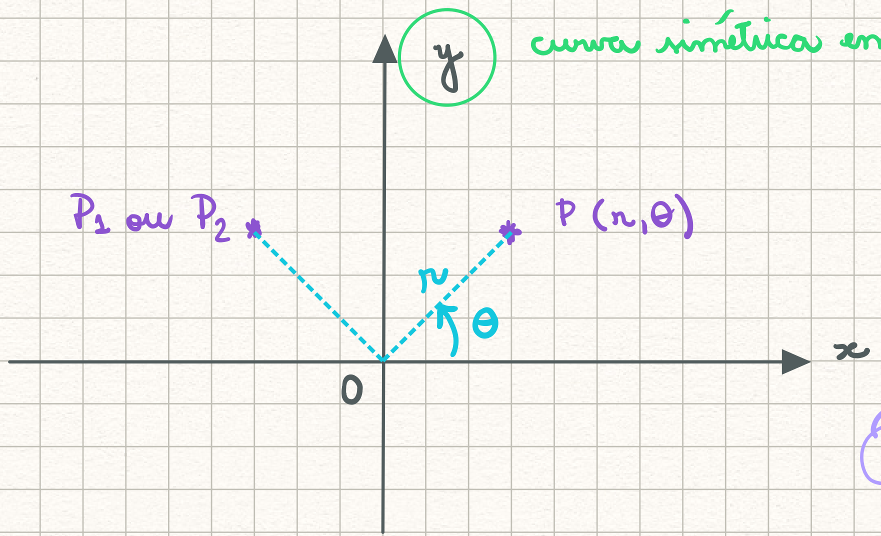
$\therefore$ P_1 ou P_2 $\in$ lugar geométrico que a EP define.

EXEMPLO

EP: $r = 2 - 2\,\text{sen}\,\theta$

$P_2(r, \pi - \theta) \longrightarrow$ EP : $r = 2 - 2\,\text{sen}(\pi - \theta)$

$r = 2 - 2(\text{sen}\,\theta) \longrightarrow r = 2 - 2\,\text{sen}\,\theta$



curva simétrica em relação à vertical

Intervalo θ : $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

Simetria em O (origem do eixo polar):

$P_1(-r,\theta)$ ou $P_2(r, \pi+\theta)$ satisfaz a EPolar.

$\therefore P_1$ ou $P_2 \in$ lugar geométrico que a EP define.

EXEMPLO

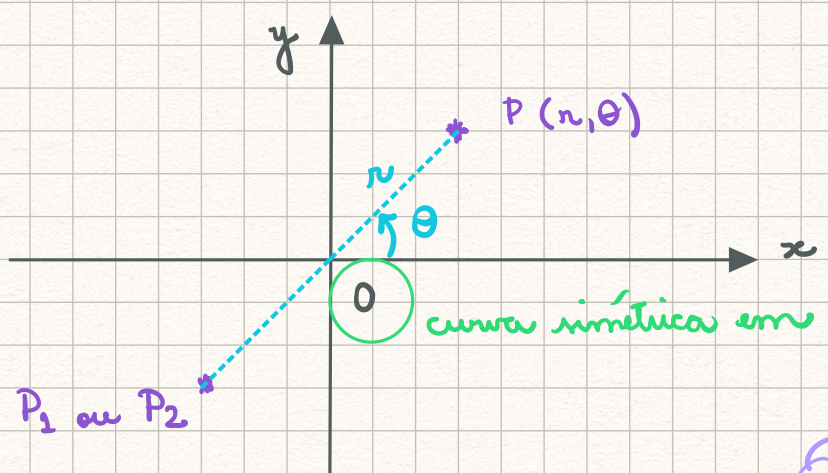
EP: $r = \operatorname{sen}(2\theta)$

$P_1(-r,\theta) \longrightarrow$ EP: $-r = \operatorname{sen}(2\theta) \longrightarrow \boxed{r = -\operatorname{sen}(2\theta)}$

INCONCLUSIVO

$P_2(r, \pi+\theta) \longrightarrow$ EP: $r = \operatorname{sen}[2(\pi+\theta)]$

$r = \operatorname{sen}(2\pi + 2\theta) \longrightarrow r = \operatorname{sen}(2\theta)$



curva simétrica em relação ao polo

Intervalo θ : $0 \leq \theta \leq \pi$

$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

EXEMPLO

$r = 1 - \cos\theta$ (Equação Polar : $r = f(\theta)$)

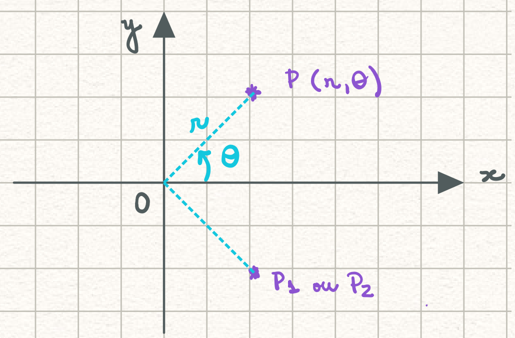
(i) Teste de Simetria

Simetria em Ox: $P_1(r, -\theta)$ ou $P_2(-r, \pi - \theta)$ satisfaz a EPolar.

$P_1 \longrightarrow$ EP : $r = 1 - \cos(-\theta)$

$r = 1 - \cos\theta$ //

$\therefore \ \exists$ Sim. Ox (horizontal)



Para a construção do gráfico : $0 \leq \theta \leq \pi$

(ii) Tabela de Pontos

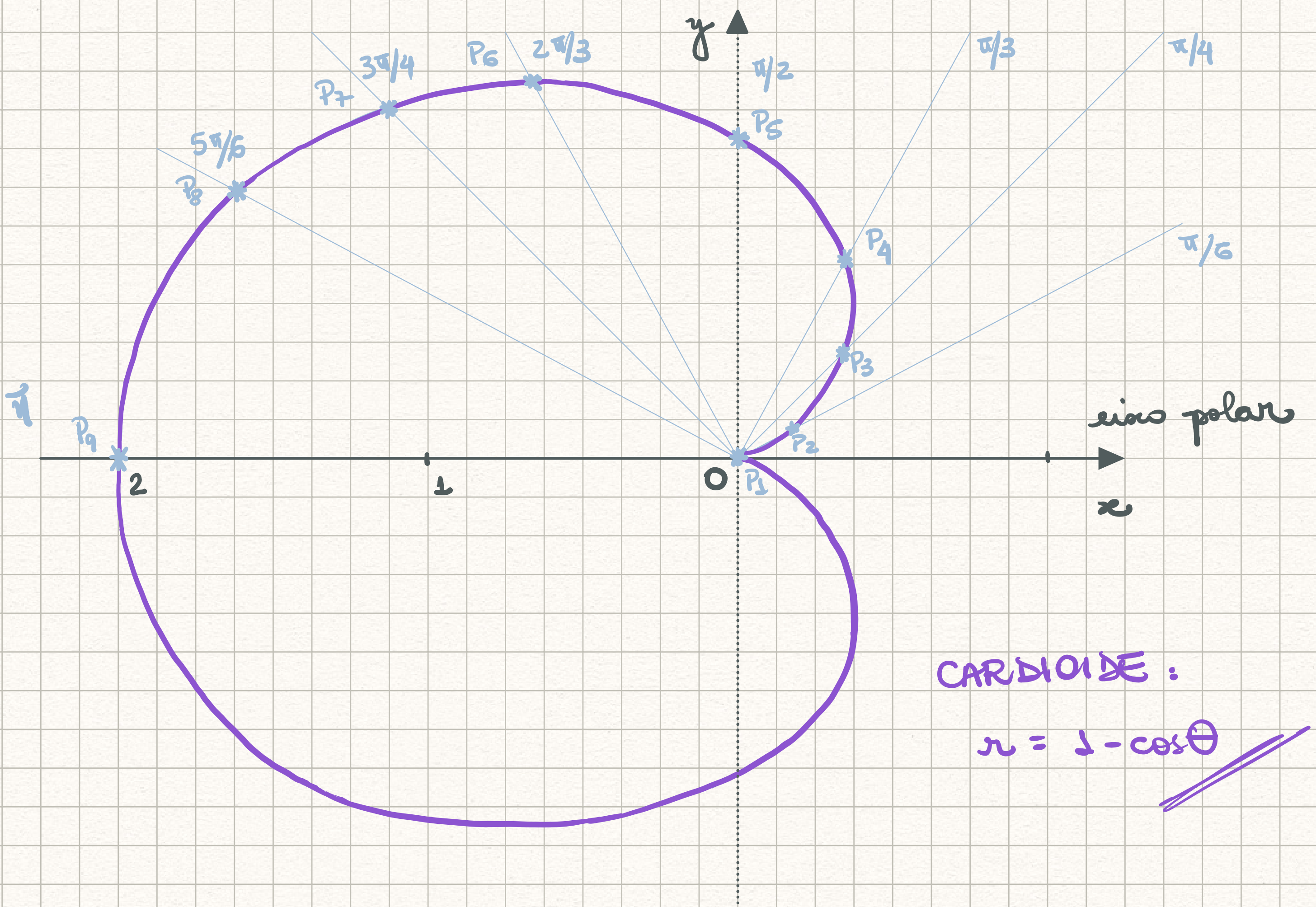
	θ	$\cos\theta$	$r = 1 - \cos\theta$
P_1	0	1	0
P_2	$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	0,13
P_3	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	0,30
P_4	$\pi/3$	$1/2$	0,50
P_5	$\pi/2$	0	1
P_6	$2\pi/3$	$-1/2$	1,50
P_7	$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	1,71
P_8	$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	1,87
P_9	π	-1	2

$\sqrt{2} = 1,4$

$\sqrt{3} = 1,7$

$P_i(r_i, \theta_i) \in$ lugar geométrico

(iii) Gráfico em $r\theta$



(iv) Coord. Polares $\longrightarrow$ Coord. Cartesianas

EP: $r = 1 - \cos\theta$

Substituir as seguintes relações na equação polar:

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \quad \therefore \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \\ x = r\cos\theta \quad \therefore \quad \cos\theta = \dfrac{x}{r} \longrightarrow \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Portanto:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (\ )^2$$

$$x^4 + x^2y^2 + x^3 + x^2y^2 + y^4 + xy^2 + x^3 + xy^2 + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + y^2$$

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$$

↳ Eq. cartesiana equivalente da EP: $r = 1 - \cos\theta$