PTC-3440 Modelos Probabilísticos

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Aulas 22 - 23 - 2021

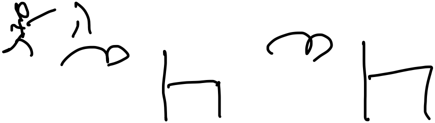
PTC-EPUSP

Modelos Mais Gerais

Modelo dos Engraxates - 1

Considere um local de engraxar sapatos que consiste de 2 cadeiras. Na cadeira 1 o cliente tem o sapato limpo e polido. Na cadeira 2 o sapato é engraxado. Os tempos de serviço nas 2 cadeiras são independentes e exponencialmente distribuídos com taxas μ_1 e μ_2 respectivamente. Clientes em potencial chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa λ, e este cliente só entras se **as 2 cadeiras estiverem desocupadas**.

1. Qual é a proporção de clientes que entra na loja?
2. Qual é o número médio de clientes na loja?
3. Qual é o tempo médio gasto pelos clientes que entram na loja?



Cadeira 1 — Limpo e Polido — μ_1

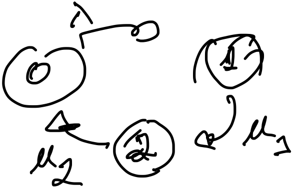
Cadeira 2 — Engraxado — μ_2

Só entra se as 2 cadeiras estão livres (Modelo 1)

Estado:

- 0 $\rightarrow$ sistema vazio
- 1 $\rightarrow$ cliente na cadeira 1
- 2 $\rightarrow$ cliente na cadeira 2

Estados 1 e 2 $\Leftrightarrow$ Porta fechada.



$$\boxed{P_0 + P_1 + P_2 = 1}$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} P_0$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} P_0$$

Equações de Balanço:

Estado Sai = Entra

0 $\lambda P_0 = \mu_2 P_2$

1 $\mu_1 P_1 = \lambda P_0$

2 $\mu_2 P_2 = \mu_1 P_1$

Porta de entrada: Estado 0

$$P_0 + P_1 + P_2 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2}\right) P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2}}, \quad P_1 = \frac{\lambda/\mu_1}{1 + \lambda/\mu_1 + \lambda/\mu_2}$$

$$P_2 = \frac{\lambda/\mu_2}{1 + \lambda/\mu_1 + \lambda/\mu_2}$$

$$\lambda_a = \lambda P_0$$

a) P_0

b) $L = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 = \dfrac{\lambda/\mu_1 + 2\lambda/\mu_2}{1 + \lambda/\mu_1 + \lambda/\mu_2}$

c) $W = \frac{L}{\lambda_a} = \frac{L}{\lambda P_0}$

Modelo dos Engraxates - 2

Considere o modelo dos engraxates mas agora o cliente entra na loja **se a cadeira 1 estiver livre**.

1. Qual é a proporção de clientes que entra na loja?
2. Qual é o número médio de clientes na loja?
3. Qual é o tempo médio gasto pelos clientes que entram na loja?

Modelo 2: Cliente entra se a cadeira 1 estiver livre.

Estados:

(0,0) → sistema vazio

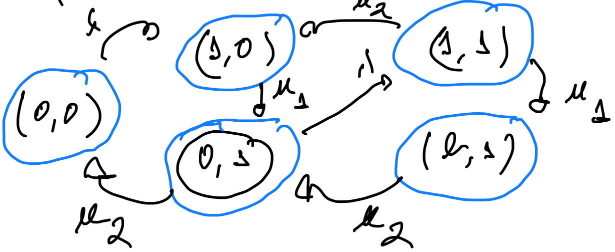
(1,0) → cadeira 1 ocupada, cadeira 2 livre

(0,1) → cadeira 1 livre, cadeira 2 ocupada

(1,1) → cadeira 1 ocupada em serviço
cadeira 2 ocupada em serviço

(b,1) → cadeira 1 ocupada sem serviço,
cadeira 2 ocupada com serviço

Diagrama de Markov



$\lambda_a = \lambda(P_{00} + P_{01})$

Portas de Entrada: $(0,0)$, $(0,1)$

Porta Fechada: $(1,0)$, $(1,1)$, $(b,1)$

a) % clientes entra na loja $= P_{00} + P_{01}$

b) $L = 1.(P_{10} + P_{01}) + 2(P_{11} + P_{b1})$

c) $W = \dfrac{L}{\lambda(P_{00} + P_{01})}$

Verifique: $P_{01} = \frac{\lambda}{\mu_2} P_{00}$, $P_{10} = \frac{\lambda^2}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)} P_{00}$

$$P_{10} = \left(\frac{\mu_1+\mu_2+\lambda}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}\right)\lambda P_{00}$$

$$P_{b1} = \frac{\lambda^2\mu_1}{\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)} P_{00}$$

$$P_{00}\left(1 + \frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda(\mu_1+\mu_2+\lambda)}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)} + \frac{\lambda^2}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)} + \frac{\lambda^2\mu_1}{\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)}\right) = 1$$

Exemplos: $\lambda = 1/\text{hora}$

mais rápido cadeira 2

mais rápido cadeira 1

2 possibilidades: I $\begin{cases} \mu_1 = 1/h \\ \mu_2 = 2/h \end{cases}$ ou II $\begin{cases} \mu_1 = 2/h \\ \mu_2 = 1/h \end{cases}$

Caso (II) Mais rápido $\mu_1 = 1, \ \mu_2 = 2$

Cadeia 2

$$P_{00}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.3}\right) = 1 \Rightarrow P_{00} = \frac{12}{37}$$

$$P_{01} = \frac{1}{2} P_{00} = \frac{6}{37}, \quad P_{10} = \frac{16}{37}, \quad P_{11} = \frac{2}{37}, \quad P_{21} = \frac{1}{37}$$

a) % clientes perdidos $= 1 - P_{00} - P_{01} = 1 - \frac{18}{37} = \frac{19}{37} \cong 51{,}3\%$

b) $$L = \frac{6+16}{37} + 2\left(\frac{2+1}{37}\right) = \frac{28}{37}$$

c) $$W = \frac{L}{\lambda(P_{00}+P_{01})} = \frac{28/\cancel{37}}{18/\cancel{37}} = \frac{28}{18} = 1{,}55 \text{ horas}$$

Caso II Mais rápido Cadeia 1 $\Rightarrow \underline{\mu_1 = 2}, \mu_2 = 1$

$P_{00} = \frac{3}{11}$, $P_{10} = \frac{2}{11}$, $P_{11} = \frac{1}{11}$, $P_{01} = \frac{3}{11}$, $P_{b1} = \frac{2}{11}$

a) % clientes perdidos $= 1 - P_{00} - P_{01} = 1 - \frac{\cancel{6}}{11} = \frac{5}{11} = 45{,}4\%$ (6)

b) $L = \frac{2+3}{11} + \frac{2(1+2)}{11} = 1$ (7)

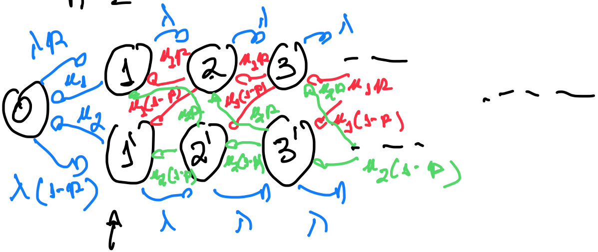
c) $W = \frac{L}{\lambda(P_{00}+P_{01})} = \frac{1}{6/11} = \frac{11}{6} = 1{,}834$ (4)

Estados:

0 = sistema vazio

n = n clientes no sistema e o primeiro faz o serviço 1

n' = " " " " " " " " " 2



② $L = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(P_n + P_{n'}\right)$

③ $W = \frac{L}{\lambda}$, $W_Q = W - \left(\frac{p}{\mu_1} + \frac{(1-p)}{\mu_2}\right)$, $L_Q = \lambda W_Q$

Filas com 2 tipos de serviço

Considere uma fila única com chegadas de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$. Cada cliente que chega pode escolher um dentre 2 serviços. O tempo do serviço 1 é exponencial com parâmetro μ_1, e o tempo do serviço 2 é exponencial com parâmetro μ_2. Cada cliente que chega escolhe o serviço 1 com probabilidade $0 < p < 1$, e o serviço 2 com probabilidade 1-p.

1. Escreva as equações de balanço. Qual é a condição de equilíbrio?
2. Qual é o número médio de clientes no sistema e na fila?
3. Qual é o tempo médio gasto no sistema e na fila?

① Equações de Balanço

Estado	Sai	=	Entra
0	λP_0	=	$\mu_1 P_1 + \mu_2 P_{1'}$
1	$(\lambda+\mu_1) P_1$	=	$\lambda p P_0 + \mu_1 p P_2 + \mu_2 p P_{2'}$
→ 1'	$(\lambda+\mu_2) P_1'$	=	$\lambda(1-p) P_0 + \mu_1 (1-p) P_2 + \mu_2 (1-p) P_{2'}$
n	$(\lambda+\mu_1) P_n$	=	$\lambda P_{n-1} + \mu_1 p P_{n+1} + \mu_2 p P_{n+1'}$
n'	$(\lambda+\mu_2) P_{n'}$	=	$\lambda P_{n-1'} + \mu_1 (1-p) P_{n+1} + \mu_2 (1-p) P_{n+1'}$

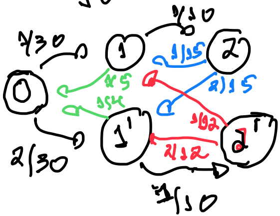
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n + \sum_{n'=1}^{\infty} P_{n'} = 1$$

Condição de Equilíbrio

$$\frac{p}{\mu_1} + \frac{(1-p)}{\mu_2} < \frac{1}{\lambda}$$

Capacidade Limitada $N = 2$ (máximo de 2 pessoas no sistema)

$\lambda = \frac{1}{10}$ /min , $\mu_1 = \frac{1}{5}$ /min , $\mu_2 = 1/4$ min $\quad p = 1/3$



Estado	: Sai = Entra
$\to$ 0	$\frac{1}{10} P_0 = \frac{1}{5} P_1 + \frac{1}{4} P_{1'}$ $\quad (\times 40)$
$\to$ 1	$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) P_1 = \frac{1}{30} P_0 + \frac{1}{15} P_2 + \frac{1}{12} P_{2'}$
$\times$ 1'	$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\right) P_{1'} = \frac{2}{30} P_0 + \frac{2}{15} P_2 + \frac{2}{12} P_{2'}$
$\to$ 2	$\frac{1}{5} P_2 = \frac{1}{10} P_1$
$\to$ 2'	$\frac{1}{4} P_{2'} = \frac{1}{10} P_{1'}$

$\to$ $P_0 + P_1 + P_{1'} + P_2 + P_{2'} = 1$

5 variáveis

$$P_2 = \frac{1}{2} P_1$$

$$P_{2'} = \frac{2}{5} P_{1'}$$

$$\frac{3}{10} P_1 = \frac{1}{30} P_0 + \frac{1}{15}\,\frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{12}\,\frac{2}{5} P_{1'}$$

$$\underbrace{\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{30}\right)}_{8/30} P_1 = \frac{1}{30} P_0 + \frac{1}{30} P_{1'} \Rightarrow \underline{8P_1 = P_0 + P_{1'}}$$

$$\boxed{4P_0 = 8P_1 + 10P_{1'}}$$

$$\Rightarrow \underline{8P_1 = 4P_0 - 10P_{1'}}$$

$$0 = -3P_0 + 11P_{1'}$$

$$\Rightarrow P_{1'} = \frac{3}{11} P_0, \quad P_1 = \frac{1}{8} P_0 + \frac{1}{8} P_{1'} = \frac{1}{8} P_0 + \frac{3}{88} P_0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1 = \frac{14}{88} P_0}, \quad \Rightarrow P_2 = \frac{7}{88} P_0, \quad P_{2'} = \frac{6}{55} P_0$$

$$P_0 + P_1 + P_{1'} + P_2 + P_{2'} = P_0\left[1 + \frac{7}{44} + \frac{3}{11} + \frac{7}{88} + \frac{6}{55}\right] = 1$$

$$P_0\left(\frac{713}{440}\right) = 1$$

$$P_0 = \frac{440}{713} \approx 61{,}71\%$$

$$P_1 = \frac{70}{713} \approx 9{,}81\%$$

$$P_{1'} = \frac{120}{713} \approx 16{,}83\%$$

1 cliente sendo atendido

$$P_2 = \frac{35}{713} \approx 4{,}91\%$$

$$P_{2'} = \frac{48}{713} \approx 6{,}74\%$$

$$100\%$$

2 clientes

1 em atendimento

1 na fila

a) $L = \dfrac{70+120}{713} + 2\left(\dfrac{35+48}{713}\right) = \dfrac{356}{713} \approx 0{,}5$

$$W = \frac{L}{\lambda_a} \quad , \quad \lambda_a = \lambda\left(P_0 + P_1 + P_1\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{630}{713}\right)$$

$$W = \frac{\dfrac{356}{\cancel{713}}}{\dfrac{1}{10}} \cdot \frac{10}{\dfrac{630}{\cancel{713}}} = \frac{356}{63\cancel{0}} \cdot \cancel{10} = 5{,}65 \text{ mins}$$

b) $W_q = W - \left(\dfrac{p}{\mu_1} + \dfrac{(1-p)}{\mu_2}\right) = \dfrac{356}{63} - \underbrace{\left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{8}{3}\right)}^{13/3} = \dfrac{83}{63} \text{ mins}$

$= 1{,}32$ mins

$$L_q = \lambda_a W_q = \frac{1}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{630}}{713} \cdot \frac{83}{\cancel{63}} = \frac{83}{713} \simeq 0{,}12$$

c) % ocioso $= P_0 = 61,71\%$

d) % clientes que entra $= P_0 + P_1 + P_2 = 88,36\%$

Fila com capacidade para atender vários clientes

Considere uma fila com 1 servidor com capacidade de atender até 2 clientes simultaneamente. Quando o serviço termina ele atende os 2 próximos clientes. Se houver apenas 1 cliente, ele atende esse cliente. Considere o tempo de serviço exponencial com parâmetro μ e chegadas ocorrem de acordo com um processo de Poisson com taxa λ.

1. Escreva as equações de balanço. Qual é a condição de equilíbrio?
2. Qual é o número médio de clientes no sistema e na fila?
3. Qual é o tempo médio gasto no sistema e na fila?

Estado = número de pessoas na <u>fila</u>

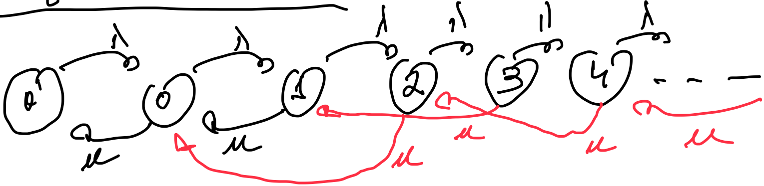
Estados

$0'$ = nenhum cliente sendo servido

0 = servidor ocupado, fila vazia
com 1 ou 2 clientes

n = n clientes na fila $n \geq 1$

Diagrama de Markov:



Equações de Balanço:

$$P_{0'} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

Estado	Sai	=	Entra
$0'$	$\lambda P_{0'}$	=	μP_0
0	$(\lambda+\mu) P_0$	=	$\lambda P_{0'} + \mu P_1 + \mu P_2$
$n \geq 1$	$(\lambda+\mu) P_n$	=	$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+2}$

$P_{0'} = \frac{\mu}{\lambda} P_0$: Chute $P_n = \alpha^n P_0$ $\qquad \alpha = ?$

$$n \geq 1 \Rightarrow (\lambda+\mu) \underbrace{P_n}_{\alpha^n P_0} = \lambda \underbrace{P_{n-1}}_{\alpha^{n-1} P_0} + \mu \underbrace{P_{n+2}}_{\alpha^{n+2} P_0}$$

$$(\lambda+\mu) \alpha^n \cancel{P_0} = \lambda \alpha^{n-1} \cancel{P_0} + \mu \alpha^{n+2} \cancel{P_0}$$

$$(\lambda+\mu)\alpha^n = \cancel{\alpha^{n-1}}\left(\lambda + \mu\alpha^2\right) \Rightarrow$$

$$\alpha\ \cancel{\alpha^{n-1}}$$

$$(\lambda+\mu)\alpha = \lambda + \mu\alpha^3 \Rightarrow \mu\alpha^3 - \alpha(\lambda+\mu) + \lambda = 0$$

$$\underbrace{(\alpha-1)(\mu\alpha^2 + \mu\alpha - \lambda)}_{} = 0$$

0,17

$$\mu\alpha^3 + \cancel{\mu\alpha^2} - \lambda\alpha - \cancel{\mu\alpha^2} - \mu\alpha + \lambda = \mu\alpha^3 - \alpha(\lambda+\mu) + \lambda = 0$$

Calcular as raízes de $\mu\alpha^2 + \mu\alpha - \lambda = 0$

$$\alpha^2 + \alpha - \lambda/\mu = 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda/\mu}}{2}}$$

Condição de Equilíbrio

$$0 < \alpha < 1$$

$$\alpha < 1 \iff -1+\sqrt{1+4\lambda/\mu} < 2 \iff$$

$$\sqrt{1+4\lambda/\mu} < 3 \iff 1+\frac{4\lambda}{\mu} < 9 \iff$$

$$\frac{4\lambda}{\mu} < 8 \iff \frac{\lambda}{\mu} < 2 \qquad \frac{1}{2\mu} < \frac{1}{\lambda}$$

$$P_0' + \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow \left[\frac{\mu}{\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\right] P_0 = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow \left[\frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{1-\alpha}\right] P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{\lambda(1-\alpha)}{\lambda + \mu(1-\alpha)} \Rightarrow \begin{cases} P_n = \alpha^n \dfrac{\lambda(1-\alpha)}{\lambda + \mu(1-\alpha)}, & n \geq 0 \\ P_{0'} : \dfrac{\mu(1-\alpha)}{\lambda + \mu(1-\alpha)} \end{cases}$$

Concluimos que

$$L_Q = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = \frac{\lambda(1-\alpha)}{\lambda + \mu(1-\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha^n \quad \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

$$= \frac{\lambda \cancel{(1-\alpha)}}{\lambda + \mu(1-\alpha)} \frac{\alpha}{(1-\alpha)^{\cancel{2}}} = \frac{\lambda \alpha}{(1-\alpha)\left[\lambda + \mu(1-\alpha)\right]}$$

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda}, \quad W = W_Q + \frac{1}{\mu}, \quad L = \lambda W_Q$$

Example: $\frac{1}{\lambda} = 4$ mins, $\frac{1}{\mu} = 3$ mins

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} < 2 \quad \text{OK}$$

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + \cancel{4} \cdot \frac{3}{\cancel{4}}}}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\frac{1}{4}\left(1 - 1/2\right)}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{3}{10}\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$P_{0'} = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{10} = \frac{2}{5}$$

% ocioso $= P_{0'} = 40\%$

$$L_Q = \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) \Big/ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}$$

$$W_Q = \frac{3/5}{1/4} = \frac{12}{5} \text{ mins} = 2{,}4 \text{ mins}$$

$$W = \frac{12}{5} + 3 = 5{,}4 \text{ mins}$$

$$L = \lambda W = \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{5} = 1{,}35$$