NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 1 - Teoria de conjuntos

Nesta aula, faremos uma breve introdução da teoria dos conjuntos.

Apresentação

Neste tópico será apresentado uma introdução ingênua a teoria dos conjuntos.

Definição: Um conjunto é constituído de objetos chamados elementos. Usamos a notação $x \in A$ (lê-se x pertence a A) para dizer que x é um elemento do conjunto A. Se x não é um elemento de A, então escrevemos $x \notin A$ (lê-se x não pertence a A).

Exemplo:

Seja A o conjunto cujos elementos são os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Escrevemos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Temos $1 \in A$, $2 \in A$ e $7 \notin A$.

Outra maneira de caracterizar um conjunto é através de uma propriedade P possuída por todos os seus elementos e apenas por estes. Escrevemos neste caso {x ; P (x)}, {x | P (x)} ou {x : P (x)} (lê-se o conjunto dos elementos x tais que P (x) é verdadeira, ou ainda, dos elementos x que possuem a propriedade P). Salientamos que a letra x é arbitrária de modo que {x ; P (x)} = {y ; P (y)}.

Exemplos:

1. Seja P a propriedade “é um número presente na face de um dado” e seja $A = \{x\ ;\ P(x)\}$. Então $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Seja P a propriedade “é um número natural divisível por 2”. E seja $B = \{y;\ P(y)\}$. Então $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2k, \ldots\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Aqui $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ = conjunto dos números naturais.

Definição: Dizemos que A é um subconjunto de B ou que A é uma parte de B, ou ainda, que A está contido em B e escrevemos $A \subset B$ se todo elemento de A pertence a B. Dizemos também que B contém A e escrevemos $B \supset A$.

Definição: Quando $A \subset B$ e $B \subset A$, os conjuntos A e B são ditos iguais e escrevemos $A = B$. Caso contrário eles são diferentes e escrevemos $A \neq B$. A notação ($A \subsetneq B$) ou ($B \supsetneq A$) é uma abreviação para $A \subset B$ com $A \neq B$, neste caso dizemos que A é um subconjunto próprio de B.

Observação: Para provar que dois conjuntos A e B são iguais deve-se provar que $A \subset B$ e depois que $B \subset A$.

Exemplos:

1. Sejam $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   Concluímos que $A \subsetneq B$.

2. Sejam A o conjunto dos números inteiros múltiplos de 4 e B o conjunto dos números pares, então $A \subset B$.

Pergunta:

Sejam $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

$A \subset B$? Por quê?

Resposta:

Não, pois $0 \in A$ e $0 \notin B$.

Observação: De maneira geral, se A não é um subconjunto de B significa que existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B.

Definição: O conjunto vazio, denotado por $\varnothing$, é um conjunto que não possui nenhum elemento, ou seja, não existe x tal que $x \in \varnothing$.

Exemplo: Sejam A = {1, 2}, B = {3} e C = {A, B}. Tente se convencer de que todas as afirmativas abaixo são verdadeiras.

$$A \in \mathcal{C}, \quad B \in \mathcal{C}, \quad \{A\} \subset \mathcal{C}, \quad \{B\} \subset \mathcal{C}, \quad 1 \notin \mathcal{C}, \quad 2 \notin \mathcal{C}, \quad 3 \notin \mathcal{C}.$$

Perceba ainda que é errado dizer {2} ⊂ C, {3} ⊂ C ou {{2}} ⊂ C. Entretanto, é verdade que {{3}} ⊂ C.

Definição: Quando C é um conjunto de conjuntos (para simplificar a linguagem) dizemos que C é uma coleção, uma classe ou uma família de conjuntos. Elementos de C são comumente chamados de membros

Definição: Seja A um conjunto. A coleção de todos os subconjuntos de A é dita conjunto das partes de A e é denotada por P(A) ou por 2^A. Em símbolos,

$$P(A) = \{B \; ; \; B \subset A\}.$$

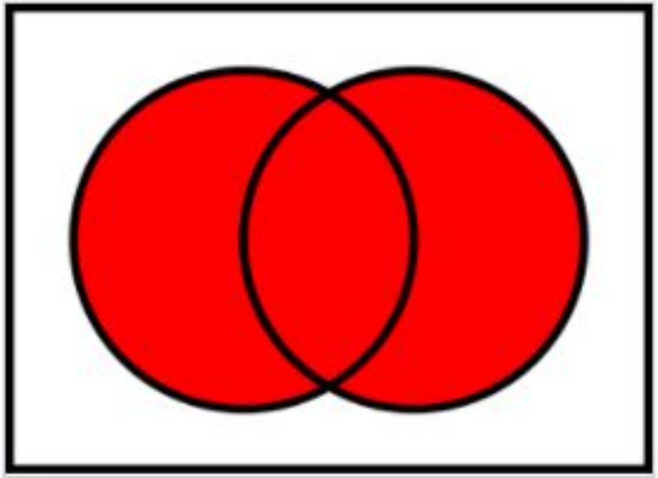
Portanto, $B \in P(A)$ se, e somente se, $B \subset A$.

Exemplo: A={1,2,3} então o conjunto das partes de A é:

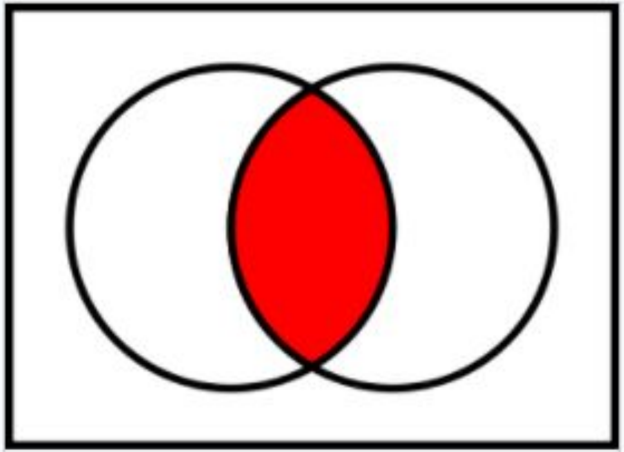
$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Definição: Sejam A e B dois conjuntos. Existe um conjunto, chamado união ou reunião de A e B (denotado por $A \cup B$), cujos elementos pertencem a A **ou** a B. Também existe um conjunto chamado intersecção de A e B (denotado por $A \cap B$) cujos elementos pertencem a A **e** a B. Em outros termos:

$$A \cup B = \{x \,;\, x \in A \text{ ou } x \in B\} \text{ e } A \cap B = \{x \,;\, x \in A \text{ e } x \in B\}.$$



$A \cup B$



$A \cap B$

Definição: e C é uma coleção não vazia de conjuntos, então a união ou reunião da coleção C é formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um membro de C. Em símbolos,

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \; ; \; \textit{existe } A \in \mathcal{C} \textit{ tal que } x \in A\}.$$

A interseção da coleção C é constituída pelos elementos que pertencem a todos os membros de C. Em símbolos,

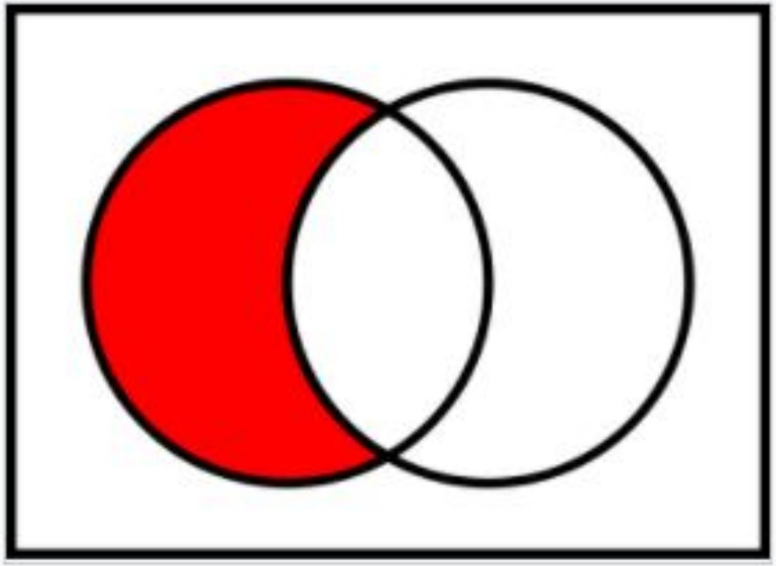
$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \; ; \; x \in A \textit{ para todo } A \in \mathcal{C}\}$$

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 4, 8\}$. Temos:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ e

$A \cap B = \{1, 2\}$.

Definição: Sejam A e B conjuntos. O conjunto diferen¸ca entre A e B (denotado por $A \setminus B$ ou $A - B$) é constituído pelos elementos de A que não pertencem a B. Em símbolos, $A \setminus B = \{x \,;\, x \in A \text{ e } x \notin B\}$.



$A \setminus B$

Exemplos:

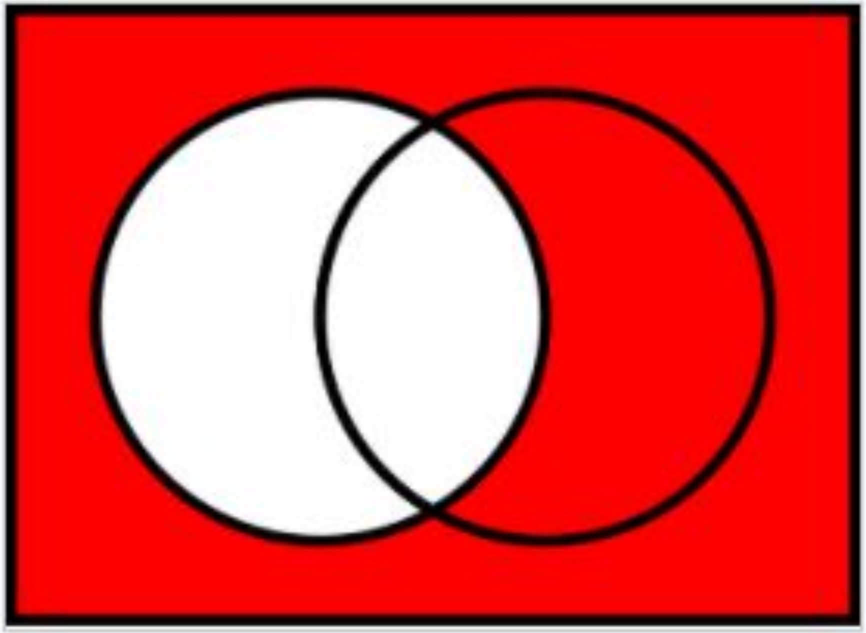
1. $A = \{a,b,c\}$ e $B = \{b,c,d,e\}$

   $A\text{-}B = \{a\}$

2. $C = \{a,b\}$ e $D = \{a, b, c, d, e\}$

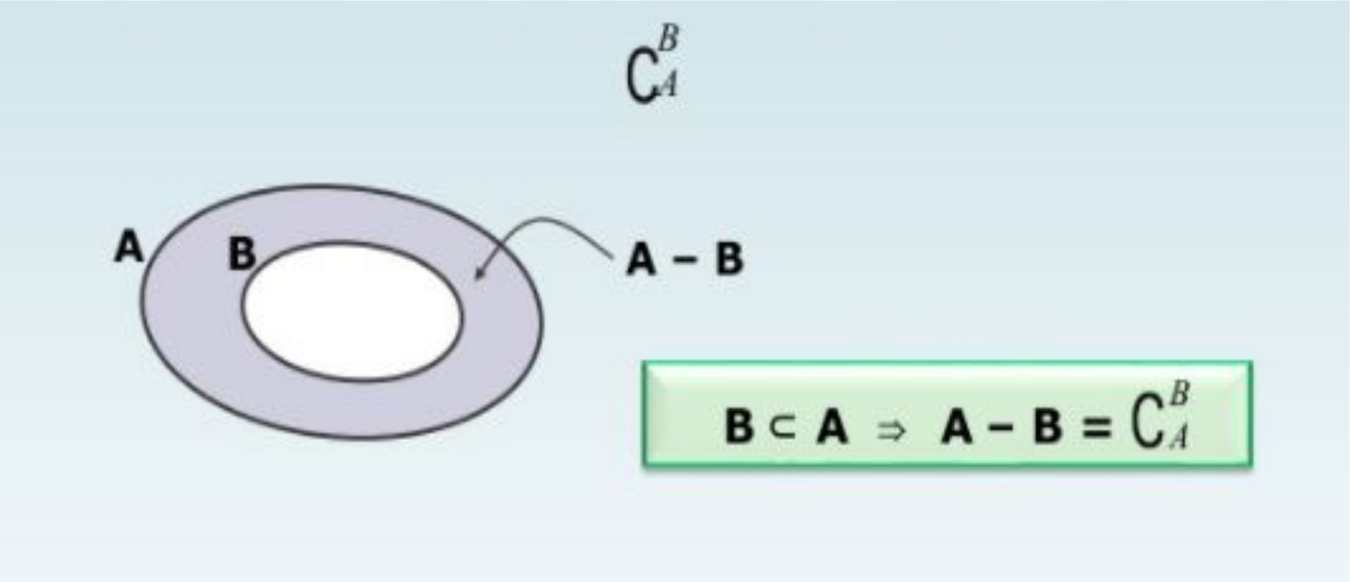
   $C\text{-}D = \varnothing$

Definição: Quando trabalhamos apenas com subconjuntos de um determinado conjunto X (subentendido no contexto) definimos o complementar de A por $X \setminus A$ e o denotamos A^c.

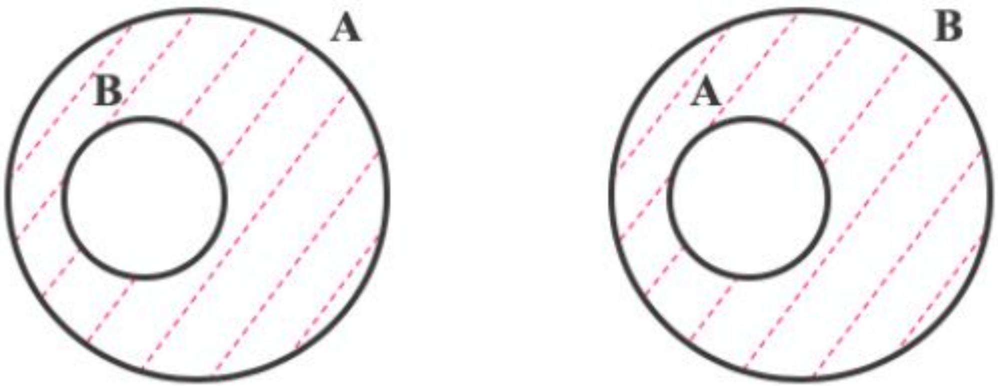


A^c

Definição: Quando B $\subset$ A dizemos o complementar de B em relação ao conjunto A como sendo:



$C_A^B = A - B$ $\qquad$ $C_B^A = B - A$



Exemplo: A= {a, b, c, d, e} e B = {c, d, e}

Complementar de B em relação ao conjunto A é:

$$C_A^B = \{a, b\}$$

Propriedades da Intersecção e União

P_1. $A \cap \varnothing = \varnothing$;

P_2. $A \cap \mathcal{U} = A$;

P_3. $A \cap A^c = \varnothing$;

P_4. $A \cap A = A$;

P_5. $A \cap B = B \cap A$;

P_6. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

P_1. $A \cup \varnothing = A$;

P_2. $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$;

P_3. $A \cup A^c = \mathcal{U}$;

P_4. $A \cup A = A$;

P_5. $A \cup B = B \cup A$;

P_6. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

Para contextualizarmos a teoria de conjuntos apresentaremos uma prévia de teoria de probabilidade que será feito no próximo tópico.

Os axiomas da probabilidade basicamente são utilizados conceitos de teoria de conjuntos que são:

1º axioma - A probabilidade de qualquer acontecimento é maior ou igual a zero

$$P(A) \geq 0$$

2º axioma - A probabilidade do acontecimento certo S :

$$P(S) = 1$$

3º axioma - Dados dois acontecimentos disjuntos, a probabilidade da sua união é igual à soma das probabilidades de cada um Se

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP