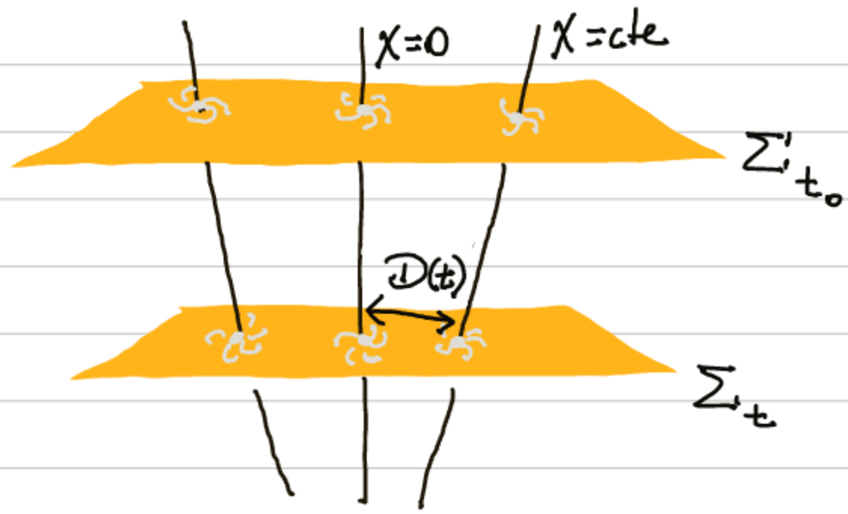
Lei de Hubble

Em 1929, Edwin Hubble estabeleceu a lei observacional que leva seu nome, de acordo com a qual, em média, as galáxias estão se afastando umas das outras com uma velocidade de afastamento proporcional à distância entre elas. Tal observação dependeu do desenvolvimento de métodos independentes de medida de velocidade (através de redshift da luz emitida pelas galáxias) e de distância (através do estabelecimento das chamadas "velas-padrão" — sobre as quais falaremos mais adiante no curso).

Vamos, aqui, mostrar como a Lei de Hubble se encaixa naturalmente no contexto da cosmologia homogênea e isotrópica.

Lei de Hubble geométrica



A distância física entre uma galáxia localizada na coordenada $\chi = cte$ e a nossa (em $\chi=0$), medida ao longo da hipersuperfície Σ_t, é dada por:

$$D(t) = a(t)\,\chi$$ (certifique-se que entende o porquê.)

Logo, a taxa com que essa distância muda com o tempo (-próprio) — chamada de velocidade de recessão — é dada por

usaremos "˙" p/ derivada em relação ao tempo-próprio dos observadores isotrópicos

$$v_r := \frac{dD}{dt} = \frac{da}{dt}\chi = \frac{\dot a}{a} a\chi = \frac{\dot a}{a} D .$$

Assim, vemos que em cada instante t, a velocidade de recessão entre as galáxias é <u>exatamente</u> proporcional à distância entre elas:

$$\boxed{v_r(t) = H(t) \cdot D(t)},$$

onde

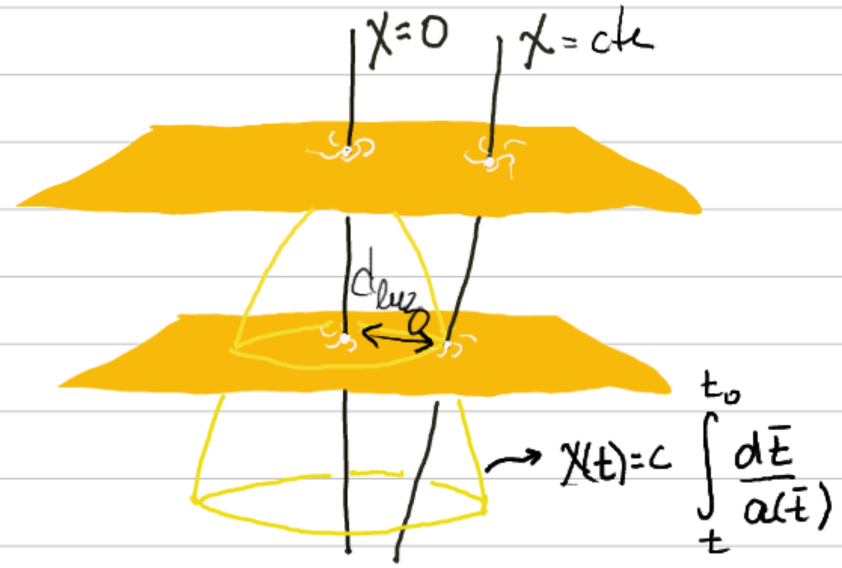
$$\boxed{H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{d \ln a(t)}{dt}}$$

é o chamado <u>parâmetro de Hubble</u> no instante t. O valor de $H(t)$ hoje, $H_0 := H(t_0)$, é chamado de <u>constante de Hubble</u>. Reforçando: a lei de Hubble acima relaciona a velocidade de afastamento entre galáxias no instante t com a distância entre as galáxias no <u>mesmo</u> instante t.

<u>Exercício</u>: Para o caso $a(t) \propto t^\lambda$, $\lambda > 0$, calcule o parâmetro de Hubble como função de t e, então, calcule a idade do universo (desde quando $a = 0$) em função da <u>constante</u> de Hubble.

- <u>Lei de Hubble observacional</u>

A relação exata de linearidade entre v_r e D dada pela Lei de Hubble acima não tem muita relevância direta, pois relaciona grandezas que não podem ser medidas de nosso ponto de observação. Primeiramente, o afastamento das galáxias é inferido não por uma medida direta de v_r (à qual nem temos acesso instantâneo), mas pelo redshift da luz emitida pelas galáxias ao longo de nosso cone-de-luz passado. Assim, uma relação aparentemente mais útil seria uma que vinculasse z a d_{luz} da aula anterior:



$$d_{luz} = c\,a \int_t^{t_0} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})} = c\,a \int_a^{a_0} \frac{d\bar{a}}{\dot{\bar{a}}\bar{a}} \Rightarrow \boxed{d_{luz}(z) = \frac{c}{(1+z)} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}}$$

onde usamos que $a = \frac{a_0}{(1+z)} \Rightarrow da = -\frac{a_0}{(1+z)^2}dz = -\frac{a^2}{a_0}dz$

e $H(z)$ é o parâmetro de Hubble em função do redshift:

$$H(z) = \left.\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right|_{t=t(z)}$$

Note que, ao contrário do que acontece com a lei de Hubble geométrica, agora a relação entre z e d_{luz} depende da história do parâmetro de Hubble e não apenas de seu valor num único instante. Se por um lado isso traz complicações, por outro é justamente o que possibilita investigarmos a história da evolução do universo ao observarmos a relação entre distância e redshift no nosso universo.

Exercício: Usando $a(t) \propto t^{\lambda}$, $\lambda > 0$, obtenha a relação explícita entre z e $d_{luz}(z)$, mostrando explicitamente que, embora a relação seja linear p/ d_{luz} "pequeno",

$$z = \frac{H_0}{c} d_{luz} + \mathcal{O}\left(H_0^2 d_{luz}^2 / c^2\right),$$

desvios da linearidade são importantes à medida que galáxias mais distantes são observadas. Mostre como esse desvio depende de λ.

Embora a relação entre z e d_{luz} seja, sem dúvida, mais significativa do ponto de vista observacional, ela ainda não é a relação que de fato é colocada à prova pelas observações de fato realizadas. Isso porque embora tenhamos substituído a velocidade v_r — impossível de se observar — pelo redshift z — este sim diretamente mensurável, a grandeza d_{luz} (distância entre as galáxias medida ao longo de cada superfície Σ_t) também não é diretamente mensurável em escalas cosmológicas. Daí, surge a necessidade de definições mais convenientes, do ponto de vista observacional, de distâncias.

Medindo distâncias cosmológicas

Como vimos na aula anterior, a relação entre o redshift cosmológico e a distância de galáxias distantes é sensível a (e, portanto, provê uma maneira de se investigar) a evolução do parâmetro de Hubble ao longo da história do universo. No entanto, para que seja útil, as grandezas relacionadas devem ser passíveis de serem medidas independentemente. Já vimos que o redshift cosmológico $z = \Delta\lambda/\lambda$ de fato satisfaz tal condição. No entanto, a grandeza d_{luz} (assim como D) não é diretamente observável a partir de nossa limitada perspectiva. Assim, é necessário introduzirmos uma (ou mais) noção operacional/observacional de distância.

- Distância luminosa

Suponha que conheçamos, por alguma razão, a quantidade de energia emitida isotropicamente por um objeto, por unidade de tempo. Chamemos essa quantidade de "luminosidade" L. À medida que essa energia emitida se afasta do objeto, a "intensidade" I (energia por unidade de tempo, por unidade de área) decai, pela "diluição" dessa energia em frentes esféricas cada vez maiores. Com isso, se soubermos o valor de L (como já suposto) e medirmos o valor de I em nossa posição, podemos tentar inferir a distância a que a fonte está de nós. De fato, se estivéssemos lidando com fontes paradas em espaço plano, a relação entre distância geométrica D, intensidade I e luminosidade L seria simplesmente

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}$$

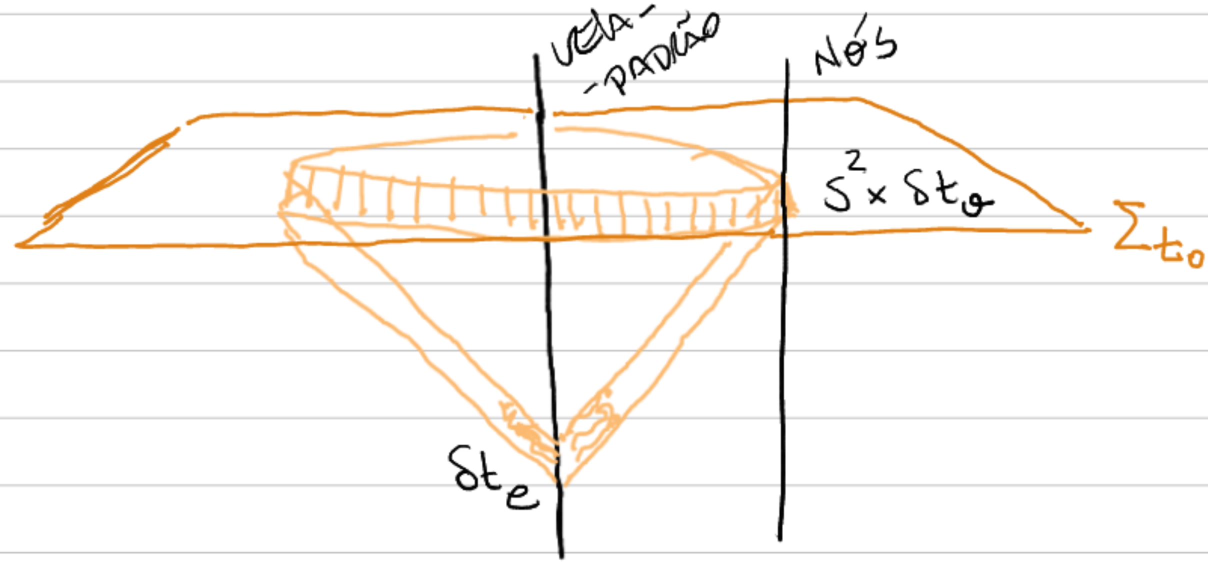
Num universo em expansão com seção espacial possivelmente curva, I, L e D não se relacionam assim de modo tão simples — e, de fato, não há uma relação pré-fixada (independente da evolução do parâmetro de Hubble) entre essas grandezas.

Objetos astronômicos cuja luminosidade intrínseca L é conhecida são chamados de <u>velas-padrão</u>. Medindo-se a intensidade I da energia emitida por esses objetos, podemos <u>definir</u> uma grandeza com dimensão de distância através de

$$\boxed{d_L := \sqrt{\frac{L}{4\pi I}}}$$

Tal grandeza é chamada de <u>distância luminosa</u>. Embora d_L não seja, em geral, a distância geométrica D no caso de universos em expansão, sua clara conveniência e "simplicidade" observacional (além de sua sensibilidade à história da evolução do universo) fazem dela a grandeza ideal para se correlacionar com o redshift numa lei de Hubble observacional. Abaixo, calculamos a relação teórica entre z e d_L, que, então, pode ser confrontada com as observações.

Na figura a seguir representamos a linha-de-mundo de uma vela-padrão, colocada, por conveniência em $\chi = 0$



Apenas por simplicidade (o resultado final é independente disso), suponhamos que toda energia emitida pela fonte se dê na forma de fótons de uma única frequência f_e. O número de fótons emitidos no intervalo δt_e é dado, então, por

$$N = \frac{L \cdot \delta t_e}{h f_e}$$, onde h é a

constante de Planck. Esses fótons serão os mesmos que atravessarão a esfera S^2 no intervalo de tempo δt_0. Porém, a energia de cada um desses fótons sofre o efeito do redshift cosmológico, sendo observados, em t_0, com frequência f_0. Assim, a intensidade I observada em Σ_{t_0} é calculada por:

$$I = \frac{\text{Energia}}{\text{Área} \times \text{tempo}} = \frac{N h f_0}{\text{Área}\ \delta t_0} = \frac{L\, \delta t_e f_0}{f_e\, \delta t_0\, \text{Área}} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{L}{\text{Área}},$$

onde fizemos uso dos resultados já mostrados anteriormente, $\frac{f_0}{f_e} = \frac{1}{1+z} = \frac{\delta t_e}{\delta t_0}$.

Falta, ainda, substituirmos a expressão da área das esferas S^2. Neste ponto, a curvatura da seção espacial entra em cena, pois para uma distância coordenada χ, vimos que

$$\text{Área} = \begin{cases} 4\pi (\operatorname{sen}\chi)^2 a_0^2, & S^3 \\ 4\pi \chi^2 a_0^2, & \mathbb{E}^3 \\ 4\pi (\operatorname{senh}\chi)^2 a_0^2, & \mathbb{H}^3 \end{cases}$$

Desse modo, substituindo $\chi = c\int_t^{t_0} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})} = \frac{c}{a_0}\int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}$ (vide aulas anteriores), temos, finalmente:

$$\boxed{d_L(z) = \begin{cases} (1+z)\,a_0 \,\mathrm{sen}\left(\frac{c}{a_0}\int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}\right) & , \mathbb{S}^3 \\ (1+z)\,c\int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})} & , \mathbb{E}^3 \\ (1+z)\,a_0 \sinh\left(\frac{c}{a_0}\int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}\right) & , \mathbb{H}^3 \end{cases}}$$

- Distância angular ("angular-diameter distance")

Suponha que conheçamos, por alguma razão, o tamanho de um certo objeto e o observemos à distância, com seu tamanho conhecido δl perpendicular à nossa linha de visão. Podemos medir facilmente o tamanho angular $\delta\theta$ do objeto. Se estivéssemos em espaço-tempo plano, a relação entre δl, $\delta\theta$ e a distância geométrica D que o objeto está de nós seria (assumindo, evidentemente, $\delta l \ll D$):

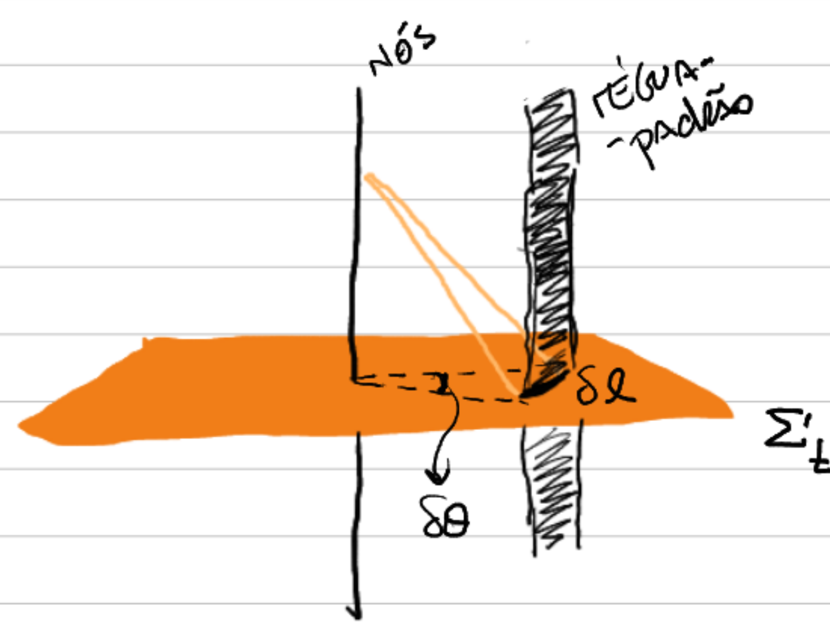
$$\delta\theta = \frac{\delta l}{D}$$

Num universo em expansão e com seção espacial possivelmente curva, a relação entre $\delta\ell$, $\delta\theta$ e D não é tão simples. Porém, analogamente ao que fizemos no caso anterior, <u>definiremos</u> uma grandeza com dimensão de distância, d_A, através de

$$d_A := \frac{\delta\ell}{\delta\theta} \, ,$$

onde, lembremos, $\delta\ell$ é suposto conhecido. Objetos astronômicos cujo tamanho típico $\delta\ell$ é conhecido são chamados de <u>réguas-padrão</u> e com eles podemos medir d_A que é chamado de <u>distância angular</u>. Assim, a observação de réguas-padrão com diferentes redshifts permite a obtenção empírica de uma curva $d_A \times z$ que, então, pode ser usada para se estudar a evolução do universo. Isso porque, de acordo com a teoria, essa relação tem que ser dada por:

$$\delta\ell = \begin{cases} a(t)\sin\chi(t)\,\delta\theta \\ a(t)\chi(t)\,\delta\theta \\ a(t)\sinh\chi(t)\,\delta\theta \end{cases} = \begin{cases} a_0(\sin\chi)\,\delta\theta/(1+z) & , S^3 \\ a_0\chi\,\delta\theta/(1+z) & , E^3 \\ a_0(\sinh\chi)\,\delta\theta/(1+z) & , H^3 \end{cases} .$$



Sendo assim, temos:

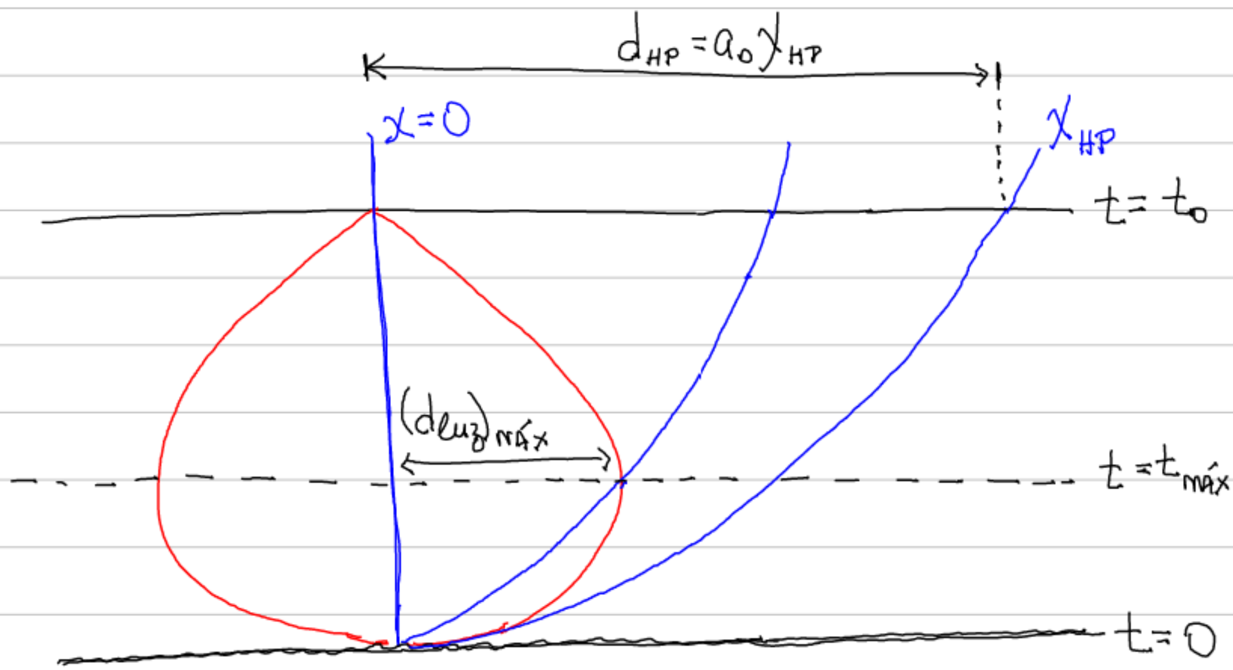
$$\boxed{d_A(z) = \begin{cases} \dfrac{a_0}{(1+z)}\sin\left(\dfrac{c}{a_0}\displaystyle\int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}\right) & , S^3 \\ \dfrac{c}{(1+z)}\displaystyle\int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})} & , E^3 \\ \dfrac{a_0}{(1+z)}\sinh\left(\dfrac{c}{a_0}\displaystyle\int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}\right) & , H^3 \end{cases}}$$

(Note que d_A e d_{luz} são bastante parecidos — em particular, no caso $\mathbb{E}^3$, idênticos.)

Exercício: Para o caso em que $a(t) \propto t^\lambda$, $\lambda > 0$, calcule explicitamente $d_L(z)$ e $d_A(z)$. Note que mesmo no caso $\mathbb{E}^3$, no qual d_L é monotonicamente crescente como função de z, $d_A(z)$ pode atingir um valor máximo. Interprete esse fato fisicamente. (Sugestão: revisite o exercício onde o perfil de nosso cone-de-luz passado foi pedido.)

Cone-de-luz passado e

Horizonte de partículas

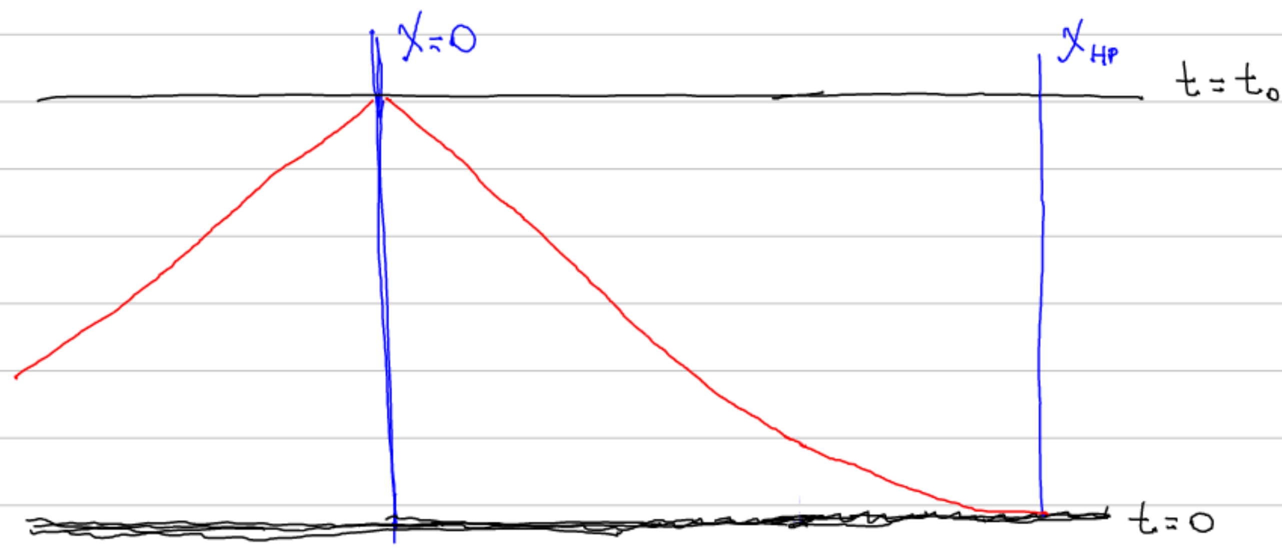


$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[d\chi^2 + f(\chi)^2 d\Omega^2 \right]$$

$$\chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})} \iff \chi(z) = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}$$

$$d_{luz}(t) = a(t) \int_t^{t_0} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})} \iff d_{luz}(z) = \frac{1}{(1+z)} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}$$

$$d_{HP} = a_0 \int_0^{t_0} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})} = \int_0^{\infty} \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}$$



Note que:

UNIVERSO EM EXPANSÃO

$$d_{HP} = a_0 \int_0^{t_0} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})} > a_0 \int_0^{t_0} \frac{d\bar{t}}{a_0} = \int_0^{t_0} d\bar{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d_{HP} > t_0}$$

Exercício: mostre que $(d_{luz})_{máx}$ satisfaz $H(t_{máx})(d_{luz})_{máx} = 1$