AS REGRAS DE L'HOSPITAL

1. Introdução

Entre as propriedades operatórias dos limites, vimos que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ se $\lim_{x\to a} f(x) = A$ e $\lim_{x\to a} g(x) = B$. com $B \neq 0$. No caso em que $B = 0$ e $A \neq 0$ o limite, quando existe é infinito. No caso $A = B = 0$, o limite pode ter qualquer valor, ou não existir. usamos o símbolo $\frac{0}{0}$ para indicar esta situação, e dizemos que $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação. Outras indeterminações são representadas por: $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, 0^0, $1^\infty, \infty^0$ e $\infty - \infty$, com interpretações semelhantes.

Exemplos 1.1.
a) Se $f(x) = kx,\ k \in \mathbb{R}$ *e* $g(x) = x$, *então* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{kx}{x} = \lim_{x\to 0} k = k$.
b) Se $f(x) = x$ *e* $g(x) = x^3$, *então* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$.

Vamos considerar apenas os casos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, os outros casos podem, quase sempre, ser reduzidos a um desses dois.

Para isso, precisamos de uma generalização do Teorema do Valor Médio, devida a Cauchy.

Teorema 1.2. *Sejam f e g, funções contínuas em $[a,b]$ e diferenciáveis em $]a,b[$ e suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a,b[$. Então existe $c \in]a,b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.*

Date: July 14, 2021.

Dem. Como $g'(x) \neq 0$ em $]a, b[$, segue do Teorema de Rolle que $g(b) \neq g(a)$. Portanto, podemos definir a função:

$$h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))$$

Então $h(a) = h(b) = 0$. Do Teorema de Rolle, segue que existe $c \in]a, b[$, talque $h'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. $\square$

Vamos considerar o caso da indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Vamos consderar apenas limites á direita, os outros casos são similares.

Teorema 1.3. *(Regra de L'Hospital I) Sejam* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *e suponhamos que* f, g *são diferenciáveis em* $]a, b[$, $g'(x) \neq 0$, *para todo* $x \in]a, b[$ *e*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0.$$

Então temos:

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(O limite L *pode ser finito ou infinito).*

Dem. Vamos considerar o caso em que $L \in \mathbb{R}$. O caso de limites infinitos fica a cargo do leitor. Do Teorema do Valor Médio de Cauchy, temos, para $\alpha, x \in]a, b[$, com $a < \alpha < x < b$.

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)},\ \xi_x \in]\alpha, x[.$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que $0 < x - a < \delta$ implica $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L| < \epsilon$. Como $a < \xi_x < x$, $g'(\xi_x) \neq 0$, temos

$$\left|\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}-L\right|<\epsilon.$$

Fazendo $\alpha \to 0$, obtemos $|\frac{f(x)}{g(x)} - L| < \epsilon.$, se $0 < x - a < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue o resultado. $\square$

Exemplos 1.4.
a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)}{x} = 0.$
b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = 1/2.$

O caso de indeterminação do tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ é bastante similar.

Teorema 1.5. *(Regra de L'Hospital II) Sejam* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *e suponhamos que* f, g *são diferenciáveis em* $]a, b[$, $g'(x) \neq 0$, *para todo* $x \in]a, b[$ *e*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty.$$

Então temos:

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(O limite L *pode ser finito ou infinito).*

Exemplos 1.6.
a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$
b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$